Rendiconti
del
Seminario Matematico
della
Università di Padova

Giuseppe Grioli

Una proprietà caratteristica delle precessioni regolari del solido pesante asimmetrico

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 19 (1950), p. 237-248

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1950__19__237_0>

UNA PROPRIETÀ CARATTERISTICA DELLE PRECESSIONI REGOLARI DEL SOLIDO PESANTE ASIMMETRICO

Nota (*) *di* GIUSEPPE GRIOLI (*a Padova*).

Facendo uso di una speciale forma [1] dell'espressione del momento delle quantità di moto di un qualunque solido con un punto fisso, metto in evidenza una proprietà caratteristica delle precessioni regolari del solido pesante asimmetrico riguardante il moto dell'antipolo dell'asse di moto rispetto all'ellisse centrale del piano baricentrale [2] passante per esso.

* * *

Sia S un qualunque solido pesante asimmetrico fissato senza attrito per un qualsiasi punto, O, distinto dal baricentro, G, di una delle due rette, f, baricentriche ortogonali ai piani ciclici dell'ellissoide centrale, E_G. Inoltre siano Q uno dei punti dove f interseca E_G, n la normale in Q ad E_G e $\varkappa$ l'angolo acuto di f ed n.

In ognuna delle precessioni regolari dinamicamente possibili per S, che chiamerò P^*, la velocità angolare ha l'espressine [3]

$$\omega = \nu(\mathbf{k} + \boldsymbol{\chi}) \,, \tag{1}$$

(*) Pervenuta in Redazione il 16 marzo 1950.

(1) A. SIGNORINI: *Meccanica razionale con elementi di Statica grafica e disegno*. – Vol. I, pagg. 328–329. – Ai §§ 4, 5 di tale volume mi riferirò nel seguito per le proprietà dell'ellisse centrale di un piano baricentrale di cui mi servirò.

(2) Loco cit. in (1), pag. 322.

(3) G. GRIOLI: *Precessioni regolari del solido pesante asimmetrico*. [Rendiconti Accademia Nazionale dei Lincei; serie VIII, vol. IV, fasc. 4, 1948.

ove $\boldsymbol{k}$ denota il versore di OG, ν è una ben determinata costante e χ è il versore dell'asse di precessione, p, che risulta ortogonale ad f e penso orientato verso l'alto.

Siano: a l'asse di moto; e l'ellisse centrale del piano baricentrale per a; A^* l'antipolo di a rispetto ad e; C^* il centro d'inerzia di a, k_{A^*} la distanza di A^* da a; $\varkappa''_{C^*}$ l'angolo formato dalla normale esterna all'ellissoide d'inerzia relativo a C^* in uno dei punti in cui questo è incontrato da a con la normale esterna nello stesso punto all'ellisse sezione con il piano di a e G; m la massa di S; $\boldsymbol{v}_G$ la velocità di G.

In ogni atto di moto di S il momento delle quantità di moto [4] rispetto ad O è

(2) $$\boldsymbol{K}_0 = OA^* \wedge m\boldsymbol{v}_G + k_{A^*} tg\, \varkappa''_{C^*} m \boldsymbol{v}_G .$$

Posto

(3) $$l = |\, OG \,| ,$$

la (2), a causa di (1), diviene

(4) $$\boldsymbol{K}_0 = m l \nu \,[OA^* \times \boldsymbol{k} \cdot \chi - OA^* \times \chi \cdot \boldsymbol{k} + \\ + k_{A^*} tg\, \varkappa''_{C^*} (\chi \wedge \boldsymbol{k})] .$$

Ricordando che f appartiene ad uno dei piani principali d'inerzia, assumo come sistema solidale di riferimento, la terna, T, avente l'origine in O, l'asse ζ orientato come $\boldsymbol{k}$ e la coppia ξ, η [diversori $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$] tale che ξ sia asse principale d'inerzia.

