

# RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

ANNAMARIA TOSO

## **A proposito di un problema al contorno per equazioni differenziali ordinarie del terzo ordine**

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*,  
tome 20 (1951), p. 299-306

[http://www.numdam.org/item?id=RSMUP\\_1951\\_\\_20\\_\\_299\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1951__20__299_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1951, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques*  
<http://www.numdam.org/>

# A PROPOSITO DI UN PROBLEMA AL CONTORNO PER EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE DEL TERZO ORDINE

*Nota (\*) di ANNAMARIA TOSO (a Padova).*

In questa Nota mi occupo del problema al contorno che consiste nel fissare in quattro punti distinti il valore dell' integrale di un' equazione del tipo

$$y''' = \lambda f(x, y, y', y''),$$

dove  $\lambda$  è un parametro. Limitandomi per semplicità al caso delle funzioni continue, dimostrerò che:

*Data l' equazione*

$$(1) \quad y''' = \lambda f(x, y, y', y''),$$

*con  $f(x, y, y', y'')$  continua (e reale) nell' iperstrato*

$$S: a \leq x \leq b, |y| < +\infty, |y'| < +\infty, |y''| < +\infty$$

*ed avente ivi un estremo inferiore  $m$  positivo ed un estremo superiore  $M$  finito, se  $x_1, x_2, x_3, x_4$  sono quattro punti di  $a^+b$  ed  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  quattro numeri reali, esiste sempre almeno un valore  $\lambda_0$  del parametro reale  $\lambda$  ed una funzione  $y(x)$  definita in  $a^+b$  tali da aversi*

(\*) Pervenuta in redazione il 16 marzo 1951.

$$y'''(x) = \lambda_0 f(x, y(x), y'(x), y''(x)), \quad y(x_i) = \alpha_i \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (1).$$

La dimostrazione fa ricorso ai noti procedimenti di BIRKHOFF-KELLOGG-SCHAUDER-CACCIOPPOLI. Ma non è escluso naturalmente che allo stesso risultato si possa giungere con procedimenti di altra natura.

1. - Per rendere più agevole la dimostrazione premettiamo due lemmi.

LEMMA 1. - *Se  $g(t)$  è una funzione continua e positiva in  $a^+b$  ed  $x_1, x_2, x_3, x_4$  sono le ascisse di quattro punti di  $a^+b$ , con  $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ , risulta*

$$\int_{x_1}^{x_2} \{ (x_4 - t)^2 - (x_4 x_2 x_1) (x_4 x_2 x_3) (x_2 - t)^2 - (x_4 x_3 x_1) (x_4 x_3 x_2) (x_3 - t)^2 \} g(t) dt > 0 \quad (2).$$

Per provare l'asserto basta far vedere che la funzione

$$h(t) = (x_4 - t)^2 - (x_4 x_2 x_1) (x_4 x_2 x_3) (x_2 - t)^2 - (x_4 x_3 x_1) (x_4 x_3 x_2) (x_3 - t)^2$$

nell'intervallo  $x_1 \leq t \leq x_2$  soddisfa alla  $h(t) \geq 0$ , la disuguaglianza valendo in senso forte in tutto un intervallo contenuto in  $x_1^+x_2$ .

(1) Altri teoremi si possono dedurre, come casi particolari, da risultati di MAGESIS [*Problemi di valori al contorno per l'equazione differenziale  $y^{(n)} = \lambda f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$* ], «Annali di Matematica pura ed applicata», serie IV, tomò XXVII (1948), pagg. 39-74; so ne vedano in particolare i numeri 3, 10 ed 11] e STAMPACCHIA [*Un'osservazione su un problema ai limiti per l'equazione  $y^{(n)} = \lambda f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$* ], «Bollettino dell'Unione Matematica Italiana», serie III, volume IV (1949), pagg. 235-239]. Per equazioni di primo e secondo ordine ricorderò soltanto che si conoscono teoremi di ZAWISCHA, TAKAHASCHI, CAFIERO, VOLPATO e ZWIRNER. Quest'ultimo mi ha suggerito di occuparmi delle presente questione.

