Rendiconti
del
Seminario Matematico
della
Università di Padova

Renato Nardini

Sulla linea elastica di una trave pressoinflessa in presenza di fenomeni ereditari

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 20 (1951), p. 286-298

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1951__20__286_0>

SULLA LINEA ELASTICA DI UNA TRAVE PRESSO-INFLESSA IN PRESENZA DI FENOMENI EREDITARI

Nota (*) *di* RENATO NARDINI (*a Ferrara*).

1. INTRODUZIONE. - In un precedente lavoro (1) ho dimostrato l'esistenza e l'unicità della soluzione (continua) dell'equazione funzionale

$$(1) \qquad \eta(x, t) = f(x, t) + \lambda \int_0^l K(x, t, \xi)\, \eta(\xi, t)\, d\xi + \\ + A\left[x, t, \eta(\overset{l}{\underset{0}{\xi}}, \overset{t}{\underset{0}{\tau}})\right]$$

nella funzione incognita $\eta(x, t)$, con $f(x, t)$ e $K(x, t, \xi)$ funzioni note continue per $0 \leq x, \xi \leq l$ (con l finito positivo) e $0 \leq t \leq 1$, con λ non autovalore del nucleo $K(x, t, \xi)$, mentre il funzionale

$$A\left[x, t, \eta(\overset{l}{\underset{0}{\xi}}, \overset{t}{\underset{0}{\tau}})\right]$$

sta a indicare un numero reale dipendente, secondo una data legge, da x, t - variabili rispettivamente in $(0, l)$ e in $(0, 1)$ - e dai valori che la funzione $\eta(\xi, \tau)$, supposta continua è perciò limitata, assume per $0 \leq \xi \leq l$, $0 \leq \tau \leq t$; le condizioni a cui si suppone sottoposto tale funzionale saranno riportate in seguito.

In questa nota intendo mostrare un'applicazione del precedente risultato ad un problema di elasticità ereditaria, già trattato,

(*) Pervenuta in Redazione il 9 marzo 1951.

(1) R. NARDINI: *Studio e risoluzione di un' equazione funzionale del tipo misto*, Ann. della Scuola Norm. Sup. di Pisa. Serie II, Vol. IX (1940).

sotto condizioni più particolari, da G. KRALL [2]. Più precisamente KRALL ha studiato la linea elastica di una trave presso-inflessa, limitandosi però al caso dell'ereditarietà avente carattere lineare. Nella presente nota si suppone invece l'ereditarietà di tipo qualsiasi e si dimostra l'esistenza e l'unicità della soluzione del problema al contorno che fornisce in tale caso la linea elastica suddetta [3].

2. - Caso non ereditario con solo carico assiale. - Per impostare il problema enunciato è utile rifarsi dal caso non ereditario relativo a una trave di lunghezza l incernierata agli estremi e soggetta a un carico assiale P espresso da una funzione continua positiva dell'ascissa x [4] del punto della trave; detto $\bar{P}$ il suo massimo valore, scriveremo tale funzione sotto la forma

$$P(x) = \bar{P} p(x)$$

dove ovviamente è $0 < p(x) \leq 1$.

L'equazione della linea elastica $\eta = \eta(x)$ assunta dalla trave ha, come è noto [5], la forma

$$\frac{d^2 \eta(x)}{d x^2} + \frac{\bar{P}}{EJ} p(x)\, \eta(x) = 0 \tag{2}$$

dove E è il modulo di elasticità del materiale di cui è costituita la trave e J il momento d'inerzia (supposto costante) di una

(2) G. KRALL: *Statica dei mezzi elastici cosidetti «viscosi» e sue applicazioni.* Note I e II, Rend. Acc. Naz. dei Lincei, Serie VIII, Vol. II, (1947).

(3) Un'altra differenza fra la trattazione di KRALL e la presente è che KRALL considera il carico assiale variabile solo con l'ascissa del punto, qui invece lo si considera variabile anche col tempo.

(4) Ci si intende riferire a un sistema di coordinate cartesiane avente origine in un estremo della trave e l'asse x orientato verso l'altro estremo.