In conseguenza risulta

(5) $$\boldsymbol{K}_0 = A p \boldsymbol{i} + (A q - A' r) \boldsymbol{j} + (C r - A' q) \boldsymbol{k} ,$$

con evidente significato dei simboli.

In ognuna delle P^* si ha

(6) $$p = \nu \, sen\, \nu t \; , \qquad q = \nu \cos \nu t \; , \qquad r = \nu \; ,$$

(4) Loco cit. in (1).

nonchè

$$\boldsymbol{\chi} = sen\, \nu t\, \boldsymbol{i} + cos\, \nu t\, \boldsymbol{j}\,. \tag{7}$$

Da (5), (6), (7) segue

$$\left\{\begin{aligned} &\boldsymbol{K}_0 \times \boldsymbol{\chi} = \nu\,(A - A'\, cos\, \nu t)\,, \\ &\boldsymbol{K}_0 \times \boldsymbol{k} = \nu\,(C - A'\, cos\, \nu t)\,, \end{aligned}\right. \tag{8}$$

che confrontate con (4) danno

$$\left\{\begin{aligned} &OA^* \times \boldsymbol{k} = \frac{A - A'\, cos\, \nu t}{m\, l}\,, \\ &OA^* \times \boldsymbol{\chi} = \frac{A'\, cos\, \nu t - C}{m\, l}\,. \end{aligned}\right. \tag{9}$$

Dalle (9) si deduce subito

$$OA^* = \frac{(A - A'\, cos\, \nu t)\, \boldsymbol{k} + (A'\, cos\, \nu t - C)\, \boldsymbol{\chi}}{m\, l} \tag{10}$$

Sovrapponendo ad f e p la coppia cartesiana x, y si constata che nel piano $x\, y$ le coordinate di A^* sono espresse da

$$x = \frac{A - A'\, cos\, \nu t}{m\, l}\,, \qquad y = \frac{A'\, cos\, \nu t - C}{m\, l}\,, \tag{11}$$

da cui si riconosce che A^* *oscilla armonicamente sulla retta*, R, *di equazione*

$$x + y = \frac{A - C}{m\, l}\,, \tag{12}$$

ortogonale ad a.

Ne segue che *il centro d'inerzia è solidale al piano* $x\, y$ *e risulta* $|\, OC^* \,| = cost.$

Da (11) si ritrova che nel caso giroscopico ($A' = 0$) anche A^* rimane, com'è noto [5], solidale al piano xy ma in più si constata che ciò avviene solo in quel caso.

Nel corpo la traiettoria di A^* appartiene al cono, λ, di vertice, V, definito da

$$(13) \qquad OV = \frac{A - C}{ml} \boldsymbol{k} ,$$

di asse f e semiapertura $\frac{\pi}{4}$.

Essa, in base a (7), (10) è determinata da

$$(14) \quad OA^* = \frac{(A' \cos \nu t - C)(\operatorname{sen} \nu t \boldsymbol{i} + \cos \nu t \boldsymbol{j}) + (A - A' \cos \nu t) \boldsymbol{k}}{ml}$$

ed è, evidentemente, tangente ai paralleli che la delimitano e percorsa con moto periodico di periodo $\frac{2\pi}{\nu}$.

Osservazione. - Il piano $\eta\zeta$ è piano principale d'inerzia per ogni punto di ζ.

Detto A_0 il momento d'inerzia rispetto alla normale per G al piano $\eta\zeta$ e posto

$$(15) \qquad d = VG \times \boldsymbol{k} ,$$

da (13) segue

$$(16) \quad d = VG \times \boldsymbol{k} = (OG - OV) \times \boldsymbol{k} = l - \frac{A_0 - C + ml^2}{ml}$$

o, più semplicemente,

$$(17) \qquad ld = \frac{C - A_0}{m} .$$

Da (15), (17) si vede che V sta dalla stessa parte di O rispetto a G o dall'altra a seconda che sia $C - A_0 \gtrless 0$ [si tenga presente che è $l > 0$].

