

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

ENRICO MAGENES

**Un'osservazione sulle condizioni necessarie per la
semicontinuità degli integrali di Fubini-Tonelli**

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 19 (1950), p. 44-53

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1950__19__44_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1950, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

UN'OSSERVAZIONE SULLE CONDIZIONI NECESSARIE PER LA SEMICONTINUITÀ DEGLI INTEGRALI DI FUBINI-TONELLI

Nota () di ENRICO MAGENES (a Padova).*

Scopo di questa breve Nota è di far conoscere alcune considerazioni sulle condizioni necessarie per la semicontinuità degli integrali di FUBINI-TONELLI, che ritengo utili per chiarire l'ulteriore sviluppo della teoria di questo capitolo del Calcolo delle Variazioni.

Riprendendo i lavori di G. FUBINI e di L. TONELLI, S. FAEDO ⁽¹⁾ ha studiato le condizioni necessarie per la semicontinuità degli integrali, da lui chiamati di FUBINI-TONELLI:

$$(1) \quad I(y_1, y_2) = \int_a^b \int_c^d f(x, z, y_1(x), y_2(x), y_1'(x), y_2'(x)) dx dz,$$

$$(2) \quad I(y) = \int_a^b \int_a^b f(x, z, y(x), y(z), y'(x), y'(z)) dx dz.$$

Egli ha considerato sia la semicontinuità *in tutto il campo* che quella su una data curva; io voglio qui riprendere in considerazione il primo tipo di problema.

(*) Pervenuta in Redazione il 10 luglio 1949.

(1) S. FAEDO: 1) *Condizioni necessarie per la semicontinuità di un nuovo tipo di funzionali* (Ann. di mat. pura e appl. (4) - XXIII - 1944 - pp. 69-121); 2) *Sulle condizioni di Legendre e di Weierstrass per gli integrali di Fubini-Tonelli* (Lit. Tacchi - Pisa - 1946).

1. - Richiamo anzitutto le definizioni e i risultati noti circa $I(y_1, y_2)$.

La funzione $f(x, z, y_1, y_2, y'_1, y'_2)$ (2) si suppone di solito definita per tutti i punti (x, z, y_1, y_2) di un campo A dello spazio (x, z, y_1, y_2) che contenga tutti i propri punti di accumulazione posti al finito, e per ogni valore di y'_1 e y'_2 , e continua insieme alle sue derivate parziali $f_{y'_1}, f_{y'_2}, f_{y'_1 y'_1}, f_{y'_2 y'_2}$ in ogni $(x, z, y_1, y_2, y'_1, y'_2)$ in cui è definita. Dicesi *curva ordinaria* C ogni coppia di funzioni $y_1(x), a \leq x \leq b, y_2(x), c \leq x \leq d$, assolutamente continue rispettivamente in (a, b) e (c, d) e appartenenti al campo A , cioè tali che i punti $[(x, z, y_1(x), y_2(x))]$ appartengano ad A , per cui esista finito secondo LEBESGUE l'integrale (1).

FÆDO ha dimostrato che (3):

Condizione necessaria perchè $I(y_1, y_2)$ sia semicontinuo inferiormente in tutto A (4) è che sia:

$$(a) \quad f_{y'_1 y'_1}(x, z, y_1, y_2, y'_1, y'_2) \geq 0; \quad f_{y'_2 y'_2}(x, z, y_1, y_2, y'_1, y'_2) \geq 0$$

per ogni y'_1 e y'_2 , in tutti i punti interni di A o di accumulazione di tali punti.

Di qui e dalle analoghe condizioni per la semicontinuità superiore si ricava che *condizione necessaria perchè $I(y_1, y_2)$ sia continuo in tutto A è che si abbia:*

(2) Parleremo sempre in questo lavoro di funzioni reali di variabili reali.

(3) Ved. luogo cit. per primo in (1) pag. 79.