(5) Si veda ad es. O. BELLUZZI: *Scienza delle Costruzioni*, Vol I. Cap. XIII. Bologna, Zanichelli (1950).

sezione rispetto all'asse neutro; l'ipotesi introdotta per gli estremi della trave impone inoltre alla $\eta(x)$ le condizioni al contorno

$$\eta(0) = \eta(l) = 0 . \tag{3}$$

È noto inoltre che detta $G(x, \xi)$ (6) la funzione di Green relativa al problema al contorno costituito dall'equazione $\frac{d^2\eta}{dx^2} = 0$ e dalle (3), il problema al contorno (2) e (3) si riconduce all'equazione integrale

$$\eta(x) = \frac{\bar{P}}{EJ}\int_0^l G(x, \xi)\, p(\xi)\, \eta(\xi)\, d\xi$$

che ha una ed una sola soluzione non identicamente nulla (determinata a meno di una costante moltiplicativa) se e solo se $\frac{\bar{P}}{EJ}$ è autovalore del nucleo $G(x, \xi)\, p(\xi)$.

In base ad un noto teorema (7) tale nucleo ha autovalori maggiori o uguali degli autovalori di $G(x, \xi)$, quindi è esclusa l'esistenza di autovalori per

$$\bar{P} < \frac{\pi^2}{l^2} EJ . \tag{4}$$

(6) Tale $G(x, \xi)$ è data dalle formule

$$G(x, \xi) = \frac{l - \xi}{l}\, x \quad \text{per } x \leq \xi$$

$$G(x, \xi) = \frac{l - x}{l}\, \xi \quad \text{»} \ \xi \leq x ;$$

essa risulta sempre $< l$ e, considerata quale nucleo di un'equazione integrale, ha per autovalori i numeri $\frac{n^2 \pi^2}{l^2}$ $(n = 1, 2 \ldots)$.

(7) F. Tricomi: *Equazioni differenziali*, Cap III, § 9, Torino, Einaudi (1948).

3. – Caso ereditario. – Ammettiamo ora che sulla trave, oltre al carico assiale P, agisca un carico trasversale ripartito e che entrambi risultino variabili col tempo abbastanza lentamente in modo da poter trascurare fenomeni dinamici. Il carico assiale sia rappresentato dalla funzione $P(x, t)$ continua e positiva che potremo scrivere anche sotto la forma $\bar{P} p(x, t)$, dove supporremo che $\bar{P}$ (avente qui il significato di massimo valore per ogni x e ogni t considerati) soddisfi la (4). Il carico trasversale, in assenza di altre forze, determini, all'istante t e nel punto di ascissa x della trave, il momento flettente $M_0(x, t)$, essendo $M_0(x, t)$ una funzione continua assegnata con le ovvie condizioni $M_0(0, t) = M_0(l, t) = 0$.

Supposto che non siano trascurabili i fenomeni d'isteresi, seguendo le idee di VOLTERRA (⁸) valuteremo il ricordo, che il materiale conserva all'istante t nel punto di ascissa x – della azione esplicata dal momento flettente $P\eta + M_0$ in tutto l'intervallo $0 - t$, mediante il funzionale

$$B \left| t, \; P(x, \tau)\, \eta(x, \tau) \overset{t}{\underset{0}{+}} M_0(x, \tau) \right|$$

che sta a indicare un numero reale il quale, per ogni x, con $0 \leq x \leq l$, dipende, secondo una legge assegnata, da t, che supporremo compreso fra 0 e 1 (⁹), e dai valori che la funzione $P(x, \tau)\, \eta(x, \tau) + M_0(x, \tau)$, supposta continua e perciò limitata, assume per τ variabile nell'intervallo chiuso $0 - t$. Le condizioni da imporre a tale funzionale saranno esposte al numero seguente.

L'equazione della linea elastica è allora (¹⁰)

(⁸) V. VOLTERRA: *Leçons sur les Fonctions de lignes.* Gauthier-Villars, Parigi (1913).

