RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

ARRIGO FINZI

Sulle curve invarianti per una trasformazione analitica di una superficie

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 19 (1950), p. 317-323

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1950__19__317_0>

SULLE CURVE INVARIANTI PER UNA TRASFORMAZIONE ANALITICA DI UNA SUPERFICIE

Nota (*) *di* ARRIGO FINZI (*a Roma*).

1. – Nella ricerca delle soluzioni asintotiche a una soluzione periodica, POINCARÉ è stato condotto a considerare una trasformazione biunivoca analitica dei punti di un piano nell'intorno di un punto fisso (1). Ponendo il punto fisso nell'origine le equazioni della trasformazione si potranno scrivere nella forma

$$x_1 = \alpha x + \beta y + R$$
$$y_1 = \gamma x + \delta y + R'.$$

POINCARÉ dimostra che se le radici dell'equazione in S,

$$\begin{vmatrix} \alpha - S & \beta \\ \gamma & \delta - S \end{vmatrix} = 0 ,$$

sono entrambe reali e l'una maggiore, l'altra minore dell'unità, esistono due curve per l'origine K_1 e K_2, che rimangono invarianti per la trasformazione; la dimostrazione è fatta costruendo lo sviluppo di TAYLOR della y in funzione della x,

$$y = a_1 x + a_2 x^2 + \ldots ,$$

che definisce, per es., la curva K_1.

(*) Pervenuta in Redazione il 15 aprile 1950.

(1) *Sur les curbes définies par les équations différentielles.* [Oeuvres Complètes, tome I, p. 199]. Il problema è stato ripreso da HADAMARD nel caso reale: *Sur l'itération et les solutions asymptotiques des équations différentielles.* [Bull. Soc. Math. de France, t. 29, p. 224].

È da rilevare la circostanza, che risulta possibile soddisfare al problema di trovare delle curve invarianti con delle soluzioni *analitiche*: si potrebbe forse allora essere indotti a pensare che potesse valere un principio di carattere generale; mi è sembrato per questo non del tutto inutile mostrare, con un esempio, che la stessa circostanza può invece non presentarsi in un altro problema dello stesso genere.

Ci si rende facilmente conto che la questione merita di essere considerata solo nel caso in cui l'insieme dei punti equivalenti di un punto della curva invariante ammetta almeno un punto di accumulazione. Nel caso studiato da POINCARÉ questo punto è unico; l'esempio che darò si riferisce invece al caso estremo opposto, in cui l'insieme dei punti equivalenti di un punto della curva invariante è ovunque denso sulla curva stessa; costruirò, per tale caso, una trasformazione analitica che ammette come curve invarianti delle curve di JORDAN, che non possiedono, in nessun intervallo, una tangente variabile con continuità.

Mi è parso che questo semplice risultato di ordine negativo, potesse servire a dare un'idea delle estreme difficoltà, che presenterebbe lo studio *in grande* delle trasformazioni di una superficie.

2. - Mi serviranno alcuni risultati relativi alle trasformazioni continue e biunivoche di una curva chiusa: di queste mi sono già occupato in una recente Nota Lincea (2) e successivamente, in forma sistematica, in una Memoria, che apparirà prossimamente negli Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure; mi limiterò qui dunque a ricordare rapidamente quelle nozioni, che mi saranno poi necessarie.

Supponiamo che la variabile x descriva i punti della curva chiusa C, ai valori x e $x+1$ della variabile corrispondendo lo stesso punto C: a una trasformazione T senza punti fissi, di equazione

$$x_1 = g(x) \qquad \left(\frac{dg(x)}{dx} \text{ continua e positiva}\right), \tag{1}$$

(2) *Sulla generazione di una trasformazione finita assegnata su una curva chiusa mediante una trasformazione infinitesima.* [Serie VIII, vol. VI, p. 688].

si può far corrispondere un invariante k, il modulo ([3]), che, risulta irrazionale nel caso, che a noi solo qui interessa, in cui nessun punto di C ritorna mai in se stesso per una qualsiasi potenza della T.