(4) Cioè per ogni curva ordinaria $\bar{C}[\bar{y}_1(x), \bar{a} \leq x \leq \bar{b}; \bar{y}_2(x), \bar{c} \leq x \leq \bar{d}]$ preso $\varepsilon > 0$ ad arbitrio è possibile determinare un $\rho > 0$, in modo che per tutte le curve ordinarie $C[y_1(x), a \leq x \leq b; y_2(x), c \leq x \leq d]$ appartenenti propriamente all'intorno (ρ) di \bar{C} , cioè tali che $y_1(x)$ e $y_2(x)$ appartengano propriamente all'intorno (ρ) rispettivamente di $\bar{y}_1(x)$ e $\bar{y}_2(x)$, valga la:

$$I(y_1, y_2) > I(\bar{y}_1, \bar{y}_2) - \varepsilon.$$

$$(3) \quad f(x, z, y_1, y_2, y'_1, y'_2) = P(x, z, y_1, y_2) + Q(x, z, y_1, y_2) y'_1 + \\ + R(x, z, y_1, y_2) y'_1 + S(x, z, y_1, y_2) y'_1 y'_2$$

in tutti i punti interni di A e di accumulazione di tali punti ⁽⁵⁾.

Se ora si confronta $I(y_1, y_2)$ con l'integrale curvilineo

$$J(y) = \int_a^b F(x, y(x), y'(x)) dx$$

che si considera di solito nel Calcolo delle Variazioni, si osserva subito l'analogia ⁽⁶⁾ delle condizioni (α) con la condizione necessaria per la semicontinuità inferiore *in tutto il campo* per $J(y)$, che è data da ⁽⁷⁾:

$$(4) \quad F_{y' y'} \geq 0 .$$

Ed è noto che, interpretata geometricamente, la (4) dice che in ogni punto del campo *la figurativa* del problema deve essere una curva concava verso l'alto.

Ora la concavità della *figurativa* di $J(y)$ limita il comportamento della *figurativa* stessa all'infinito; in termini più precisi

⁽⁵⁾ Questa condizione, sotto certe altre ipotesi sulle funzioni P, Q, R, S , è anche sufficiente per la continuità (ved. S. FALDO: *Un nuovo tipo di funzionali continui* [Rend. di Mat. e delle sue appl. - 5 - IV - fasc. III e IV (1943)]).

⁽⁶⁾ Il confronto potrebbe essere fatto utilmente, per quello che diremo nel presente lavoro, anche con l'integrale doppio

$$J_{\Delta}(x) = \iint_{\Delta} \Phi \left(x, y, z(x, y), \frac{\delta z(x, y)}{\delta x}, \frac{\delta z(x, y)}{\delta y} \right) dx dy ,$$

ma in realtà mentre, come è apparso anche dall'ulteriore sviluppo dello studio di $I(y_1, y_2)$, c'è una notevole analogia tra $I(y_1, y_2)$ e $J(y)$, quella con $J_{\Delta}(x)$ è più che altro formale.

⁽⁷⁾ Ved. L. TONELLI: *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni* [(Bologna, 1921-23) vol. I. cap. X, pag. 369].

si osservi che dalla (4) discende, attraverso lo sviluppo del TAYLOR arrestato al secondo termine, la:

$$(5) \quad F(x, y, y') \geq P(x, y) + Q(x, y) y'$$

con $P(x, y) = F(x, y, 0)$, $Q(x, y) = F_{y'}(x, y, 0)$

e la (5) limita effettivamente il comportamento della *figurativa* per $y' \rightarrow \infty$; tra l'altro dalla (5) segue per $J(y)$, come nuova condizione necessaria per la semicontinuità inferiore, che deve essere verificata in ogni punto del campo e per ogni y' la:

$$(6) \quad \frac{F(x, y, y')}{\sqrt{1 + y'^2}} \geq -L(x, y)$$

dove $L(x, y)$ è un numero positivo che dipende solo da x e y .

