RENDICONTI
*del*
SEMINARIO MATEMATICO
*della*
UNIVERSITÀ DI PADOVA

ENRICO MAGENES

# Un'osservazione sulle condizioni necessarie per la semicontinuità degli integrali di Fubini-Tonelli

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*, tome 19 (1950), p. 44-53

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1950__19__44_0>

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1950, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (http://rendiconti.math.unipd.it/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/legal.php). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
*Article numérisé dans le cadre du programme*
*Numérisation de documents anciens mathématiques*
http://www.numdam.org/

# UN'OSSERVAZIONE SULLE CONDIZIONI NECESSARIE PER LA SEMICONTINUITÀ DEGLI INTEGRALI DI FUBINI-TONELLI

*Nota* (*) *di* ENRICO MAGENES (*a Padova*).

Scopo di questa breve Nota è di far conoscere alcune considerazioni sulle condizioni necessarie per la semicontinuità degli integrali di FUBINI-TONELLI, che ritengo utili per chiarire l'ulteriore sviluppo della teoria di questo capitolo del Calcolo delle Variazioni.

Riprendendo i lavori di G. FUBINI e di L. TONELLI, S. FAEDO [1] ha studiato le condizioni necessarie per la semicontinuità degli integrali, da lui chiamati di FUBINI-TONELLI:

$$(1)\qquad I(y_1, y_2) = \int_a^b\int_c^d f(x, z, y_1(x), y_2(z), y_1'(x), y_2'(z))\, dx\, dz\,,$$

$$(2)\qquad I(y) = \int_a^b\int_a^b f(x, z, y(x), y(z), y'(x), y'(z))\, dx\, dz\,.$$

Egli ha considerato sia la semicontinuità *in tutto il campo* che quella su una data curva; io voglio qui riprendere in considerazione il primo tipo di problema.

(*) Pervenuta in Redazione il 10 luglio 1949.

[1] S. FAEDO: 1) *Condizioni necessarie per la semicontinuità di un nuovo tipo di funzionali* (Ann. di mat. pura e appl. (4) - XXIII - 1944 - pp. 69–121); 2) *Sulle condizioni di Legendre e di Weierstrass per gli integrali di Fubini–Tonelli* (Lit. Tacchi - Pisa - 1946).

**1.** - Richiamo anzitutto le definizioni e i risultati noti circa $I(y_1, y_2)$.

La funzione $f(x, z, y_1, y_2, y_1', y_2')$ (2) si suppone di solito definita per tutti i punti $(x, z, y_1, y_2)$ di un *campo* $A$ dello spazio $(x, z, y_1, y_2)$ che contenga tutti i propri punti di accumulazione posti al finito, e per ogni valore di $y_1'$ e $y_2'$, e continua insieme alle sue derivate parziali $f_{y_1'}, f_{y_2'}, f_{y_1' y_1'}, f_{y_2' y_2'}$ in ogni $(x, z, y_1, y_2, y_1', y_2')$ in cui è definita. Dicesi *curva ordinaria* $C$ ogni coppia di funzioni $y_1(x)$, $a \leq x \leq b$, $y_2(z)$, $c \leq z \leq d$, assolutamente continue rispettivamente in $(a, b)$ e $(c, d)$ e appartenenti al campo $A$, cioè tali che i punti $[(x, z, y_1(x), y_2(z)]$ appartengano ad $A$, per cui esista finito secondo LEBESGUE l'integrale (1).

FAEDO ha dimostrato che (3):

*Condizione necessaria perchè $I(y_1, y_2)$ sia semicontinuo inferiormente in tutto A* (4) *è che sia:*

$$(\alpha) \qquad f_{y_1' y_1'}(x, z, y_1, y_2, y_1', y_2') \geq 0 \, ; \quad f_{y_2' y_2'}(x, z, y_1, y_2, y_1', y_2') \geq 0$$

*per ogni $y_1'$ e $y_2'$, in tutti i punti interni di A o di accumulazione di tali punti.*

Di qui e dalle analoghe condizioni per la semicontinuità superiore si ricava che *condizione necessaria perchè $I(y_1, y_2)$ sia continuo in tutto A è che si abbia:*

(2) Parleremo sempre in questo lavoro di funzioni reali di variabili reali.