(5) Loco cit. in (1), pag. 330.

Se poi la struttura di S è tale che le due rette baricentriche ortogonali ai piani ciclici di E_G siano tra di loro ortogonali, risulta $A_0 = C$ e la (17) mostra che allora e soltanto allora il cono λ ha il suo vertice coincidente con G, qualunque sia la posizione del punto fisso O su f.

* * *

La proprietà precedentemente enunciata è caratteristica delle precessioni regolari del solido pesante asimmetrico fissato senza attrito per un suo punto.

Sia V^* un qualunque punto di f se $C - A_0 \neq 0$, lo stesso G se $C - A_0 = 0$ e d^* la distanza di V^* da G, presa con il medesimo segno di $C - A_0$. Sia inoltre λ^* il cono rotondo di asse f, vertice V^* e semiapertura uguale a $\frac{\pi}{4}$.

Denoto con X una costante, arbitraria > 0 se $C - A_0 = 0$, espressa da

$$X = \frac{d^*}{C - A_0}, \tag{18}$$

se è $C - A_0 \neq 0$.

Pongo

$$l^* = \frac{1}{m X} > 0 \tag{19}$$

e indico con O^* quello dei due punti di f, aventi da G distanza uguale a l^*, che sta dalla stessa banda di V^* rispetto a G se $C - A_0 > 0$, da banda opposta se $C - A_0 < 0$, uno qualunque di essi se $C - A_0 = 0$.

Come terna di riferimento, T^*, solidale ad S assumo quella dello stesso tipo della T avente l'origine in O^* e l'asse η con verso tale che risulti (6) $A' < 0$.

(6) Si tenga presente che A' è lo stesso per ogni terna avente come asse ζ la f e come piano $\eta\zeta$ il piano principale d'inerzia passante per ζ.

Chiamo $\bar{A}^*$ il punto determinato dalle seguenti condizioni: *a*) si muove con legge armonica su un sostegno rettilineo, R^*, che ruota uniformemente attorno ad f descrivendo il cono λ^*; *b*) i moti di $\bar{A}^*$ su R^* e quello di R^* attorno ad f hanno lo stesso periodo; *c*) nel moto su R^* l'ascissa, Y, di $\bar{A}^*$, misurata a partire da V^* positivamente nel verso che forma angolo acuto con V^*G, se $V^* \neq G$, è espressa da

$$Y = \sqrt{2}\, X\, (C - A' \cos \sigma t)\,; \tag{20}$$

d) il moto di R^* attorno ad f è destrogiro o levogiro rispetto ad O^*G a seconda che la costante σ sia $\gtrless 0$ e per $t = 0$ $V\bar{A}^*$ appartiene al piano di $\boldsymbol{j}\boldsymbol{k}$ e forma angolo ottuso con $\boldsymbol{j}$.

È immediata la constatazione, in base a quanto si è precedentemente detto, che in ogni P^* il moto del già considerato antipolo A^* è dello stesso tipo di quello di $\bar{A}^*$.

Tale proprietà risulta invertibile. Infatti dimostrerò: *per un solido asimmetrico fissato senza attrito per un punto, O, di una delle due rette baricentriche ortogonali ai piani ciclici sono possibili moti nei quali l'antipolo dell'asse di moto rispetto all'ellisse centrale del piano baricentrale per a coincide ad ogni istante con* $\bar{A}^*$ *allora e soltanto allora che O coincide con* O^*. *In tale eventualità e quando la forza attiva sia il peso ogni moto dinamicamente possibile è una delle precessioni regolari già note.*