(2) Con  $(abc)$  indico il rapporto  $(a-c)/(b-c)$ .

Ora, poichè risulta

$$(x_4 x_1 x_2)(x_4 x_1 x_3) + (x_4 x_2 x_1)(x_4 x_2 x_3) + \\ + (x_4 x_3 x_1)(x_4 x_3 x_2) = 1,$$

si può scrivere

$$h(t) = x_4^2 - 2x_4 t + t^2 + (x_4 x_1 x_2)(x_4 x_1 x_3)(x_2 - t)^2 - \\ - (x_4 x_3 x_1)(x_4 x_3 x_2)(x_3^2 - 2x_3 t + t^2 - x_2^2 + 2x_2 t - t^2) - \\ - x_2^2 + 2x_2 t - t^2 = \frac{x_4 - x_2}{x_3 - x_1} \left[ - (x_4 - x_3)(x_1 + x_2) + \right. \\ \left. + 2(x_4 - x_3)t + \frac{x_4 - x_3}{x_2 - x_1}(x_2 - t)^2 \right] = \frac{(x_4 - x_2)(x_4 - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)} [x_1^2 - \\ - x_2^2 + 2x_2 t - 2x_1 t + x_2^2 - 2x_2 t + t^2] = \\ = (x_4 x_1 x_2)(x_4 x_1 x_3)(t - x_1)^2.$$

Dunque è  $h(x_1) = 0$ , mentre per ogni altro valore di  $t$  è  $h(t) > 0$ .

LEMMA 2. - *Nelle ipotesi del lemma precedente, si ha pure*

$$\int_{x_2}^{x_3} \{ (x_4 - t)^2 - (x_4 x_3 x_1)(x_4 x_3 x_2)(x_3 - t)^2 \} g(t) dt > 0.$$

Anche in questo caso basterà far vedere che la funzione

$$k(t) = (x_4 - t)^2 - (x_4 x_3 x_1)(x_4 x_3 x_2)(x_3 - t)^2$$

soddisfa alla  $k(t) > 0$  nell'intervallo  $x_2 \leq t \leq x_3$ .

Ora è

$$k(t) = \{ 1 - (x_4 x_3 x_1)(x_4 x_3 x_2) \} t^2 - \\ - 2 \{ x_4 - (x_4 x_3 x_1)(x_4 x_3 x_2)x_3 \} t + x_4^2 - (x_4 x_3 x_1)(x_4 x_3 x_2)x_3^2.$$

Le due radici dell'equazione  $k(t) = 0$  sono

$$t_2 = \frac{x_4 - (x_4 x_3 x_1)(x_4 x_3 x_2)x_3 - (x_4 - x_3)\sqrt{(x_4 x_3 x_1)(x_4 x_3 x_2)}}{1 - (x_4 x_3 x_1)(x_4 x_3 x_2)} =$$

$$= \frac{x_4 + x_3\sqrt{(x_4 x_3 x_1)(x_4 x_3 x_2)}}{1 + \sqrt{(x_4 x_3 x_1)(x_4 x_3 x_2)}} > \frac{x_3 + x_3\sqrt{(x_4 x_3 x_1)(x_4 x_3 x_2)}}{1 + \sqrt{(x_4 x_3 x_1)(x_4 x_3 x_2)}} = x_3$$

e

$$t_1 = \frac{x_4 - (x_4 x_3 x_1)(x_4 x_3 x_2)x_3 + (x_4 - x_3)\sqrt{(x_4 x_3 x_1)(x_4 x_3 x_2)}}{1 - (x_4 x_3 x_1)(x_4 x_3 x_2)} =$$

$$= \frac{x_3\sqrt{(x_4 x_3 x_1)(x_4 x_3 x_2)} - x_4}{\sqrt{(x_4 x_3 x_1)(x_4 x_3 x_2)} - 1}.$$