Nel continuare, secondo il *metodo diretto del TONELLI*, le ricerche di FAEDO sul funzionale $I(y_1, y_2)$ ⁽⁸⁾, e precisamente nello studiare le condizioni sufficienti per la semicontinuità in *tutto il campo* di $I(y_1, y_2)$, io ho trovato utile, tenendo presente anche che la (3) dà la condizione necessaria e sufficiente per la continuità di $I(y_1, y_2)$ ⁽⁹⁾, introdurre la definizione di *integrale quasi-regolare positivo*, tale chiamando $I(y_1, y_2)$ se valgono le (α) e se inoltre esistono 4 funzioni $P(x, z, y_1, y_2)$, $Q(x, z, y_1, y_2)$, $R(x, z, y_1, y_2)$, $S(x, z, y_1, y_2)$ definite e continue in A , tali che in tutto A e per y'_1 e y'_2 qualunque sia verificata la:

$$(\beta) \quad f(x, z, y_1, y_2, y'_1, y'_2) \geq P + Qy'_1 + Ry'_2 + Sy'_1y'_2.$$

⁽⁸⁾ Ho studiato gli integrali di FUBINI-TONELLI in due memorie in corso di stampa sugli « Ann. Scuola Normale Sup. di Pisa » dal titolo: *Intorno agli integrali di Fubini-Tonelli: 1) Condizioni sufficienti per la semicontinuità; 2) Teoremi di esistenza dell'estremo*. In un prossimo lavoro mi occuperò delle equazioni di EULERO relative ai suddetti integrali.

⁽⁹⁾ Ved. nota ⁽⁵⁾.

A ciò sono stato condotto anche dall'aver dimostrato, con semplici esempi ⁽¹⁰⁾, che la (β) , la quale si presenta analoga alla (5) , non segue per nulla dalle (α) (contrariamente a quanto avviene per la (5) dalla (4)) e che inoltre le (α) da sole non sono sufficienti per la semicontinuità inferiore di $I(y_1, y_2)$, anche supponendo l'esistenza delle derivate parziali di tutti gli ordini della f (mentre invece è noto ⁽¹¹⁾ che la (4) , nell'ipotesi ulteriore della continuità di $F_{y',x}$, è anche sufficiente per la semicontinuità inferiore di $J(y)$).

In realtà le (α) , a differenza della (4) , non impongono una limitazione effettiva circa il comportamento all'infinito della *figurativa* ⁽¹²⁾ di $I(y_1, y_2)$; mentre una tale limitazione è imposta invece dalla (β) .

C'è dunque forse da *supporre che, oltre alle (α) , anche la (β) sia condizione necessaria per la semicontinuità inferiore di $I(y_1, y_2)$* ⁽¹³⁾.

In ogni caso si può cercare una *condizione necessaria del tipo della (6) che sia in relazione con la (β) come la (6) lo è con la (5)* .

Dimostrerò infatti nel numero seguente una tale condizione necessaria, aggiungendo però un'ipotesi restrittiva sulla funzione f .

2. - Precisamente vale il seguente

TEOREMA A: *Supposto che in ogni punto interno di $A(\bar{x}, \bar{y}_1, \bar{y}_2)$ la funzione f sia continua rispetto a (x, x, y_1, y_2) ,*

⁽¹⁰⁾ Ved. Memoria I citata in ⁽⁸⁾ cap. I, § 1, n. 2 e Memoria II, cap. I, § 1, n. 1.

⁽¹¹⁾ Ved. L. TONELLI, luogo citato in ⁽⁷⁾ vol. I, pagg. 392-400.

⁽¹²⁾ Per *figurativa* di $I(y_1, y_2)$ nel punto (x, x, y_1, y_2) di A si intende la superficie di equazione $v = f(x, x, y_1, y_2, y'_1, y'_2)$ nelle variabili indipendenti y'_1 e y'_2 .