(3) Ved. luogo cit. per primo in (1) pag. 79.

(4) Cioè per ogni curva ordinaria $\bar{C}[\bar{y}_1(x),\ \bar{a} \leq x \leq \bar{b};\ \bar{y}_2(z),\ \bar{c} \leq z \leq \bar{d}]$ preso $\varepsilon > 0$ ad arbitrio è possibile determinare un $\rho > 0$, in modo che per tutte le curve ordinarie $C[y_1(x),\ a \leq x \leq b;\ y_2(z),\ c \leq z \leq d]$ *appartenenti propriamente* all'intorno $(\rho)$ di $\bar{C}$, cioè tali che $y_1(x)$ e $y_2(z)$ *appartengano propriamente* all'intorno $(\rho)$ rispettivamente di $\bar{y}_1(x)$ e $\bar{y}_2(z)$, valga la:

$$I(y_1, y_2) > I(\bar{y}_1, \bar{y}_2) - \varepsilon \, .$$

$$(3)\quad f(x, z, y_1, y_2, y_1', y_2') = P(x, z, y_1, y_2) + Q(x, z, y_1, y_2)\, y_1' + \\ + R(x, z, y_1, y_2)\, y_1' + S(x, z, y_1, y_2)\, y_1' y_2'$$

*in tutti i punti interni di A e di accumulazione di tali punti* (5).

Se ora si confronta $I(y_1, y_2)$ con l'integrale curvilineo

$$J(y) = \int_a^b F(x, y(x), y'(x))\, dx$$

che si considera di solito nel Calcolo delle Variazioni, si osserva subito l'analogia (6) delle condizioni ($\alpha$) con la condizione necessaria per la semicontinuità inferiore *in tutto il campo* per $J(y)$, che è data da (7):

$$(4)\qquad F_{y'y'} \geq 0 \ .$$

Ed è noto che, interpretata geometricamente, la (4) dice che in ogni punto del campo *la figurativa* del problema deve essere una curva concava verso l'alto.

Ora la concavità della *figurativa* di $J(y)$ limita il comportamento della *figurativa* stessa all'infinito; in termini più precisi

(5) Questa condizione, sotto certe altre ipotesi sulle funzioni $P, Q, R, S$, è anche sufficiente per la continuità (ved. S. FAEDO: *Un nuovo tipo di funzionali continui* [Rend. di Mat. e delle sue appl. - 5 - IV - fasc. III e IV (1943)]).

(6) Il confronto potrebbe essere fatto utilmente, per quello che diremo nel presente lavoro, anche con l'integrale doppio

$$J_\Delta(z) = \iint_\Delta \Phi\left(x, y, z(x, y), \frac{\delta z(x, y)}{\delta x}, \frac{\delta z(w, y)}{\delta y}\right) dx\, dy \ ,$$

ma in realtà mentre, come è apparso anche dall'ulteriore sviluppo dello studio di $I(y_1, y_2)$, c'è una notevole analogia tra $I(y_1, y_2)$ e $J(y)$, quella con $J_\Delta(z)$ è più che altro formale.

(7) Ved. L. TONELLI: *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni* [(Bologna, 1921-23) vol. I. cap. X, pag. 369].

si osservi che dalla (4) discende, attraverso lo sviluppo del TAYLOR arrestato al secondo termine, la:

$$(5) \qquad F(x, y, y') \geq P(x, y) + Q(x, y)\, y'$$

$$\text{con } P(x, y) = F(x, y, o), \; Q(x, y) = F_{y'}(x, y, o)$$

e la (5) limita effettivamente il comportamento della *figurativa* per $y' \to \infty$; tra l'altro dalla (5) segue per $J(y)$, come nuova condizione necessaria per la semicontinuità inferiore, che deve essere verificata in ogni punto del campo e per ogni $y'$ la:

$$(6) \qquad \frac{F(x, y, y')}{\sqrt{1 + y'^2}} \geq -L(x, y)$$

dove $L(x, y)$ è un numero positivo che dipende solo da $x$ e $y$.