Dimostriamo che è  $t_1 < x_2$ . Supponiamo infatti  $t_1 \geq x_2$ ,  
cioè

$$(x_3 - x_2)\sqrt{(x_4 x_3 x_1)(x_4 x_3 x_2)} \geq x_4 - x_2,$$

da cui, innalzando al quadrato e semplificando,

$$(x_4 x_3 x_1)(x_3 - x_2) \geq x_4 - x_2$$

e, sviluppando,

$$x_3 x_4 - x_2 x_4 - x_1 x_3 + x_1 x_2 \geq x_3 x_4 - x_2 x_3 - x_1 x_4 + x_1 x_2,$$

ossia

$$x_3(x_2 - x_1) - x_4(x_2 - x_1) \geq 0,$$

il che è assurdo, essendo per ipotesi  $x_4 > x_3$ ,  $x_2 > x_1$ . Dunque è, effettivamente,  $t_1 < x_2$ . Ora, poichè è  $k(t) > 0$  per  $t_1 < t < t_2$ , si ha pure  $k(t) > 0$  per  $t$  variabile nello intervallo  $x_2 \text{H} x_3$ , come appunto volevasi.

2. - Veniamo ora alla dimostrazione del teorema.

Posto per brevità

$$F(\varphi(x), x) = f(x, \varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x)),$$

osserviamo anzitutto che, se  $\varphi(x)$  è una funzione continua in  $a^+b$  insieme con le derivate prime e seconde, la

$$\tau(x) = \lambda \int_{x_1}^x \frac{(x-t)^2}{2} F(\varphi(t), t) dt + \psi(\varphi(x), x),$$

con

$$\begin{aligned} \psi(\varphi(x), x) &= (x \ x_1 \ x_2) (x \ x_1 \ x_3) \alpha_1 + \\ &+ \left\{ \alpha_2 - \lambda \int_{x_1}^{x_2} \frac{(x_2-t)^2}{2} F(\varphi(t), t) dt \right\} (x \ x_2 \ x_1) (x \ x_2 \ x_3) + \\ &+ \left\{ \alpha_3 - \lambda \int_{x_1}^{x_3} \frac{(x_3-t)^2}{2} F(\varphi(t), t) dt \right\} (x \ x_3 \ x_1) (x \ x_3 \ x_2), \end{aligned}$$

ha come derivata terza  $\lambda F(\varphi(x), x)$  ed assume i valori  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  nei punti  $x_1, x_2, x_3$ .

Si riconosce poi che, posto

$$\begin{aligned} D(\varphi(x)) &= \int_{x_1}^{x_4} \frac{(x_4-t)^2}{2} F(\varphi(t), t) dt - \\ &- (x_4 \ x_2 \ x_1) (x_4 \ x_2 \ x_3) \int_{x_1}^{x_2} \frac{(x_2-t)^2}{2} F(\varphi(t), t) dt - \\ &- (x_4 \ x_3 \ x_1) (x_4 \ x_3 \ x_2) \int_{x_1}^{x_3} \frac{(x_3-t)^2}{2} F(\varphi(t), t) dt, \end{aligned}$$

risulta anche  $\tau(x_4) = \alpha_4$ , se è

$$\lambda = L(\varphi(x)) = \frac{1}{D(\varphi(x))} \{ \alpha_4 - (x_4 x_1 x_2) (x_4 x_1 x_3) \alpha_1 - \\ - (x_4 x_2 x_1) (x_4 x_2 x_3) \alpha_2 - (x_4 x_3 x_1) (x_4 x_3 x_2) \alpha_3 \}.$$

Quindi il problema posto consiste nel trovare una  $\vartheta(x)$  tale da aversi

$$\vartheta(x) = L(\vartheta(x)) \int_{x_1}^x \frac{(x-t)^2}{2} F(\vartheta(t), t) dt + \psi(\vartheta(x), x)$$

cioè nel trovare un punto unito della trasformazione funzionale

$$(2) \quad \tau(x) = L(\varphi(x)) \int_{x_1}^x \frac{(x-t)^2}{2} F(\varphi(t), t) dt + \psi(\varphi(x), x) \quad (3).$$