Si può asserire l'esistenza di un gruppo g_1, generato da una trasformazione infinitesima $Xf \equiv \xi(x) \frac{df}{dx}$ (con $\xi(x)$ continua e positiva), del quale faccia parte la T? Per poter rispondere affermativamente non è sufficiente che siano verificate, dalla $g(x)$, delle opportune condizioni di regolarità, occorre ancora richiedere, per il modulo, che sia soddisfatta una certa condizione aritmetica, che non è qui necessario ricordare. A noi ora basta solo sapere che, per una scelta conveniente di k, potremo trovare una trasformazione T, di equazione (1), con $g(x)$ analitica, che non ammette alcuna trasformazione infinitesima generatrice. Vi saranno poi evidentemente altre trasformazioni, aventi lo stesso modulo k, che ammettono invece una trasformazione infinitesima geometrica; tale sarà, per es., la

$$x_1 = x + k .$$

Indichiamo ora con $x_1, x_2, x_3, \ldots$ i trasformati di x per $T, T^2, T^3 \ldots$; l'ordinamento di questi punti sulla curva C è lo stesso per due qualsiasi trasformazioni di eguale modulo k (Poincaré, loco citato) ed è quello delle parti frazionarie (comprese fra 0 ed 1) dei numeri

$$x, x + k, \quad x + 2k, \quad x + 3k \ldots .$$

In particolare il punto x_n sarà dunque prossimo al punto x ogniqualvolta nk sarà poco diverso da un intero. L'insieme dei punti $x_1, x_2, x_3 \ldots$ è ovunque denso su C solo che la derivata di $g(x)$ sia funzione a variazione limitata (Denjoy, loco citato), in particolare fra questi punti ve ne saranno di prossimi ad x quanto si vuole.

([3]) Il modulo si definisce come il limite, per $n \to \infty$, del rapporto $\frac{m}{n}$ del numero dei giri completi di C, che un punto x compie per T^n, all'esponente n. Si tratta in fondo di un angolo di rotazione generalizzato.

3. - Consideriamo la superficie di un toro descritta dalle due variabili x, y, convenendo che due coppie di valori (x, y) e (x', y') rappresentino lo stesso punto della superficie quando x, x' e, rispettivamente, y, y' risultano congrui (mod. 1).

Siano

$$(2) \qquad \begin{aligned} x_1 &= g(x) \\ y_1 &= h(g) \end{aligned}$$

due trasformazioni, T_1 e T_2, analitiche di eguale modulo irrazionale k, e supponiamo che la prima trasformazione ammetta la trasformazione infinitesima generatrice $\xi(x)\dfrac{df}{dx}$, la seconda non ammetta invece alcuna trasformazione infinitesima generatrice.

La (2) dà una trasformazione biunivoca analitica senza punti fissi sulla superficie del toro.

Partiamo ora da un punto (x, y) e consideriamo la successione

$$(x_1, y_1), \quad (x_2, y_2), \quad (x_3, y_3) \ldots.$$

dei suoi trasformati. Vediamo facilmente che questi punti giacciono tutti su una certa curva e sono ovunque densi sulla curva stessa. Infatti gli insiemi dei valori (mod. 1) della successione $x_1, x_2, x_3 \ldots.$ e della successione $y_1, y_2, y_3 \ldots$ sono, per il citato teorema di Denjoy, ovunque densi sull'intervallo $(0, 1)$; d'altra parte due valori x_n e $x_{n'}$ sono infinitamente prossimi fra loro (mod. 1) sempre e soltanto quando $(n - n')\,k$ differisce infinitamente poco da un intero, ma allora anche y_n e $y_{n'}$ sono infinitamente prossimi fra loro.

Al variare del punto (x, y) sul toro otterremo un sistema ∞^1 di curve eguali fra loro, che ricoprono interamente la superficie.

Si deve ancora rilevare che se dei due valori x_n e $x_{n'}$, molto prossimi fra loro (mod. 1), il primo è, per esempio, maggiore del secondo, anche y_n sarà maggiore di $y_{n'}$. Dunque y risulta, sulla curva, funzione crescente di x, onde, per un ben noto teorema di LEBESGUE [4], la curva possiede quasi ovunque la tangente.

Vogliamo ora mostrare che *la tangente alla curva non può esistere ed essere continua in tutto un intervallo.* Siano infatti, in tale ipotesi, x_n e $x_{n'}$ due valori compresi nell'intervallo e infinitamente prossimi (mod. 1) a un $\bar{x}$, pure compreso nell'intervallo; il rapporto

$$\frac{y_n - y_{n'}}{x_n - x_{n'}}$$

fra l'ampiezza dei due segmenti $(y_n, y_{n'})$ e $(x_n, x_{n'})$ tenderebbe verso un rapporto della forma $\dfrac{u(\bar{x})}{\nu(\bar{x})}$, dove $u(x)$ e $\nu(x)$ sono due funzioni continue, con valori positivi o nulli, definite per ora solo nell'intervallo.