(⁹) Tale ipotesi non è restrittiva in quanto l' unità di misura del tempo può essere scelta arbitrariamente

(¹⁰) Si applica cioè la relazione $\dfrac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \dfrac{1}{EJ} M = 0$ dove con M si indica qui il complesso dato, nel punto di ascissa x, dal momento flettente esistente all' istante t e dall' apporto dovuto all' azione precedente. Per semplicità si congloba poi il fattore $\dfrac{1}{EJ}$ nel funzionale.

$$\frac{\partial^2 \eta(x,t)}{\partial x^2} + \frac{1}{EJ}[P(x,t)\,\eta(x,t) + M_0(x,t)] + \tag{5}$$
$$+ B[t, P(x,\tau)\,\eta(x,\tau) \overset{t}{\underset{0}{+}} M_0(x,\tau)] = 0$$

a cui per ogni $0 \leq t \leq 1$ si devono aggiungere le condizioni agli estremi

$$\eta(0,t) = \eta(l,t) = 0\,. \tag{6}$$

Ammettiamo di conoscere una soluzione della (5) soddisfacente le (6); sostituendola nel funzionale B al posto della funzione incognita si può nella (5) considerare tale funzionale quale funzione nota: servendosi allora della funzione $G(x, \xi)$ precedentemente introdotta si ottiene che la soluzione in questione è soluzione anche dell'equazione funzionale

$$\eta(x,t) = \frac{1}{EJ}\int_0^l G(x,\xi)\,M_0(\xi,t)\,d\xi + \tag{7}$$
$$+ \frac{\bar{P}}{EJ}\int_0^l G(x,\xi)\,p(\xi,t)\,\eta(\xi,t)\,d\xi +$$
$$+ \int_0^l G(x,\xi)\,B[t, P(\xi,\tau)\,\eta(\xi,\tau) \overset{t}{\underset{0}{+}} M_0(\xi,\tau)]\,d\xi\,.$$

Viceversa ogni soluzione della (7) necessariamente soddisfa le (6) essendo

$$G(0,\xi) = G(l,\xi) = 0$$

ed è soluzione anche della (5) come immediatamente si verifica.

Se si considera l'ereditarietà di tipo lineare il funzionale B ha la forma particolare

$$\frac{1}{EJ}\int_0^t \Phi(t,\tau)\,[P(x,\tau)\,\eta(x,\tau) + M_0(x,\tau)]\,d\tau \tag{8}$$

dove $\Phi\ (t, \tau)$ è il nucleo ereditario relativo al dato problema; in tale caso la (7) si identifica con l'equazione trovata da KRALL al riguardo [11].

4. Condizioni sul funzionale B. – Allo scopo di provare che, in base ai risultati ottenuti nel lavoro citato nella nota [1], la (7) ammette una ed una sola soluzione, supporremo che il funzionale B soddisfi le seguenti condizioni:

I). – Ad ogni intero positivo n si possa far corrispondere un numero N_n tale che, se $\varphi\ (\xi, \tau)$ è una funzione continua ed in modulo $\leq n$ con $0 \leq \tau \leq t \leq 1$, $0 \leq \xi \leq l$, si abbia per ogni t e per ogni ξ

$$(C_1) \qquad \left| B\left[t, \varphi\ (\xi, \overset{t}{\underset{0}{\tau}})\right] \right| \leq N_n\, t\,.$$

II). – Per ogni intero positivo n, scelto un $\varepsilon > 0$ arbitrario, gli si possa associare un $\rho_n > 0$ tale che ogni $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq 1$ e per ogni $0 \leq \xi \leq l$, con $t_2 - t_1 < \rho_n$ e per ogni funzione $\varphi\ (\xi, \tau)$ continua e in modulo $\leq n$ per $0 \leq \tau \leq t_2$, $0 \leq \xi \leq l$ valga la relazione

$$(C_2) \qquad \left| B\left[t_2, \varphi\,(\xi, \overset{t_2}{\underset{0}{\tau}})\right] - B\left[t_1, \varphi\ (\xi, \overset{t_1}{\underset{0}{\tau}})\right] \right| \leq \frac{\varepsilon}{4}\,.$$

(11) Si noti infatti che detta $\bar{G}\,(x, \xi)$ la funzione di GREEN usata da KRALL, essa è legata alla $G\,(x, \xi)$ qui introdotta dalla relazione $\dfrac{\partial^2 \bar{G}}{\partial \xi^2} = -\dfrac{1}{EJ}\, G\,(x, \xi)$. Per l'esattezza poi KRALL si occupa dell'equazione a cui soddisfa $\dfrac{\partial \eta}{\partial x}$. Per avere invece l'equazione in $\eta\,(x, t)$, nel primo integrale della (7) di KRALL si ponga $p\,(\xi) = -\dfrac{\partial^2 M_0(\xi, t)}{\partial \xi^2}$ e si integri due volte per parti, si integri poi per parti il secondo integrale della (7) che coi nostri simboli diventa

$$\bar{P} \int_0^l \frac{\partial \bar{G}}{\partial \xi} \frac{\partial \{ p(\xi, t)\, \eta\, (\xi, t) \}}{\partial \xi}\, d\,\xi$$

e si aggiungano infine i termini dovuti all'ereditarietà lineare.