Cominciamo perciò con l'osservare che  $\tau(x)$  è una funzione continua del 2° ordine di  $\varphi(x)$ , nel senso che, se  $\varphi_0(x)$  è una  $\varphi(x)$  prefissata, dato  $\varepsilon > 0$ , si può trovare un  $\delta > 0$  tale che, se per la funzione  $\varphi(x)$  si ha

$$|\varphi(x) - \varphi_0(x)| < \delta, \quad |\varphi'(x) - \varphi_0'(x)| < \delta, \quad |\varphi''(x) - \varphi_0''(x)| < \delta$$

in tutto  $a \leq x \leq b$ , riesca allora

$$|\tau(x) - \tau_0(x)| < \varepsilon \quad (a \leq x \leq b),$$

(3) Anche seguendo MAGENES si tradurrebbe il problema attuale nella ricerca di un elemento unito di una trasformazione funzionale; e volendo si potrebbe vedere di dedurre il teorema di questa Nota attraverso i risultati di MAGENES.

essendo  $\tau(x)$  e  $\tau_0(x)$  le funzioni corrispondenti rispettivamente a  $\varphi(x)$  e  $\varphi_0(x)$  nella trasformazione funzionale (2). Ciò segue dal fatto che funzioni continue del 2° ordine di  $\varphi(x)$  sono evidentemente  $F(\varphi(x), x)$ ,  $L(\varphi(x))$ , e  $\psi(\varphi(x), x)$ .

Inoltre, al variare di  $\varphi(x)$ , la funzione  $L(\varphi(x))$  si mantiene limitata. Infatti risulta

$$\begin{aligned}
 D(\varphi(x)) = & \int_{x_1}^{x_2} \frac{(x_4 - t)^2}{2} F(\varphi(t), t) dt + \int_{x_2}^{x_3} \frac{(x_4 - t)^2}{2} F(\varphi(t), t) dt + \\
 & + \int_{x_3}^{x_4} \frac{(x_4 - t)^2}{2} F(\varphi(t), t) dt - \\
 & - (x_4 x_2 x_1) (x_4 x_2 x_3) \int_{x_1}^{x_2} \frac{(x_2 - t)^2}{2} F(\varphi(t), t) dt - \\
 & - (x_4 x_3 x_1) (x_4 x_3 x_2) \left\{ \int_{x_1}^{x_2} \frac{(x_3 - t)^2}{2} F(\varphi(t), t) dt + \right. \\
 & \left. + \int_{x_2}^{x_3} \frac{(x_3 - t)^2}{2} F(\varphi(t), t) dt \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \int_{x_1}^{x_2} [(x_4 - t)^2 - \right. \\
 & - (x_4 x_2 x_1) (x_4 x_2 x_3) (x_2 - t)^2 - (x_4 x_3 x_1) (x_4 x_3 x_2) (x_3 - \\
 & - t)^2] F(\varphi(t), t) dt + \int_{x_2}^{x_3} [(x_4 - t)^2 - (x_4 x_3 x_1) (x_4 x_3 x_2) (x_3 - \\
 & - t)^2] F(\varphi(t), t) dt + \int_{x_3}^{x_4} (x_4 - t)^2 F(\varphi(t), t) dt \left. \right\},
 \end{aligned}$$



e poichè, per ipotesi,  $F(\varphi(x), x)$  non è mai minore di  $m$ , si riconosce, in virtù dei lemmi 1 e 2, che  $D(\varphi(x))$  si mantiene in  $a \rightarrow b$  superiore ad un numero positivo.

L'esistenza di un elemento unito della (2) si stabilisce allora facilmente coi procedimenti funzionali ricordati nella prefazione (4).

(4) Per esempio, si può trasportare al caso attuale (e la cosa riesce facilmente appunto perchè anche  $L(\varphi(x))$  è continua) il ragionamento esposto in SEVERI-SCORZA DRAGONI, *Lezioni di Analisi* (Zuffi, Bologna), vol. III. n. 41.