⁽¹³⁾ Si osservi che a differenza delle (α) (e della (4)) la (β) non si presenta come una disuguaglianza verificata *puntualmente* dalla sola f e da certe sue derivate parziali (compaiono infatti in essa le funzioni P, Q, R, S); si potrebbe allora pensare, nella speranza di sostituire alla (β) una proposizione di più facile dimostrazione, di dedurre la (β) (così come si deduce la (5) dalla

uniformemente rispetto a y'_1 e y'_2 (cioè fissato $\sigma > 0$ ad arbitrio è possibile determinare un $\rho > 0$ tale che, per (x, z, y_1, y_2) distante da $(\bar{x}, \bar{z}, \bar{y}_1, \bar{y}_2)$ per non più di ρ si abbia, qualunque siano y'_1 e y'_2 :

$$|f(x, z, y_1, y_2, y'_1, y'_2) - f(\bar{x}, \bar{z}, \bar{y}_1, \bar{y}_2, y'_1, y'_2)| < \rho,$$

allora condizione necessaria per la semicontinuità inferiore in tutto A di $I(y_1, y_2)$ è che per ogni punto (x, z, y_1, y_2) interno di A esista un numero $L(x, z, y_1, y_2) > 0$ tale che per ogni y'_1 e y'_2 sia:

$$(7) \quad \frac{f(x, z, y_1, y_2, y'_1, y'_2)}{\sqrt{1 + y_1'^2} \sqrt{1 + y_2'^2}} > -L(x, z, y_1, y_2).$$

Infatti supponiamo per assurdo che esistano un punto $(\bar{x}, \bar{z}, \bar{y}_1, \bar{y}_2)$ interno di A e due successioni $\{y'_{1,n}\}$ e $\{y'_{2,n}\}$ per cui è:

(4), attraverso lo sviluppo del TAYLOR da una condizione puntuale espressa esclusivamente sulla f e sulle sue derivate: per es. da certe disuguaglianze sulle derivate seconde e terze della f ; ora attraverso lo sviluppo del TAYLOR arrestato al terzo termine, in virtù anche della (α), si ha:

$$\begin{aligned} f(x, z, y_1, y_2, y'_1, y'_2) &= f(x, z, y_1, y_2, 0, 0) + y'_1 f_{y'_1}(x, z, y_1, y_2, 0, 0) + \\ &+ y'_2 f_{y'_2}(x, z, y_1, y_2, 0, 0) + \frac{1}{2} y_1'^2 f_{y_1'^2}(x, z, y_1, y_2, 0, 0) + y'_1 y'_2 f_{y'_1 y'_2}(x, z, y_1, y_2, 0, 0) + \\ &+ \frac{1}{2} y_2'^2 f_{y_2'^2}(x, z, y_1, y_2, 0, 0) + R_3 \geq f(x, z, y_1, y_2, 0, 0) + y'_1 f_{y'_1}(x, z, y_1, y_2, 0, 0) + \\ &+ y'_2 f_{y'_2}(x, z, y_1, y_2, 0, 0) + y'_1 y'_2 f_{y'_1 y'_2}(x, z, y_1, y_2, 0, 0) + R_3 \end{aligned}$$

da cui, se il resto R_3 fosse ≥ 0 , si potrebbe dedurre la (β); ma non sembra possibile esprimere ciò attraverso delle condizioni puntuali sulle derivate terze di f .

$$(8) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(\bar{x}, \bar{x}, \bar{y}_1, \bar{y}_2, y'_{1,n}, y'_{2,n})}{\sqrt{1 + y'^2_{1,n}} \sqrt{1 + y'^2_{2,n}}} = -\infty.$$

Consideriamo la curva ordinaria $\bar{C}[\bar{y}_1, \bar{y}_2]$ composta dai due punti (\bar{x}, \bar{y}_1) e (\bar{x}, \bar{y}_2) . Risulta $I(\bar{y}_1, \bar{y}_2) = 0$ e preso $\epsilon > 0$ ad arbitrio, per la supposta semicontinuità inferiore, dovrà essere per ogni curva ordinaria $C[y_1(x), y_2(x)]$ appartenente propriamente ad un opportuno intorno (ρ_1) di \bar{C} (essendo $(\bar{x}, \bar{x}, \bar{y}_1, \bar{y}_2)$ interno ad A potremo anche far sì che ogni punto distante da $(\bar{x}, \bar{x}, \bar{y}_1, \bar{y}_2)$ al più di ρ_1 appartenga ad A):