III). - Per ogni intero positivo n, scelto un $\varepsilon > 0$ arbitrario, gli si possa far corrispondere un $\sigma_n > 0$ tale che, per ogni $0 \leq t \leq 1$, $0 \leq \xi \leq l$ e per ogni coppia di funzioni $\varphi_1(\xi, \tau)$ e $\varphi_2(\xi, \tau)$, continue ed in modulo $< n$ per $0 \leq \xi \leq l$, $0 \leq \tau \leq t$, ed ivi soddisfacenti la condizione che sia $|\varphi_2(\xi, \tau) - \varphi_1(\xi, \tau)| < \sigma_n$, risulti

$$(C_3) \qquad \left| B[t, \varphi_2(\xi, \overset{t}{\underset{0}{\tau}})] - B[t, \varphi_1(\xi, \overset{t}{\underset{0}{\tau}})] \right| \leq \varepsilon .$$

IV). - Esiste un numero N' tale che per ogni $0 \leq \xi \leq l$, $0 \leq t \leq 1$, per ogni t_0 di $0 - t$ e per ogni coppia di funzioni $\varphi'(\xi, \tau)$ e $\varphi''(\xi, \tau)$ continue e perciò limitate (con $0 \leq \tau \leq t$) sia

$$(C_4) \qquad \left| B[t, \varphi''(\xi, \overset{t}{\underset{0}{\tau}})] - B[t, \varphi'(\xi, \overset{t}{\underset{0}{\tau}})] \right| \leq$$

$$\leq N' \left\{ (t - t_0) \max \left| \varphi'' \overset{t}{\underset{t_0}{-}} \varphi' \right| + t_0 \max \left| \varphi'' \overset{t_0}{\underset{0}{-}} \varphi' \right| \right\}$$

dove $\max \left| \varphi'' \overset{t_2}{\underset{t_1}{-}} \varphi' \right|$ rappresenta il massimo valore di $|\varphi''(\xi, \tau) - \varphi'(\xi, \tau)|$ per $t_1 \leq \tau \leq t_2$, $0 \leq \xi \leq l$.

È facile verificare che tali condizioni sono soddisfatte quando il funzionale B ha l'espressione (8) ([12]).

([12]) Indichiamo a tale scopo con $\overline{\Phi}$ il massimo modulo della funzione $\dfrac{\Phi(t, \tau)}{EJ}$ per ogni $0 \leq t \leq 1$, $0 \leq \tau \leq t$. La (C_1) è allora verificata prendendo $N_n = \overline{\Phi}\, n$.

La (C_2) è conseguenza immediata della continuità rispetto a t della funzione espressa dalla (8).

Per verificare su (8) la (C_3) basta, assegnato ε, prendere per ogni valore di n

$$\sigma_n \leq \frac{\varepsilon}{\overline{\Phi}} .$$

Per ottenere infine la (C_4) basta prendere $N' = \overline{\Phi}$.

5. – Condizioni sul funzionale A. – Si osservi ora che l'equazione (7) si può far rientrare nell'equazione (1) aggiungendo e togliendo a secondo membro il termine (noto)

$$\int_0^l G(x,\xi)\, B[t, M_0(\xi, \overset{t}{\underset{0}{\tau}})]\, d\xi,$$

ponendo

$$f(x,t) = \int_0^l G(x,\xi) \left\{ \frac{1}{EJ} M_0(\xi, t) + B[t, M_0(\xi, \overset{t}{\underset{0}{\tau}})] \right\} d\xi$$

$$K(x, t, \xi) = G(x, \xi)\, p(\xi, t)$$

$$\lambda = \frac{\bar{P}}{EJ}$$ (che in base alla (4) è certamente non autovalore di K)

e assumendo come caso particolare del funzionale A l'espressione

$$(9) \qquad \int_0^l G(x,\xi) \left\{ B[t, P(\xi,\tau)\,\eta(\xi,\tau) \overset{t}{\underset{0}{+}} M_0(\xi,\tau)] - B[t, M_0(\xi, \overset{t}{\underset{0}{\tau}})] \right\} d\xi .$$

