GIOVANNI ZACHER

Determinazione dei gruppi finiti strutturalmente omomorfi ad un gruppo d'ordine 8 non ciclico

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 20 (1951), p. 315-328

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1951__20__315_0>

DETERMINAZIONE DEI GRUPPI FINITI STRUTTURALMENTE OMOMORFI AD UN GRUPPO D' ORDINE 8 NON CICLICO

Nota (*) *di* GIOVANNI ZACHER (*a Padova*) (1).

PREFAZIONE : Nello studio della teoria dei gruppi è stato recentemente introdotto dal WHITMAN (2) il concetto di omomorfismo strutturale.

Tale concetto resta definito nel seguente modo:

Dati due gruppi G e G', si dice che tra essi intercorre un omomorfismo strutturale quando è data una legge che faccia corrispondere ad ogni sottogruppo di G uno ed un solo sottogruppo di G' di modo che:

a) *Se ai sottogruppi A e B di G corrispondono i sottogruppi A' e B' di G', all'intersezione $A \cap B$ di A e B corrisponde l'intersezione $A' \cap B'$ di A' e B', ed all'unione $A \cup B$ corrisponde l'unione $A' \cup B'$.*

b) *Ogni sottogruppo di G' è il corrispondente di almeno un sottogruppo di G.*

(*) Pervenuta in Redazione il 2 aprile 1951.

(1) In questa nota sono esposti i risultati ottenuti nella mia tesi per la Laurea conseguita il 14 marzo 1951.

(2) *Groups with a ciclic group as lattice homomorph;* Annals of Mathematics, II s. vol. 48.

L'omomorfismo strutturale fu oggetto di alcune ricerche da parte di G. ZAPPA (3), (4) e di R. PERMUTTI (5).

Nelle seguenti pagine mi sono proposto di studiare i gruppi d'ordine finito strutturalmente omomorfi ad un gruppo G' d'ordine 8 non ciclico.

A tal fine ho portato l'attenzione sui sottogruppi di G' d'ordine 4 che, essendo ciclici o quadrinomi, furono già studiati rispettivamente dallo ZAPPA e dal PERMUTTI.

§ 1. - **Preliminari.**

1. - Per rendere più chiara ed espressiva l'esposizione converremo di usare i seguenti simboli.

Sia τ un omomorfismo strutturale tra un gruppo G e un gruppo G'. Se H è un sottogruppo qualsiasi del gruppo G e se H' è il trasformato di H mediante τ, denoteremo il gruppo H' pure col simbolo funzionale $f(H)$.

Se H' è un sottogruppo di G' e se $H_1, H_2 \ldots H_t$ è l'insieme di tutti i sottogruppi di G che τ trasforma in H', indicheremo con $f_{-1}(H')$ il sottogruppo intersezione $H_1 \cap H_2 \ldots \cap H_t$ di $H_1, \ldots H_t$ e con $f^{-1}(H')$ il sottogruppo unione $H_1 \cup \ldots \cup H_t$ di $H_1 \ldots H_t$ in G.

2. - Richiamiamo alcune proprietà già note e di facile dimostrazione utili per il nostro studio.

a) Se τ è un omomorfismo strutturale fra un gruppo G e un gruppo G', se A e B sono due sottogruppi di G tali che $A > B$ allora $f(A) \geq f(B)$.

b) Se A', B' sono due sottogruppi di G' tali che $A' > B'$ allora $f_{-1}(A') > f_{-1}(B')$; $f^{-1}(A') > f^{-1}(B')$.

(3) *Determinazione dei gruppi finiti in omomorfismo strutturale con un gruppo ciclico;* Rend. del Sem. Mat. Univ. Padova 18, pp. 140–162 (1949).

(4) *Sulla condizione perchè un omomorfismo ordinario sia anche un omomorfismo strutturale;* Giornale di Matematiche di BATTAGLINI, vol. 78, pp. 182–192 (1948-49).

(5) *Determinazione dei gruppi finiti in omomorfismo strutturale con un gruppo quadrinomio;* Rend. di Mat. e delle sue appl., serie V., vol. 9, fasc. 3–4, pp. 237-246 (Roma 1950).

c) Se A è un sottogruppo di G, la corrispondenza subordinata fra i sottogruppi di A ed $f(A)$ da τ è un omomorfismo strutturale.

d) Se U e U' sono rispettivamente i sottogruppi identici di G e G', allora $f(U) = U'$, $f(G) = G'$.

e) Oltre il gruppo ciclico d'ordine 8 esistono in tutto (6), a meno di relazioni di isomorfismo, 4 diversi gruppi d'ordine 8 e precisamente:

1) Il gruppo dei quaternioni;

2) Il gruppo abeliano di tipo (1, 1, 1);

3) Il gruppo abeliano di tipo (2, 1);

4) Il gruppo diedrale (è un gruppo non abeliano generabile mediante due elementi g'_1, g'_2 legati dalle relazioni $g'^4_1 = g'^2_2 = u', g'_1 g'_2 = g'_2 g'^3_1$).