Nel continuare, secondo il *metodo diretto del* TONELLI, le ricerche di FAEDO sul funzionale $I(y_1, y_2)$ [8], e precisamente nello studiare le condizioni sufficienti per la semicontinuità in *tutto il campo* di $I(y_1, y_2)$, io ho trovato utile, tenendo presente anche che la (3) dà la condizione necessaria e sufficiente per la continuità di $I(y_1, y_2)$ [9], introdurre la definizione di *integrale quasi-regolare positivo*, tale chiamando $I(y_1, y_2)$ se valgono le ($\alpha$) e se inoltre esistono 4 funzioni $P(x, z, y_1, y_2)$, $Q(x, z, y_1, y_2)$, $R(x, z, y_1, y_2)$, $S(x, z, y_1, y_2)$ definite e continue in $A$, tali che in tutto $A$ e per $y_1'$ e $y_2'$ qualunque sia verificata la:

$$(\beta) \qquad f(x, z, y_1, y_2, y_1', y_2') \geq P + Q y_1' + R y_2' + S y_1' y_2' .$$

[8] Ho studiato gli integrali di FUBINI–TONELLI in due memorie in corso di stampa sugli « Ann. Scuola Normale Sup. di Pisa » dal titolo: *Intorno agli integrali di Fubini-Tonelli: 1) Condizioni sufficienti per la semicontinuità; 2) Teoremi di esistenza dell'estremo*. In un prossimo lavoro mi occuperò delle equazioni di EULERO relative ai suddetti integrali.

[9] Ved. nota [5].

A ciò sono stato condotto anche dall'aver dimostrato, con semplici esempi [10], che la ($\beta$), la quale si presenta analoga alla (5), non segue per nulla dalle ($\alpha$) (contrariamente a quanto avviene per la (5) dalla (4)) e che inoltre le ($\alpha$) da sole non sono sufficienti per la semicontinuità inferiore di $I(y_1, y_2)$, anche supponendo l'esistenza delle derivate parziali di tutti gli ordini della $f$ (mentre invece è noto [11] che la (4), nell'ipotesi ulteriore della continuità di $F_{y'x}$, è anche sufficiente per la semicontinuità inferiore di $J(y)$).

In realtà le ($\alpha$), a differenza della (4), non impongono una limitazione effettiva circa il comportamento all'infinito della *figurativa* [12] di $I(y_1, y_2)$; mentre una tale limitazione è imposta invece dalla ($\beta$).

C'è dunque forse da *supporre che, oltre alle* ($\alpha$), *anche la* ($\beta$) *sia condizione necessaria per la semicontinuità inferiore di* $I(y_1, y_2)$ [13].

In ogni caso si può cercare una *condizione necessaria del tipo della* (6) *che sia in relazione con la* ($\beta$) *come la* (6) *lo è con la* (5).

Dimostrerò infatti nel numero seguente una tale condizione necessaria, aggiungendo però un'ipotesi restrittiva sulla funzione $f$.

**2.** – Precisamente vale il seguente

TEOREMA $A$: *Supposto che in ogni punto interno di* $A(\overline{x}, \overline{z}, \overline{y}_1, \overline{y}_2)$ *la funzione* $f$ *sia continua rispetto a* $(x, z, y_1, y_2)$,

(10) Ved. Memoria I citata in (8) cap. I, § 1, n. 2 e Memoria II, cap. I, § 1, n. 1.

(11) Ved. L. TONELLI, luogo citato in (7) vol. I, pagg. 392–400.

(12) Per *figurativa* di $I(y_1, y_2)$ nel punto $(x, z, y_1, y_2)$ di $A$ si intende la superficie di equazione $v = f(x, z, y_1, y_2, y_1', y_2')$ nelle variabili indipendenti $y_1'$ e $y_2'$.