* * *

Comincio con l'osservare che in base a (18), (19) si ha

$$\begin{aligned} O^*V^* = O^*G - V^*G = \left(1 - \frac{d^*}{l^*}\right) O^*G = \\ = \frac{m\, l^{*2} + A_0 - C}{m\, l^*}\, \mathrm{vers}\; O^*G \end{aligned} \tag{21}$$

mentre da (19), (20) si ricava

$$(22) \qquad Y = \sqrt{2}\,\frac{C - A' \cos \sigma t}{m\, l^*}\,.$$

In base a (21), (22) si vede che il moto di $\bar{A}^*$ nel corpo è definito da

$$(23) \quad O^*\bar{A}^* = \frac{(A' \cos \sigma t - C)\,(sen\, \sigma t\, \boldsymbol{i} + \cos \sigma t\, \boldsymbol{j}) + (A - A' \cos \sigma t)\, \boldsymbol{k}}{m\, l^*}\,.$$

Basta osservare che appartenendo O ad f l'ellisse baricentrale da considerare appartiene al piano di $\bar{A}^*$ ed f, confrontare le (21), (23) con le (13), (14) e ricordare la biunivocità della corrispondenza tra antipolo e antipolare per concludere che O deve coincidere con O^* e che nel suo moto nel corpo l'asse di moto descrive con moto rotatorio di periodo $\frac{2\pi}{\sigma}$ il cono di asse f, vertice O^* e semiapertura $\frac{\pi}{4}$.

Nel seguito scriverò O, A^* ed l anzichè O^*, $\bar{A}^*$ ed l^*, ma penserò l determinata in base a (19).

La direzione della velocità angolare è ormai ben determinata nel corpo, non così il modulo ed il verso. In effetti, tenuto presente che per $t = 0$ A^* e a [vedi (23)] appartengono al piano di $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$, è

$$(24) \qquad \omega = \frac{\omega^*}{\sqrt{2}}\,(sen\, \sigma t\, \boldsymbol{i} + \cos \sigma t\, \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k})$$

e quindi

$$(25) \qquad p = \frac{\omega^*}{\sqrt{2}}\, sen\, \sigma t\,, \quad q = \frac{\omega^*}{\sqrt{2}} \cos \sigma t\,, \quad r = \frac{\omega^*}{\sqrt{2}}\,.$$

Per determinare ω^* basta fare ricorso alla terza equazione di Eulero.

In base a (5) essa si scrive

$$C\,\dot{r} - A'\,\dot{q} - A'\,p\,r = 0 \tag{26}$$

e, a causa di (25), diviene

$$(C - A'\cos\sigma t)\,\dot{\omega}^* + A'\,sen\,\sigma t\left(\sigma - \frac{\omega^*}{\sqrt{2}}\right)\omega^* = 0\,. \tag{27}$$

Da (27) si deduce subito

$$\omega^* = \frac{\sqrt{2}\,\sigma}{1 + c_0\,(A'\cos\sigma t - C)}\,, \tag{28}$$

con c_0 costante, per ora, arbitraria.

Farò vedere che c_0 è necessariamente nulla, dopodichè resterà dimostrato che il moto di S è una precessione regolare ([7]).

Da

$$|\,OC^*\,| = |\,OA^* \times vers\,\omega\,| = \frac{|\,A - C\,|}{\sqrt{2}\,m\,l}\,, \tag{29}$$

segue

$$k_{A^*} = \sqrt{|\,OA^*\,|^2 - |\,OC^*\,|^2} = \frac{A + C - 2\,A'\cos\sigma t}{\sqrt{2}\,m\,l}\,. \tag{30}$$

Detta k_G la distanza di G da a e ρ il giratore di S rispetto ad a, da

$$k_G = \frac{l}{\sqrt{2}} \tag{31}$$

e da (30) si deduce

$$\rho^2 = k_{A^*}\,k_G = \frac{A + C - 2\,A'\cos\sigma t}{2\,m}\,. \tag{32}$$

([7]) Si pensi che nell' ipotesi $\omega^* \equiv cost. = \sqrt{2}\,\sigma$ il vettore $sen\,\sigma t\,\mathbf{i} + cos\,\sigma t\,\mathbf{j}$ riesce costante. Cioè f forma angolo invariabile con una direzione fissa dello spazio, ecc.