§ 2. - Determinazione dei gruppi finiti strutturalmente omomorfi ad un gruppo G' isomorfo al gruppo dei quaternioni.

3. – Lo studio si potrebbe condurre portando l'attenzione sui tre sottogruppi d'ordine 4, che sono tutti e tre ciclici.

Una via più breve per giungere al risultato si ottiene facendo ricorso al lavoro del Permutti (7). In questo studio il Permutti perviene al seguente risultato conclusivo:

Condizione necessaria e sufficiente perchè un gruppo finito G sia in omomorfismo di struttura con un gruppo quadrinomio è che sia: $G = R \times S$, ove R è un gruppo d'ordine dispari ed S è un gruppo appartenente ad uno dei tipi seguenti:

1) *Quadrinomio*;

2) *Isomorfo al gruppo dei quaternioni.*

Da qui si vede intanto che fra un gruppo isomorfo al gruppo dei quaternioni ed un gruppo quadrinomio si può sempre porre un omomorfismo strutturale ω.

Sia allora τ un omomorfismo strutturale fra un gruppo finito G ed un gruppo G' isomorfo al gruppo dei quaternioni e

(6) *Theory of groups of finite order* di Burnside, IIa ed. pag. 145.

(7) Vedasi nota (5).

sia ω un omomorfismo strutturale fra il gruppo G' e un gruppo quadrinomio G''.

Allora il prodotto $\tau\omega$ è un omomorfismo strutturale fra G e G''.

Pertanto, se un gruppo finito G è strutturalmente omomorfo ad un gruppo G' isomorfo al gruppo dei quaternioni, G è necessariamente anche strutturalmente omomorfo ad un gruppo quadrinomio e quindi G rientra nella classe dei gruppi determinati dal PERMUTTI, vale a dire: $G = R \times S$, con R gruppo d'ordine dispari ed S gruppo appartenente ad uno dei due tipi:

α) un gruppo quadrinomio;

β) isomorfo al gruppo dei quaternioni.

Dimostriamo che: *Se il gruppo G è dato da: $G = R \times S$, con R gruppo d'ordine dispari ed S soddisfacente alla condizione α), G non può essere strutturalmente omomorfo a G'.*

Infatti supponiamo che esista un gruppo $G = R \times S$, con R gruppo d'ordine dispari (anche identico) opportuno ed S un gruppo quadrinomio, strutturalmente omomorfo a G'. Poichè l'omomorfismo strutturale prodotto $\tau\omega$ muta il gruppo S in G'', $f(S) = G''$ ed R nel sottogruppo identico U'' di G'', $f(R) = U''$, l'omomorfismo strutturale τ muterà R in un sottogruppo di G' contenuto nel gruppo unione dei sottogruppi di G' che ω muta in U''. Tale gruppo coincide col sottogruppo d'ordine 2 di G' (8).

Se allora indico con $\varphi(S)$ il trasformato di S mediante τ, poichè si deve avere $\varphi(G) = \varphi(R \times S) = \varphi(R) \cup \varphi(S) = G'$, per la natura del gruppo $\varphi(R)$ e di G' si conclude che dev'essere $\varphi(S) = G'$, ossia S è strutturalmente omomorfo a G'; ciò è però assurdo, avendo G' un numero di sottogruppi maggiore a quello di S.

Pertanto se il gruppo G è strutturalmente omomorfo a G', il gruppo G deve soddisfare necessariamente alla relazione: $G = R \times S$ con R gruppo d'ordine dispari ed S isomorfo a G'.

Viceversa se tale condizione è soddisfatta, per un teorema dimostrato dallo ZAPPA (9), G è strutturalmente omomorfo a G'.

(8) Vedasi il lavoro citato alla nota (5).

(9) Vedasi nota (4)

Quindi abbiamo il teorema:

Condizione necessaria e sufficiente perchè un gruppo finito G sia strutturalmente omormofo ad un gruppo G' isomorfo al gruppo dei quaternioni è che sia: $G = R \times S$ con R gruppo d'ordine dispari ed S isomorfo a G'.

§ 3. – Determinazione dei gruppi finiti strutturalmente omomorfi ad un gruppo d'ordine 8 non ciclico nè isomorfo al gruppo dei quaternioni.