(13) Si osservi che a differenza delle ($\alpha$) (e della (4)) la ($\beta$) non si presenta come una disuguaglianza verificata *puntualmente* dalla sola $f$ e da certe sue derivate parziali (compaiono infatti in essa le funzioni $P$, $Q$, $R$, $S$); si potrebbe allora pensare, nella speranza di sostituire alla ($\beta$) una proposizione di più facile dimostrazione, di dedurre la ($\beta$) (così come si deduce la (5) dalla

*uniformemente rispetto a* $y'_1$ *e* $y'_2$ (cioè fissato $\sigma > o$ ad arbitrio è possibile determinare un $\rho > o$ tale che, per $(x, z, y_1, y_2)$ distante da $(\bar{x}, \bar{z}, \bar{y}_1, \bar{y}_2)$ per non più di $\rho$ si abbia, *qualunque* siano $y'_1$ e $y'_2$:

$$| f(x, z, y_1, y_2, y'_1, y'_2) - f(\bar{x}, \bar{z}, \bar{y}_1, \bar{y}_2, y'_1, y'_2) | < \rho) ,$$

*allora condizione necessaria per la semicontinuità inferiore in tutto A di* $I(y_1, y_2)$ *è che per ogni punto* $(x, z, y_1, y_2)$ *interno di A esista un numero* $L(x, z, y_1, y_2) > o$ *tale che per ogni* $y'_1$ *e* $y'_2$ *sia:*

$$\frac{f(x, z, y_1, y_2, y'_1, y'_2)}{\sqrt{1+y_1'^2}\sqrt{1+y_2'^2}} > -L(x, z, y_1, y_2) . \tag{7}$$

Infatti supponiamo per assurdo che esistano un punto $(\bar{x}, \bar{z}, \bar{y}_1, \bar{y}_2)$ interno di $A$ e due successioni $\{y'_{1,n}\}$ e $\{y'_{2,n}\}$ per cui è:

(4), attraverso lo sviluppo del Taylor) da una condizione puntuale espressa esclusivamente sulla $f$ e sulle sue derivate: per es. da certe disuguaglianze sulle derivate seconde e terze della $f$; ora attraverso lo sviluppo del Taylor arrestato al terzo termine, in virtù anche della ($\alpha$), si ha:

$$f(x, z, y_1, y_2, y'_1, y'_2) = f(x, z, y_1, y_2, o,o) + y'_1 f_{y'_1}(x, z, y_1, y_2, o,o) +$$
$$+ y'_2 f_{y'_2}(x,z,y_1,y_2, o,o) + \frac{1}{2} y_1'^2 f_{y'_1 y'_1}(x,z,y_1,y_2,o,o) + y'_1 y'_2 f_{y'_1 y'_2}(x,z,y_1, y_2, o,o) +$$
$$+ \frac{1}{2} y_2'^2 f_{y'_2 y'_2}(x, z, y_1, y_2, o,o) + R_3 \geq f(x, z, y_1, y_2,o,o) + y'_1 f_{y'_1}(x,z,y_1, y_2, o,o) +$$
$$+ y'_2 f_{y'_2}(x, z, y_1 y_2, o,o) + y'_1 y'_2 f_{y'_1 y'_2}(x, z, y_1 y_2, o,o) + R_3$$

da cui, se il resto $R_3$ fosse $\geq 0$, si potrebbe dedurre la ($\beta$); ma non sembra possibile esprimere ciò attraverso delle condizioni puntuali sulle derivate terze di $f$.

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{f(\overline{x}, \overline{z}, \overline{y}_1, \overline{y}_2, y'_{1,n}, y'_{2,n})}{\sqrt{1 + y'^2_{1,n}} \sqrt{1 + y'^2_{2,n}}} = -\infty . \tag{8}$$