Denoto con μ_i, $(i = 1, 2, 3)$, i coseni direttori della verticale discendente rispetto agli assi solidali, con T la forza viva di S e con U il potenziale di gravità. Posto

$$\alpha = mgl, \tag{33}$$

con g modulo dell'accelerazione di gravità, si ha

$$T = \frac{1}{2} m \rho^2 \omega^{*2} = \frac{A + C - 2A' \cos \sigma t}{4} \omega^{*2}, \tag{34}$$

$$U = \alpha \mu_3 . \tag{35}$$

Detta E l'energia totale, l'integrale delle forze vive dà, in base a (28), (34), (35),

$$\mu_3 = \left\{ \frac{A + C - 2A' \cos \sigma t}{2[1 + c_0 (A' \cos \sigma t - C)]^2} \sigma^2 - E \right\} \frac{1}{\alpha} . \tag{36}$$

Invece l'integrale del momento delle quantità di moto secondo la verticale si scrive, in base a (5), (25),

$$\frac{\omega^*}{\sqrt{2}} \left\{ A \operatorname{sen} \sigma t \mu_1 + (A \cos \sigma t - A') \mu_2 + (C - A' \cos \sigma t) \mu_3 \right\} = cost. = K_\mu . \tag{37}$$

Insieme a (37) vanno tenute presenti le equazioni cinematiche

$$\left\{ \begin{aligned} &\dot{\mu}_1 + \frac{\omega^*}{\sqrt{2}} (\mu_3 \cos \sigma t - \mu_2) = 0 , \\ &\dot{\mu}_2 + \frac{\omega^*}{\sqrt{2}} (\mu_1 - \operatorname{sen} \sigma t \mu_3) = 0 , \\ &\dot{\mu}_3 + \frac{\omega^*}{\sqrt{2}} (\mu_3 \operatorname{sen} \sigma t - \mu_1 \cos \sigma t) = 0 . \end{aligned} \right. \tag{38}$$

Da (36), (37), 38,3) si deduce

$$
(39)\quad \left\{
\begin{aligned}
\mu_1 = & \left\{ \frac{\sigma^2}{2\alpha\,[1 + c_0\,(A'\cos\sigma t - C)]^2} \left[(A'\cos\sigma t - C)(A + C) + \right.\right. \\
& + 2A'\,[(C - A'\cos\sigma t)\cos\sigma t + \\
& \left. + A\cos\sigma t - A' + c_0\,(A - A'\cos\sigma t)\,(A\cos\sigma t - A')] \right] + \\
& \left. + K_\mu\,\frac{\sqrt{2}}{\omega^*} - \frac{A'\cos\sigma t - C}{\alpha}\,E \right\} \frac{sen\ \sigma t}{A - A'\cos\sigma t}\,, \\
\mu_2 = & \left\{ \frac{\sigma^2}{2\alpha\,[1 + c_0\,(A'\cos\sigma t - C)]^2} \left[(A'\cos\sigma t - C)\,(A + C)\cos\sigma t + \right.\right. \\
& + 2A'\,[(C - A'\cos\sigma t)\cos^2\sigma t - \\
& \left. - A\,sen^2\,\sigma t - A\,c_0\,(A - A'\cos\sigma t)\,sen^2\,\sigma t] \right] + \\
& \left. + \left[K_\mu\,\frac{\sqrt{2}}{\omega^*} - \frac{A'\cos\sigma t - C}{\alpha}\,E \right] \cos\sigma t \right\} \frac{1}{A - A'\cos\sigma t}\,.
\end{aligned}
\right.
$$