Occorre ora far vedere che il caso particolare di A espresso da (9) soddisfa condizioni sufficienti affinchè (1) ammetta una ed una sola soluzione per $0 \leq x \leq l$, $0 \leq t \leq 1$. Per comodità riportiamo dal lavoro citato in ([1]) tali condizioni:

I'). – Ad ogni numero intero positivo m si possa far corrispondere un numero M_m tale che, se $\eta(\xi, \tau)$ è una funzione continua ed in modulo $\leq m$, si abbia per ogni x, t

$$(C_1') \qquad | A[x, t, \eta(\overset{l}{\underset{0}{\xi}}, \overset{t}{\underset{0}{\tau}})] | \leq M_m \cdot t$$

con $0 \leq \tau \leq t \leq 1$, x e ξ in $0-l$.

II'). - Per ogni intero positivo m, scelto un $\varepsilon > 0$ arbitrario, gli si possa associare un ρ_m tale che per ogni funzione $\eta(\xi,\tau)$ continua ed in modulo $\leq m$ per $0 \leq \xi \leq l$, $0 \leq \tau \leq t_2$ valga

$$(C_2') \qquad \left| A\left[x_2, t_2, \eta\left(\overset{l}{\underset{0}{\xi}}, \overset{t_2}{\underset{0}{\tau}}\right)\right] - A\left[x_1, t_1, \eta\left(\overset{l}{\underset{0}{\xi}}, \overset{t_1}{\underset{0}{\tau}}\right)\right] \right| \leq \varepsilon$$

per ogni $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq 1$, x_1 e x_2 in $0^- l$ con $t_2 - t_1 < \rho_m$, $|x_2 - x_1| < \rho_m$.

III'). - Per ogni intero positivo m, scelto un $\varepsilon > 0$ arbitrario, gli si possa associare un $\sigma_m > 0$ tale che per ogni coppia x, t con $0 \leq x \leq l$, $0 \leq t \leq 1$, e per ogni coppia di funzioni $\eta_1(\xi,\tau)$ ed $\eta_2(\xi,\tau)$ continue ed in modulo $\leq m$ per $0 \leq \xi < l$, $0 \leq \tau \leq t$ ed ivi soddisfacenti alla condizione che sia sempre $|\eta_2(\xi,\tau) - \eta_1(\xi,\tau)| < \sigma_m$, risulti

$$(C_3') \qquad \left| A\left[x, t, \eta_2\left(\overset{l}{\underset{0}{\xi}}, \overset{t}{\underset{0}{\tau}}\right)\right] - A\left[x, t, \eta_1\left(\overset{l}{\underset{0}{\xi}}, \overset{t}{\underset{0}{\tau}}\right)\right] \right| \leq \varepsilon .$$

IV'). - Esiste un numero M' tale che per ogni $0 \leq x \leq l$ e $0 \leq t \leq 1$ e per ogni t_0 di $0^- t$ e per ogni coppia di funzioni $\eta'(\xi,\tau)$ e $\eta''(\xi,\tau)$ continue e perciò limitate per $0 < \xi \leq l$, $0 \leq \tau \leq t$ sia

$$\left| A\left[x, t, \eta''\left(\overset{l}{\underset{0}{\xi}}, \overset{t}{\underset{0}{\tau}}\right)\right] - A\left[x, t, \eta'\left(\overset{l}{\underset{0}{\xi}}, \overset{t}{\underset{0}{\tau}}\right)\right] \right| \leq$$

$$(C_4') \qquad M' \left\{ (t - t_0) \max \left| \eta'' \overset{t}{\underset{t_0}{-}} \eta' \right| + t_0 \max \left| \eta'' \overset{t_0}{\underset{0}{-}} \eta' \right| \right\}$$

dove $\max \left| \eta'' \overset{t_2}{\underset{t_1}{-}} \eta' \right|$ rappresenta il massimo valore di $|\eta''(\xi,\tau) -$ $- \eta'(\xi,\tau)|$ per $t_1 \leq \tau \leq t_2$, $0 \leq \xi \leq l$.