$$I(y_1, y_2) > -\epsilon.$$

Si fissi ora un $\sigma > 0$ e < 1 e si determini, per l'ipotesi fatte, il numero $\rho > 0$ tale che per (x, x, y_1, y_2) distante da $(\bar{x}, \bar{x}, \bar{y}_1, \bar{y}_2)$ al più di ρ si abbia, qualunque siano y'_1 e y'_2 :

$$|f(x, x, y_1, y_2, y'_1, y'_2) - f(\bar{x}, \bar{x}, \bar{y}_1, \bar{y}_2, y'_1, y'_2)| < \sigma.$$

Sia $\rho_2 = \min.(\rho_1, \rho)$. Si prenda infine n sufficientemente grande perchè, in virtù della (8), sia:

$$\frac{f(\bar{x}, \bar{x}, \bar{y}_1, \bar{y}_2, y'_{1,n}, y'_{2,n})}{\sqrt{1 + y'^2_{1,n}} \sqrt{1 + y'^2_{2,n}}} < -\frac{\sigma}{\sqrt{1 + y'^2_{1,n}} \sqrt{1 + y'^2_{2,n}}} - \frac{\epsilon}{\rho_2^2}.$$

Si consideri allora la curva ordinaria $C_n \left[y_{1,n}(x) = \bar{y}_1 + y'_{1,n}(x - \bar{x}), \bar{x} \leq x \leq \bar{x} + \frac{\rho_2}{\sqrt{1 + y'^2_{1,n}}}; y_{2,n}(x) = \bar{y}_2 + y'_{2,n}(x - \bar{x}), \bar{x} \leq x \leq \bar{x} + \frac{\rho_2}{\sqrt{1 + y'^2_{2,n}}} \right]$. C_n appartiene all'intorno (ρ_2) di \bar{C} e dunque deve essere:

$$(9) \quad I(y_{1,n}, y_{2,n}) > -\epsilon.$$

D'altra parte è :

$$\begin{aligned}
 I(y_{1,n}, y_{2,n}) &= \\
 &= \int_{\bar{x}}^{\bar{x} + \frac{\rho_2}{\sqrt{1 + y_{1,n}'^2}}} \int_{\bar{z}}^{\bar{z} + \frac{\rho_2}{\sqrt{1 + y_{2,n}'^2}}} f(x, z, y_{1,n}(x), y_{2,n}(z), y_{1,n}', y_{2,n}') dx dz \leq \\
 &\leq \int_{\bar{x}}^{\bar{x} + \frac{\rho_2}{\sqrt{1 + y_{1,n}'^2}}} \int_{\bar{z}}^{\bar{z} + \frac{\rho_2}{\sqrt{1 + y_{2,n}'^2}}} [f(\bar{x}, \bar{z}, \bar{y}_1, \bar{y}_2, y_{1,n}', y_{2,n}') + \sigma] dx dz = \\
 &= \frac{f(\bar{x}, \bar{z}, \bar{y}_1, \bar{y}_2, y_{1,n}', y_{2,n}') \cdot \rho_2^2}{\sqrt{1 + y_{1,n}'^2} \cdot \sqrt{1 + y_{2,n}'^2}} + \frac{\sigma \cdot \rho_2^2}{\sqrt{1 + y_{1,n}'^2} \cdot \sqrt{1 + y_{2,n}'^2}} < -\varepsilon
 \end{aligned}$$

in contraddizione con la (9) ⁽¹⁴⁾.

