

RENDICONTI  
*del*  
SEMINARIO MATEMATICO  
*della*  
UNIVERSITÀ DI PADOVA

MARIO VOLPATO

**Un'osservazione su di un teorema di Scorza Dragoni**

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*,  
tome 18 (1949), p. 262-264

[http://www.numdam.org/item?id=RSMUP\\_1949\\_\\_18\\_\\_262\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1949__18__262_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1949, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## UN'OSSERVAZIONE SU DI UN TEOREMA DI SCORZA DRAGONI

*Nota (\*) di MARIO VOLPATO (a Ferrara).*

Fra i criteri forniti da G. SCORZA DRAGONI (1) per l'esistenza di punti uniti nelle trasformazioni topologiche di un cerchio figurano i seguenti :

I) *La trasformazione topologica  $t$  del cerchio  $G$ , delimitato da  $g$ , nell'insieme  $\Gamma$ , delimitato da  $\gamma$ , ammette almeno un punto unito, se  $G$  e  $\Gamma$  hanno punti interni comuni e se le immagini, nella  $t$ , dei punti interni ad uno qualunque  $m$  degli (eventuali) archi massimi di  $g$  sottesi a  $\gamma$  non appartengono mai all'insieme  $U - m$ , dove  $U$  è l'insieme limitato, delimitato dalla curva semplice e chiusa costituita da  $m$  e dall'arco massimo di  $\gamma$ , sotteso a  $G$ , corrispondente ad  $m$*

e

II) *La trasformazione topologica  $t$  del cerchio  $G$ , delimitato dalla circonferenza  $g$ , nell'insieme  $\Gamma$ , delimitato dalla curva  $\gamma$ , ammette almeno un punto unito, se esiste un punto  $O$  interno a  $G$  e  $\Gamma$ , tale che le immagini dei punti interni ad uno qualunque  $n$  degli (eventuali) archi massimi di  $g$  sottesi alla curva  $\gamma$  rispetto ad  $O$  non appartengono mai all'insieme  $U - n$ , dove  $U$  è l'insieme*

(\*) Pervenuta in Redazione il 7 Maggio 1949.

(1) G. SCORZA DRAGONI: *Criteri per l'esistenza di punti uniti in trasformazioni topologiche del cerchio e loro applicazione.* [Annali di Matematica pura ed applicata, serie IV, tomo XXV (1946), pagg. 43-65].

*limitato, delimitato dalla curva semplice e chiusa costituita da  $n$  e dal corrispondente arco massimo di  $\gamma$ , sotteso a  $g$  rispetto ad  $O$  <sup>(2)</sup>.*

Le ipotesi di questo II) teorema assicurano anzi che (almeno) un punto unito è contenuto nell'involucro di JORDAN di  $G$  e  $\Gamma$  rispetto ad  $O$ .

Nella presente Nota dimostro che il teorema II) è una conseguenza del teorema I), nel senso che l'involucro di JORDAN di  $G$  e  $\Gamma$ , rispetto ad  $O$ , ed il suo trasformato soddisfano alle ipotesi del teorema I).

Nelle nostre considerazioni possiamo escludere che sia  $G \subset \Gamma$  o  $\Gamma \subset G$  perchè in tali casi i due teoremi sono manifestamente identici.

Sia allora  $J$  l'involucro di JORDAN di  $G$  e  $\Gamma$  rispetto ad  $O$ ;  $j$  quello di  $g$  e  $\gamma$  rispetto ad  $O$ ;  $j$  è una curva semplice chiusa che delimita  $J$ . Siano poi  $n_1, n_2, \dots$  gli archi massimi di  $g$  sottesi a  $\gamma$ , rispetto ad  $O$ ; essi costituiscono dei sottoarchi di  $j$ . Diciamo  $v_i$  l'arco di  $\gamma$  sotteso a  $g$ , rispetto ad  $O$ , corrispondente ad  $n_i$ ; poniamo  $u_i = n_i + v_i$  e indichiamo con  $U_i$  l'insieme (chiuso) limitato delimitato dalla curva semplice e chiusa  $u_i$ . Ricordiamo che per ipotesi l'insieme  $U_i - n_i$  non contiene punti interni a  $t(n_i)$ .

Consideriamo il trasformato  $t(J)$  di  $J$  ed osserviamo che esso può essere contenuto interamente in  $J$  oppure no. Se  $t(J) \subset J$  si ha il caso analogo di  $\Gamma \subset G$ . Se questo non si verifica si osservi allora che  $t(J)$  non può nemmeno essere contenuto interamente in un insieme  $U_i$ . Infatti se ciò fosse, detto  $U_p$  l'insieme  $U_i$  che contiene interamente  $t(J)$ , atteso il fatto che nessun punto interno ad  $n_p$  può essere il trasformato di un punto interno ad  $n_p$  (perchè il trasformato di ogni punto di  $g$  deve appartenere a  $\gamma$ ), si avrebbe che le immagini dei punti interni ad  $n_p$  appartenerebbero ai punti interni di  $v_p$  e quindi a  $U_p - n_p$ , contrariamente all'ipotesi. Ne consegue che se non è  $t(J) \subset J$ ,  $t(J)$  ha

<sup>(2)</sup> I due teoremi I) e II) sono rispettivamente il V e il VI del loc. cit. in (1). Per la bibliografia sull'argomento, così pure per il significato dei termini che vengono usati in questa Nota rimando alla Memoria di SCORZA DRAGONI cit. in (1).

e dei punti interni a  $J$  e dei punti esterni a  $J$ . Questi ultimi però, dovendo essere  $t(J) \subset \Gamma$ , appartengono agli insiemi  $U_i$ .

Sia allora  $L$  un punto della frontiera  $t(j)$  di  $t(J)$ , esterno a  $J$ , ed appartenente per es. a  $U_r$ . A partire da  $L$  percorriamo  $t(j)$  in un determinato verso fino a fermarci al primo punto  $Q$  comune a  $t(j)$  e  $g$ . Poi, sempre a partire dallo stesso punto  $L$  di  $t(j)$ , percorriamo  $t(j)$  nel verso contrario al precedente fino al primo punto  $P$  comune a  $t(j)$  e  $g$ . Sia  $\mu_s$  l'arco di  $t(j)$  di estremi  $P$  e  $Q$ , contenente  $L$ . Poichè  $\mu_s$ , in quanto arco di  $t(j)$ , non può tagliare  $\gamma$ , si ha che i punti interni a  $\mu_s$  appartengono tutti a  $U_r$ , e che i punti  $P$  e  $Q$  di  $g$  appartengono ad  $n_r$  e quindi a  $j$ . Inoltre i punti  $P$  e  $Q$  sono certamente distinti. Ne segue che l'arco  $\mu_s$  di  $t(j)$  è un arco sotteso a  $j$  rispetto all'infinito del piano. Sia  $m_s$  l'arco di  $j$  sotteso a  $t(j)$ , rispetto all'infinito, corrispondente a  $\mu_s$ , e sia  $V_s$  l'insieme (chiuso) limitato e delimitato dalla curva semplice e chiusa  $v_s = \mu_s + m_s$ . Dal ragionamento precedente si ha:

$$\mu_s \subset U_r ; m_s \subset n_r \text{ e quindi } V_s \subset U_r .$$

Ma, per le ipotesi del teorema, i punti interni ad  $m_s$ , essendo anche punti interni di  $n_r$ , non vengono mai portati da  $t$  in  $U_r - n_r$ . Ne segue che le immagini dei punti interni ad  $m_s$  non appartengono mai all'insieme  $V_s - m_s$ , come appunto prescrivono le ipotesi del teorema I).