6. - Verifica delle condizioni sufficienti per l'unicità e l'esistenza della soluzione. - Per verificare che (9) soddisfa le condizioni precedenti poniamo, per brevità,

$$B^*[t, \xi, \overset{t}{\underset{0}{\eta}}] = B[t, P(\xi, \tau)\, \overset{t}{\underset{0}{\eta}}(\xi, \tau) + M_0(\xi, \tau)] - B[t, \overset{t}{\underset{0}{M_0}}(\xi, \tau)]\,;$$

si osservi poi che in base alla condizione IV esiste un N' tale che

$$|B^*[t, \xi, \overset{t}{\underset{0}{\eta}}]| \leq N'\, t \max |P(\xi, \tau)\, \overset{t}{\underset{0}{\eta}}(\xi, \tau)|\,.$$

Per non appesantire le formule ammettiamo che sia $l \leq 1$ (e di conseguenza $G(x, \xi) \leq 1$) [13]. Supposto ora $|\eta(\xi, \tau)| \leq m$, per $0 \leq \xi \leq l$, $0 \leq \tau \leq t \leq 1$, si ha per la (9) la valutazione

$$\left| \int_0^l G(x, \xi)\, B^*[t, \xi, \overset{t}{\underset{0}{\eta}}]\, d\xi \right| \leq N'\, \overline{P}\, m\, t$$

e quindi vale la (C_1') con $M_m = N'\, \overline{P}\, m$.

Indicando brevemente con $|A_2 - A_1|$ il primo membro della (C_2''), si ha nel nostro caso

$$(10)\qquad \begin{aligned} |A_2 - A_1| \leq \int_0^l \Big| G(x_2, \xi) \Big\{ B^*[t_2, \xi, \overset{t_2}{\underset{0}{\eta}}] - B^*[t_1, \xi, \overset{t_1}{\underset{0}{\eta}}] \Big\} + \\ + B^*[t_1, \xi, \overset{t_1}{\underset{0}{\eta}}] \{ G(x_2, \xi) - G(x_1, \xi) \} \Big|\, d\xi\,; \end{aligned}$$

supposto $|\eta(\xi, \tau)| \leq m$, detto $\overline{M_0}$ il massimo modulo di $M_0(x, t)$, si può scegliere un intero $n \geq \overline{P}\, m + \overline{M_0}$: preso ad arbitrio un $\varepsilon > 0$, al numero n corrisponde il ρ_n della condizione II, che

(13) L'ipotesi del resto non è restrittiva, potendosi scegliere opportunamente l'unità di misura delle lunghezze.

potremo supporre inoltre tale che, per ogni coppia x_1 e x_2 con $|x_2 - x_1| < \rho_n$ e per ogni $0 \leq \xi \leq l$, valga anche la relazione

$$|G(x_2, \xi) - G(x_1, \xi)| < \frac{\varepsilon}{2N_n}.$$

In base alla (C_2), valida (nelle condizioni dette) sia per la funzione $P\eta + M_0$ che per la funzione M_0, si ha che

$$\left| B^*[t_2, \xi, \overset{t_2}{\underset{0}{\eta}}] - B^*[t_1, \xi, \overset{t_1}{\underset{0}{\eta}}] \right| < \frac{\varepsilon}{2};$$

dalla (10) allora, ricordando anche (C_1), si ricava che (C'_2) risulta valida per qualunque $\rho_m \leq \rho_n$.

Dimostreremo ora che l'espressione (9) soddisfa la (C'_3). Preso infatti un intero positivo m, scelto un $\varepsilon > 0$ arbitrario sia σ_m il numero da associargli in base alla III'. Data una coppia di funzioni $\eta_1(\xi, \tau)$ ed $\eta_2(\xi, \tau)$ tali che sia

$$(11) \qquad |\eta_2(\xi, \tau) - \eta_1(\xi, \tau)| < \sigma_m$$

e detto n un intero $\geq \overline{P}m + \overline{M}_0$, potremo scrivere il σ della condizione III sotto la forma $\overline{P}\sigma_m$ [14] venendo così a determinare il detto σ_m.