Osservando le (28), (36), (39), risulta evidente che insieme a

$$
(40)\quad (A - A'\cos\sigma t)\,[1 + c_0\,(A'\cos\sigma t - C)]^2 = \sum_{i=0}^{3} \tau_i \cos^i\sigma t\,,
$$

si può porre

$$
(41) \quad \begin{cases}
\mu_1 = sen\,\sigma t \dfrac{\sum_{i=0}^{3} a_i \cos^i \sigma t}{\sum_{i=0}^{3} \tau_i \cos^i \sigma t} , \\[2ex]
\mu_2 = \dfrac{\sum_{i=0}^{4} b_i \cos^i \sigma t}{\sum_{i=0}^{3} \tau_i \cos^i \sigma t} , \\[2ex]
\mu_3 = \dfrac{\sum_{i=0}^{3} \gamma_i \cos^i \sigma t}{\sum_{i=0}^{3} \tau_i \cos^i \sigma t} ,
\end{cases}
$$

ove le τ_i, a_i, b_i, γ_i, sono delle ben determinate costanti. Anzi, facilmente si constata che è

$$
(42) \quad \begin{cases}
\tau_3 = -c_0^2 A'^3, \qquad b_4 = \left(K_\mu \dfrac{c_0}{\sigma} - \dfrac{E}{\alpha}\right) c_0^2 A'^3 , \\[2ex]
a_2 = b_3 , \qquad a_3 = b_4 , \qquad \gamma_2 = c_0^2 A'^3 \dfrac{E}{\alpha} .
\end{cases}
$$

Da (41,2) si ricava

$$
(43) \qquad \dot{\mu}_2 = -\sigma\, sen\,\sigma t \frac{\sum_{\substack{s=0,\dots,3 \\ r=0,\dots,4}} (r-s)\, b_r \tau_s \cos^{r+s-1} \sigma t}{\left(\sum_{i=0}^{3} \tau_i \cos^i \sigma t\right)^2} ,
$$

mentre da (28), (41,1), (41,3) si deduce

$$\frac{\omega^*}{\sqrt{2}}(\mu_1 - sen\,\sigma t\,\mu_3) = \tag{44}$$

$$= \frac{sen\,\sigma t\,(A - A'\cos\sigma t)\,[1 + c_0\,(A'\cos\sigma t - C)]\sum_{i=0}^{3}(a_i - \gamma_i)\cos^i\sigma t}{\left(\sum_{i=0}^{3}\tau_i\cos^i\sigma t\right)^2}\,\sigma\,.$$

A causa di (38,2) deve risultare identicamente nulla la somma dei secondi membri di (43), (44). Ciò implica, tra l'altro,

$$\begin{cases} b_4\,\tau_3 = 0\,, \\ b_4\,\tau_2 + A'^2 c_0\,(a_3 - \gamma_3) = 0\,, \end{cases} \tag{45}$$

che, in base a (42), divengono

$$\begin{cases} \left(K_\mu \dfrac{c_0}{\sigma} - \dfrac{E}{\alpha}\right) c_0^4 A'^6 = 0\,, \\ \left[\left(K_\mu \dfrac{c_0}{\sigma} - \dfrac{E}{\alpha}\right)\tau_2 + \left(K_\mu \dfrac{c_0}{\sigma} - \dfrac{2E}{\alpha}\right) c_0\,A'^2\right] c_0^2 A'^3 = 0\,. \end{cases} \tag{46}$$

Non volendo concludere sin d'ora che sia $c_0 = 0$; da (46) si deduce

$$E = K_\mu = 0\,. \tag{47}$$

Tenendo presenti le (41), (42), (47), si vede che nel numeratore della frazione che esprime

$$\mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2 - 1 \tag{48}$$

il termine di grado più elevato in $\cos\sigma t$ è $-\tau_3^2\cos^6\sigma t$.

Ne segue, dato che l'espressione (48) deve riuscire identicamente nulla, che deve essere

$$\tau_3 = 0 \tag{49}$$

e questa, in base a (42,1), posta a

$$c_0 = 0\,, \qquad \text{c. d. d.} \tag{50}$$