4. – Prendiamo a considerare i 3 ultimi gruppi elencati al n. 3. Indichiamoli rispettivamente con G'_2, G'_3, G'_4.

Indichiamo con G_i un gruppo strutturalmente omomorfo al gruppo $G'_i \ (i = 2, 3, 4)$. Poichè ognuno dei gruppi G'_2, G'_3, G'_4 contiene come sottogruppo almeno un gruppo quadrinomio, il gruppo G_i contiene in base alla proprietà c) almeno un sottogruppo A strutturalmente omomorfo ad un gruppo quadrinomio. Tale gruppo non può essere ciclico, come stabilì il Permutti (10).

Pertanto non lo sarà neppure il gruppo G_i e abbiamo così il teorema: *Se G è un gruppo finito strutturalmente omomorfo ad un gruppo d'ordine* 8 *abeliano o diedrale, il gruppo G non può essere ciclico.*

5. – A questo punto ricordiamo il teorema seguente dimostrato dallo Scorza (11): Condizione necessaria e sufficiente perchè un gruppo G possa pensarsi come somma di tre suoi sottogruppi, nessuno dei quali coincide con esso, è che G ammetta un sottogruppo normale N il cui corrispondente gruppo fattoriale sia un gruppo quadrinomio. Inoltre detto sottogruppo N è dato dall'intersezione dei tre sottogruppi di cui G è la somma.

Esaminando allora la struttura dei tre gruppi G'_2, G'_3, G'_4, si vede facilmente che ognuno di questi tre gruppi è somma di 3 sottogruppi propri d'ordine 4. Indichiamoli rispettivamente

(10) Vedasi nota (5).

(11) *I gruppi che possono pensarsi come somma di tre loro sottogruppi*, Boll. U. M. I., pp. 216-218 (1926).

con $I'_{i,1}, I'_{i,2}, I'_{i,3}$ dove l'indice i ($i = 2, 3, 4$) mette in evidenza il gruppo G'_i cui essi appartengono.

Consideriamo poi i tre gruppi $f^{-1}(I'_{i,1})$, $f^{-1}(I'_{i,2})$, $f^{-1}(I'_{i,3})$ di G'_i.

Essi sono, in virtù delle proposizioni b) e d) del n. 2, tre sottogruppi propri di G_i, e inoltre distinti data la univocità della corrispondenza τ.

Posto per brevità di scrittura $I_{i,j} = f^{-1}(I'_{i,j})$ dimostriamo il teorema: *Il gruppo* G_i ($= 2, 3, 4$) *è somma dei tre sottogruppi propri distinti* $I_{i,1}, I_{i,2}, I_{i,3}$; $G_i = I_{i,1} + I_{i,2} + I_{i,3}$.

Invero sia g_i un generico elemento di G_i. Il trasformato del gruppo ciclico $\{g_i\}$ mediante τ, vale a dire il gruppo $f(\{g_i\})$, deve essere ciclico. Infatti, pel teorema del n. 4, non può essere $f(\{g_i\}) = G'_i$, nè può essere $f(\{g_i\}) = H'_i$ sottogruppo proprio non ciclico di G'_i, perchè H'_i avrebbe allora ordine 4 e sarebbe quadrinomio, mentre nel lavoro di Permutti,.è provato che tra un gruppo ciclico e un gruppo quadrinomio non può essere un omomorfismo strutturale. Pertanto $f(\{g_i\})$ è ciclico. Sia g'_i un suo elemento generatore.

Poichè g'_i deve essere in uno dei 3 sottogruppi $I'_{i,1}, I'_{i,2}, I'_{i,3}$, il gruppo $f(\{g_i\}) = \{g'_i\}$ sarà contenuto in uno almeno dei tre gruppi $I'_{i,1}, I'_{i,2}, I'_{i,3}$.

Ma allora, in virtù della b) del n. 2, il gruppo $\{g_i\}$ e quindi anche l'elemento g_i è contenuto in uno almeno dei gruppi $I_{i,1}, I_{i,2}, I_{i,3}$.

Data la genericità dell'elemento g_i scelto in G_i, si conclude coll'asserto.

Ne segue che: $G_i = I_{i,1} \cup I_{i,2} \cup I_{i,3}$.

Per il citato teorema dello Scorza abbiamo che il gruppo $I_{i,1} \cap I_{i,2} \cap I_{i,3}$ è un sottogruppo normale di G_i, mentre il gruppo fattoriale $\dfrac{G_i}{I_{i,1} \cap I_{i,2} \cap I_{i,3}}$ è un gruppo quadrinomio.