Consideriamo la curva ordinaria $\overline{C}[\overline{y}_1, \overline{y}_2]$ composta dai due punti $(\overline{x}, \overline{y}_1)$ e $(\overline{z}, \overline{y}_2)$. Risulta $I(\overline{y}_1, \overline{y}_2) = 0$ e preso $\varepsilon > o$ ad arbitrio, per la supposta semicontinuità inferiore, dovrà essere per ogni curva ordinaria $C[y_1(x), y_2(z)]$ appartenente propriamente ad un opportuno intorno $(\rho_1)$ di $C$ (essendo $(\overline{x}, \overline{z}, \overline{y}_1, \overline{y}_2)$ interno ad $A$ potremo anche far sì che ogni punto distante da $(\overline{x}, \overline{z}, \overline{y}_1, \overline{y}_2)$ al più di $\rho_1$ appartenga ad $A$):

$$I(y_1, y_2) > -\varepsilon .$$

Si fissi ora un $\sigma > o$ e $< 1$ e si determini, per l'ipotesi fatte, il numero $\rho > o$ tale che per $(x, z, y_1, y_2)$ distante da $(\overline{x}, \overline{z}, \overline{y}_1, \overline{y}_2)$ al più di $\rho$ si abbia, *qualunque* siano $y'_1$ e $y'_2$:

$$| f(x, z, y_1, y_2, y'_1, y'_2) - f(\overline{x}, \overline{z}, \overline{y}_1, \overline{y}_2, y'_1, y'_2) | < \sigma .$$

Sia $\rho_2 = min. (\rho_1, \rho)$. Si prenda infine $n$ sufficientemente grande perchè, in virtù della (8), sia:

$$\frac{f(\overline{x}, \overline{z}, \overline{y}_1, \overline{y}_2, y'_{1,n}, y'_{2,n})}{\sqrt{1 + y'^2_{2,n}} \sqrt{1 + y'^2_{2,n}}} < - \frac{\sigma}{\sqrt{1 + y'^2_{2,n}} \sqrt{1 + y'^2_{2,n}}} - \frac{\varepsilon}{\rho_2^2} .$$

Si consideri allora la curva ordinaria $C_n \Big[ y_{1,n}(x) = \overline{y}_1 + y'_{1,n}(x - \overline{x}), \overline{x} \leq x \leq \overline{x} + \frac{\rho_2}{\sqrt{1 + y'^2_{1,n}}} ; y_{2,n}(z) = \overline{y}_2 + y'_{2,n}(z - \overline{z}), \overline{z} \leq z \leq \overline{z} + \frac{\rho_2}{\sqrt{1 + y'^2_{2,n}}} \Big]$. $C_n$ appartiene all'intorno $(\rho_2)$ di $\overline{C}$ e dunque deve essere:

$$I(y_{1,n}, y_{2,n}) > -\varepsilon . \tag{9}$$

D' altra parte è:

$$I(y_{1,n}, y_{2,n}) =$$

$$= \int_{\bar{x}}^{\bar{x}+\frac{\rho_2}{\sqrt{1+y'^2_{1,n}}}} \int_{\bar{z}}^{\bar{z}+\frac{\rho_2}{\sqrt{1+y'^2_{2,n}}}} f(x, z, y_{1,n}(x), y_{2,n}(z), y'_{1,n}, y'_{2,n})\, dx\, dz \leq$$

$$\leq \int_{\bar{x}}^{\bar{x}+\frac{\rho_2}{\sqrt{1+y'^2_{1,n}}}} \int_{\bar{z}}^{\bar{z}+\frac{\rho_2}{\sqrt{1+y'^2_{2,n}}}} [f(\bar{x}, \bar{z}, \bar{y}_1, \bar{y}_2, y'_{1,n}, y'_{2,n}) + \sigma]\, dx\, dz =$$

$$= \frac{f(\bar{x}, \bar{z}, \bar{y}_1, \bar{y}_2, y'_{1,n}, y'_{2,n}) \cdot \rho_2^2}{\sqrt{1+y'^2_{1,n}} \cdot \sqrt{1+y'^2_{2,n}}} + \frac{\sigma \cdot \rho_2^2}{\sqrt{1+y'^2_{1,n}} \cdot \sqrt{1+y'^2_{2,n}}} < -\varepsilon$$

in contraddizione con la (9) [14].