Indicando allora con $|A(\eta_2) - A(\eta_1)|$ il primo membro di (C'_3) si ha nel nostro caso

$$|A(\eta_2) - A(\eta_1)| = \left| \int_0^l G(x, \xi) \left\{ B[t, P(\xi, \tau)\, \overset{t}{\underset{0}{\eta_2(\xi, \tau)}} + M_0(\xi, \tau)] - \right.\right.$$

$$\left.\left. - B[t, P(\xi, \tau)\, \overset{t}{\underset{0}{\eta_1(\xi, \tau)}} + M_0(\xi, \tau)] \right\} d\xi \right|$$

e il secondo membro per (C_3) risulta $\leq \varepsilon$.

[14] Infatti dalla (11) segue che $|P(\xi, \tau)\,\eta_2(\xi, \tau) - P(\xi, \tau)\,\eta_1(\xi, \tau)| \leq \overline{P}\sigma_m = \sigma_n$.

Infine affinchè (9) verifichi (C_4') basta prendere $M' = N'\overline{P}$: indicando infatti con $|A'' \quad A'|$ il primo membro della (C_4') si osservi che è

$$|A'' - A'| = \left| \int_0^l G(x, \xi) \left\{ B[t, P(\xi, \tau) \overset{t}{\underset{0}{\eta'' (\xi, \tau) + M_0 (\xi, \tau)}}] - \right.\right.$$

$$\left.\left. - B[t, P(\xi, \tau) \overset{t}{\underset{0}{\eta' (\xi, \tau) + M_0 (\xi, \tau)}}] \right\} d\xi \right| .$$

e il secondo membro per (C_4) è minore o uguale di

$$N'\overline{P} \left\{ (t - t_0) \max \left| \overset{t}{\underset{t_0}{\eta'' - \eta'}} \right| + t_0 \max \left| \overset{t_0}{\underset{0}{\eta'' - \eta'}} \right| \right\} .$$

Resta così provato che la (7) rientra nella (1), sotto tutte le condizioni sufficienti per assicurare l'esistenza e l'unicità della soluzione (continua) per ogni $0 \leq x \leq l$, $0 \leq t \leq 1$. Da quanto si è detto precedentemente consegue che tale proprietà è assicurata anche per la (5) considerata unitamente alle (6).

Si noti in particolare che per $M_0(\xi, t) \equiv 0$, se $\frac{\overline{P}}{EJ}$ non viene a coincidere con un autovalore del nucleo $G(x, \xi)\, p(\xi, t)$, la soluzione della (7) risulta $\eta(\xi, t) \equiv 0$: ne segue che la (4) è condizione sufficiente per escludere casi di instabilità.

7. - Osservazione. - La (1) nel caso trattato prende la forma

$$\eta(x, t) = f(x, t) + \lambda \int_0^l K(x, \xi, t) \left\{ \eta(\xi, t) + \right. \tag{12}$$

$$\left. + \frac{1}{p(\xi, t)} B^* [t, \xi, \overset{t}{\underset{0}{\eta}}] \right\} d\xi .$$

Ora la (12) si può rendere più semplice se si conosce il nucleo risolvente di $K(x, \xi, t)$. Detto $\Gamma(x, \xi, t; \lambda)$ tale nucleo, considerando B^* come funzione nota, dalla (12) si può ricavare l'equazione equivalente

$$(13) \quad \eta(x,t) = f(x,t) + \lambda \int_0^t K(x,\xi,t) \frac{1}{p(\xi,t)} B^*[t,\xi,\overset{t}{\underset{0}{\eta}}]\, d\xi +$$

$$+ \lambda \int_0^t \Gamma(x,\sigma,t;\lambda) \left\{ f(\sigma,t) + \lambda \int_0^t K(\sigma,\xi,t) \frac{1}{p(\xi,t)} B^*[t,\xi,\overset{t}{\underset{0}{\eta}}]\, d\xi \right\} d\sigma .$$

Servendosi poi della nota relazione

$$K(x,\xi,t) + \lambda \int_0^t \Gamma(x,\sigma,t;\lambda)\, K(\sigma,\xi,t)\, d\sigma = \Gamma(x,\xi,t;\lambda)$$

la (13) si riconduce infine all'equazione

$$\eta(x,t) = f(x,t) + \lambda \int_0^t \Gamma(x,\xi,t;\lambda) \left\{ f(\xi,t) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{p(\xi,t)} B^*[t,\xi,\overset{t}{\underset{0}{\eta}}] \right\} d\xi ,$$

che, rispetto alla (12), rappresenta un progresso.