Indicandosi, in conformità colle notazioni sopra adottate, con $(x_{n+1}, x_{n'+1})$ e $(y_{n+1}, y_{n'+1})$ i segmenti trasformati di $(x_n, x_{n'})$ e $(y_n, y_{n'})$ rispettivamente per T_1 e T_2, si ha, per il teorema della media,

$$\frac{x_{n+1} - x_{n'+1}}{x_n - x_{n'}} = \frac{g(x_n) - g(x_{n'})}{x_n - x_{n'}} = \left[\frac{dg(x)}{dx}\right]_{x = x^*},$$

$$\frac{y_{n+1} - y_{n'+1}}{y_n - y_{n'}} = \frac{h(y_n) - h(y_{n'})}{y_n - y_{n'}} = \left[\frac{dh(y)}{dy}\right]_{y = y^*},$$

x^* e y^* essendo due convenienti punti di $(x_n, x_{n'})$ e di $(y_n, y_{n'})$. Allora il rapporto

$$\frac{y_{n+1} - y_{n'+1}}{x_{n+1} - x_{n'+1}}$$

tenderebbe verso l'espressione

(4) Vedi, per es., TONELLI: *Fondamenti di calcolo delle variazioni.* [Vol. I, p. 53].

$$\frac{u(\overline{x})}{\nu(\overline{x})}\,\frac{\left[\dfrac{dh(y)}{dy}\right]_{y=\overline{y}}}{\left[\dfrac{dg(x)}{dx}\right]_{x=\overline{x}}};$$

il ragionamento proverebbe l'esistenza di una tangente variabile con continuità in tutta la porzione della curva, che è la trasformata per la (2) della porzione nella quale l'esistenza di una tangente continua si era ammessa per ipotesi. Per iterazione si perverrebbe ad assicurare, ovunque sulla curva, l'esistenza di una tangente variabile con continuità.

Essendo allora x_n e $x_{n'}$ due valori infinitamente prossimi (mod. 1) a un valore $\overline{x}$, il rapporto

$$\frac{y_n - y_{n'}}{x_n - x_{n'}},$$

tenderebbe verso un rapporto della forma $\dfrac{u(\overline{x})}{\nu(\overline{x})}$, indicandosi con $u(x)$ e $\nu(x)$ due funzioni continue, con valori positivi o nulli, definite per ogni valore di x e, naturalmente, periodiche di periodo 1. Siccome d'altra parte $x_n - x_{n'}$ tende verso $\xi(\overline{x})$, a meno di una costante moltiplicativa, $y_n - y_{n'}$ tenderebbe, a meno della stessa costante moltiplicativa, verso l'espressione

$$\frac{u(\overline{x})}{\nu(\overline{x})}\,\xi(\overline{x});$$

x è, sulla curva in questione, funzione continua di y, infine dunque

$$y_n - y_{n'}$$

tenderebbe, a meno di una costante moltiplicativa, verso l'espressione

$$\frac{u(x(\overline{y}))}{\nu(x(\overline{y}))}\,\xi(x(\overline{y}));$$

$u(x(y))$ e $\nu(x(y))$ dovrebbero allora essere entrambe sempre diverse da zero [5], $y_n - y_{n'}$ tenderebbe dunque, a meno di una costante moltiplicativa, verso una funzione continua e positiva. In base a un lemma, che ho dimostrato nella memoria già citata [6], potremo allora asserire che la trasformazione

$$y_1 = h(y)$$

è generata dalla trasformazione infinitesima

$$\frac{u(x(y))}{\nu(x(y))} \xi(x(y)) \frac{df}{dy},$$

contro l'ipotesi formulata, che la trasformazione non ammetta una trasformazione infinitesima generatrice.

(5) Questo perchè, indicato con $\bar{y}_1$ il trasformato di y si avrebbe, come sopra, per il teorema della media,

$$\frac{\dfrac{u(x(\bar{y}_1))}{\nu(x(\bar{y}_1))} \xi(x(\bar{y}_1))}{\dfrac{u(x(\bar{y}))}{\nu x(\bar{y}))} \xi(x(\bar{y}))} = \left[\frac{dh(y)}{dy}\right]_{y=\bar{y}};$$

il primo membro risulterebbe dunque sempre finito e diverso da zero. Se allora una delle funzioni continue $u(x(y))$ e $\nu(x(y))$ si annullasse in un punto $\bar{y}$, si dovrebbe annullare anche in tutti gli infiniti punti trasformati di $\bar{y}$, onde, per il citato teorema di Denjoy, dovrebbe essere identicamente nulla.

(6) Nel paragrafo 32.