**3.** – Passiamo ora ad $I(y)$. La funzione $f(x, z, y_1, y_2, y'_1, y'_2)$ si suppone definita per ogni coppia di punti $(x, y_1)$ e $(z, y_2)$ di un *campo piano* $A$, che contenga tutti i propri punti di accumulazione posti al finito, e per ogni valore di $y'_1$ e $y'_2$, e continua insieme alle sue derivate parziali $f_{y'_1}, f_{y'_2}, f_{y'_1 y'_1}, f_{y'_2 y'_2}$ in ogni punto $(x, z, y_1, y_2, y'_1, y'_2)$ in cui è definita; si suppone

(14) Si osservi che nella dimostrazione del Teorema $A$ non si sono sfruttate le ipotesi dell' esistenza e della continuità delle $f_{y'_1}, f_{y'_2}, f_{y'_1 y'_1}, f_{y'_2 y'_2}$, ma solo l' *uniforme* continuità della $f$.

inoltre [15] che soddisfi alla

$$f(x, z, y_1, y_2, y_1', y_2') = f(z, x, y_2, y_1, y_2', y_1') \,. \tag{10}$$

Dicesi *curva ordinaria* $C$ ogni funzione assolutamente continua $y = y(x)$, $a \leq x \leq b$, appartenente ad $A$, per cui esiste finito secondo LEBESGUE l'integrale (2).

FAEDO ha dimostrato che:

*Condizione necessaria perchè $I(y)$ sia semicontinuo inferiormente in tutto $A$ è che sia:*

$$f_{y_1' y_1'}(x, x, y, y, y', y') \geq 0 \tag{$\alpha'$}$$

(e quindi anche, per la (10), $f_{y_2' y_2'}(x, x, y, y, y', y') \geq 0$)

*per ogni $y'$ e in ogni punto $(x, y)$ interno di $A$ e di accumulazione di tali punti* [16].

[15] Questa ipotesi non è restrittiva, perchè se non fosse verificata, basterebbe sostituire la $f$ con la funzione:

$$\bar{f}(x, z, y_1, y_2, y_1', y_2') = \frac{f(x, z, y_1, y_2, y_1', y_2') + f(z, x, y_2, y_1, y_2', y_1')}{2}$$

essendo evidentemente:

$$\int_a^b\!\!\int_a^b f(x, z, y(x), y(z), y'(x), y'(z))\, dx\, dz = \int_a^b\!\!\int_a^b \bar{f}(x, z, y(x), y(z), y'(x), y'(z))\, dx\, dz.$$

[16] Ved. luogo citato per primo in [1] pag. 95. Lo studio delle condizioni necessarie per la semicontinuità di $I(y)$, come ha messo in rilievo FAEDO, presenta difficoltà maggiori di quelle relative ad $I(y_1, y_2)$; non si possono dare delle condizioni *puntuali* più espressive della $(\alpha')$ (non valgono per es. le $(\alpha)$), bensì solo delle condizioni *globali*, sulle quali però io non mi soffermo. Mi basta solo notare che la nuova condizione necessaria che enuncio col prossimo *Teorema B* non segue nè dalla $(\alpha')$, nè tanto meno dalle altre condizioni *globali* date da FAEDO (Ved. luogo citato per primo in [1], pag. 116).

Lo stesso ragionamento del numero 2 ci permette ora di dimostrare che accanto alle $(\alpha')$ vale anche il seguente

Teorema $B$: *Supposto che in ogni punto interno di* $A$ $(\bar{x}, \bar{y})$ *la funzione* $f$ *sia continua rispetto a* $(x, z, y_1, y_2)$, *uniformemente rispetto a* $y'$ (cioè fissato $\sigma > o$ ad arbitrio è possibile determinare un $\rho > o$, tale che, per $(x, y_1)$ e $(z, y_2)$ distanti da $(\bar{x}, \bar{y})$ al più di $\rho$, si abbia, *qualunque* sia $y'$:

$$| f(x, z, y_1, y_2, y', y') - f(\bar{x}, \bar{x}, \bar{y}, \bar{y}, y', y') | < \sigma) \ ,$$

*allora condizione necessaria per la semicontinuità inferiore di* $I(y)$ *in tutto* $A$ *è che per ogni punto* $(x, y)$ *interno di* $A$ *esista un numero* $L(x, y) > o$, *tale che per ogni* $y'$ *sia:*

$$\frac{f(x, x, y, y, y', y')}{1 + y'^2} \geq - L(x, y) \ .$$