3. - Passiamo ora ad $I(y)$. La funzione $f(x, z, y_1, y_2, y_1', y_2')$ si suppone definita per ogni coppia di punti (x, y_1) e (z, y_2) di un campo piano A , che contenga tutti i propri punti di accumulazione posti al finito, e per ogni valore di y_1' e y_2' , e continua insieme alle sue derivate parziali $f_{y_1'}, f_{y_2'}, f_{y_1' y_1'}, f_{y_2' y_2}'$ in ogni punto $(x, z, y_1, y_2, y_1', y_2')$ in cui è definita; si suppone

(14) Si osservi che nella dimostrazione del Teorema A non si sono sfruttate le ipotesi dell'esistenza e della continuità delle $f_{y_1'}, f_{y_2'}, f_{y_1' y_1'}, f_{y_2' y_2}'$, ma solo l'uniforme continuità della f .

inoltre ⁽¹⁵⁾ che soddisfi alla

$$(10) \quad f(x, z, y_1, y_2, y'_1, y'_2) = f(x, x, y_2, y_1, y'_2, y'_1) .$$

Dicesi *curva ordinaria* C ogni funzione assolutamente continua $y = y(x)$, $a \leq x \leq b$, appartenente ad A , per cui esiste finito secondo LEBESGUE l'integrale (2).

FAEDO ha dimostrato che:

Condizione necessaria perchè $I(y)$ sia semicontinuo inferiormente in tutto A è che sia:

$$(\alpha') \quad f_{y'_1 y'_1}(x, x, y, y, y', y') \geq 0$$

$$(e \text{ quindi anche, per la (10), } f_{y'_2 y'_2}(x, x, y, y, y', y') \geq 0)$$

per ogni y' e in ogni punto (x, y) interno di A e di accumulazione di tali punti ⁽¹⁶⁾.

⁽¹⁵⁾ Questa ipotesi non è restrittiva, perchè se non fosse verificata, basterebbe sostituire la f con la funzione:

$$\bar{f}(x, z, y_1, y_2, y'_1, y'_2) = \frac{f(x, z, y_1, y_2, y'_1, y'_2) + f(x, x, y_2, y_1, y'_2, y'_1)}{2}$$

essendo evidentemente:

$$\int_a^b \int_a^b f(x, z, y(x), y(x), y'(x), y'(x)) dx dz = \int_a^b \int_a^b \bar{f}(x, z, y(x), y(x), y'(x), y'(x)) dx dz .$$

⁽¹⁶⁾ Ved. luogo citato per primo in ⁽¹⁾ pag. 95. Lo studio delle condizioni necessarie per la semicontinuità di $I(y)$, come ha messo in rilievo FAEDO, presenta difficoltà maggiori di quelle relative ad $I(y_1, y_2)$; non si possono dare delle condizioni *puntuali* più espresse della (α') (non valgono per es. le (α)), bensì solo delle condizioni *globali*, sulle quali però io non mi soffermo. Mi basta solo notare che la nuova condizione necessaria che enuncio col prossimo *Teorema B* non segue nè dalla (α') , nè tanto meno dalle altre condizioni *globali* date da FAEDO (Ved. luogo citato per primo in ⁽¹⁾, pag. 116).

Lo stesso ragionamento del numero 2 ci permette ora di dimostrare che accanto alle (α') vale anche il seguente

TEOREMA B: *Supposto che in ogni punto interno di A (\bar{x}, \bar{y}) la funzione f sia continua rispetto a (x, x, y_1, y_2) , uniformemente rispetto a y' (cioè fissato $\sigma > 0$ ad arbitrio è possibile determinare un $\rho > 0$, tale che, per (x, y_1) e (x, y_2) distanti da (\bar{x}, \bar{y}) al più di ρ , si abbia, qualunque sia y' :*

$$|f(x, x, y_1, y_2, y', y') - f(\bar{x}, \bar{x}, \bar{y}, \bar{y}, y', y')| < \sigma ,$$

allora condizione necessaria per la semicontinuità inferiore di $I(y)$ in tutto A è che per ogni punto (x, y) interno di A esista un numero $L(x, y) > 0$, tale che per ogni y' sia:

$$\frac{f(x, x, y, y, y', y')}{1 + y'^2} \geq -L(x, y) .$$