Al gruppo $I_{i,1} \cap I_{i,2} \cap I_{i,3}$ corrisponde in G'_i mediante l'omomorfismo strutturale τ il gruppo $I'_{i,1} \cap I'_{i,2} \cap I'_{i,3}$. Consideriamo poi il gruppo $f^{-1}(I'_{i,1} \cap I'_{i,2} \cap I'_{i,3})$.

In virtù della prop. b) del n. 2, il gruppo $f^{-1}(I'_{i,1} \cap I'_{i,2} \cap I'_{i,3})$, che indichiamo semplicemente con H_i, contiene il gruppo $I_{i,1} \cap I_{i,2} \cap I_{i,3}$; $H_i \geq I_{i,1} \cap I_{i,2} \cap I_{i,3}$ (1).

Viceversa, poichè il gruppo $I'_{i,1} \cap I'_{i,2} \cap I'_{i,3}$ è un sottogruppo comune ai 3 gruppi $I'_{i,1}$, $I'_{i,2}$, $I'_{i,3}$, il gruppo H_i è contenuto sia in $I_{i,1}$, sia in $I_{i,2}$, sia in $I_{i,3}$, e quindi sussiste pure la relazione $H_i \leq I_{i,1} \cap I_{i,2} \cap I_{i,3}$ (2).

Confrontando la (1) con la (2) concludiamo con la relazione $H_i = I_{i,1} \cap I_{i,2} \cap I_{i,3}$.

Indicato con h_i l'ordine di H_i, messo in evidenza il fattore potenza di 2: $h_i = 2^{\alpha_i} q_i$, l'ordine g_i di G_i risulta allora in virtù del teorema dello Scorza $g_i = 4\, h_i = 2^{\alpha_i+2}\, q_i$; poichè $G_i > I_{i,j} > H_i$ l'ordine r_i di $I_{i,j}$ è $r_i = 2\, h_i = 2^{\alpha_i+1}\, q_i$ e quindi H_i è d'indice 2 in $I_{i,j}$ e $I_{i,j}$ è d'indice 2 in G_i.

6. - Teniamo ora presente che i gruppi $I'_{i,1}, I'_{i,2}, I'_{i,3}$ sono tutti e tre gruppi quadrinomi, oppure due ciclici e uno quadrinomio, o uno ciclico e due quadrinomi a seconda che i è rispettivamente uguale ad 2, 3, 4.

In virtù degli studi dello Zappa e del Permutti [12] possiamo dire che il gruppo $I_{i,j}$ è rappresentabile in uno dei seguenti modi:

I) Se $I'_{i,j}$ è ciclico, $I_{i,j} = R_{i,j} \cup S_{i,j}$ con $R_{i,j}$ sottogruppo normale di $I_{i,j}$, $S_{i,j}$ sottogruppo di Sylow di $I_{i,j}$ ciclico e d'ordine primo con quello di $R_{i,j}$. Inoltre il gruppo $S_{i,j}$ contiene il gruppo $P_{i,j} = f_{-1}(I'_{i,j})$; $P_{i,j}$ appartiene al centro di $I_{i,j}$ e $f(R_{i,j}) = U'_i$ (sottogruppo identico di G'_i).

II) Se $I'_{i,j}$ è un gruppo quadrinomio, $I_{i,j} = R_{i,j} \times S_{i,j}$, dove $S_{i,j}$ è un gruppo quadrinomio o isomorfo al gruppo dei quaternioni mentre l'ordine di $R_{i,j}$ è dispari. Inoltre $S_{i,j} = f_{-1}(I'_{i,j})$, $f(R_{i,j}) = U'_i$.

Ricordati questi risultati, siamo in grado di dimostrare che i tre gruppi $S_{i,1}, S_{i,2}, S_{i,3}$ sono p-gruppi d'ordine pari.

La cosa è evidente nel caso di $i = 2$, perchè allora i tre gruppi $I'_{2,1}, I'_{2,2}, I'_{2,3}$ sono quadrinomi. Per $i = 3$ oppure $i = 4$, ricordiamo invece che il gruppo $I'_{i,j} \cap I'_{i,k}$ è un sottogruppo d'ordine 2 di G'_i $(i = 3, 4)$, $(j, k$ indica una disposizione semplice degli indici 1, 2, 3).

Pertanto il gruppo non identico $f_{-1}(I'_{i,j} \cap I'_{i,k})$ è contenuto nei tre p-gruppi $S_{i,1}, S_{i,2}, S_{i,3}$ che saranno pertanto d'ordine

[12] Vedasi nota [3] e [5].

pari, essendo tale almeno uno di essi. Se teniamo allora presente la relazione $r_i = 2^{\alpha_i+1} q_i$ e il fatto che $S_{i,j}$ è un sottogruppo di Sylow di $I_{i,j}$, abbiamo che l'ordine di $S_{i,j}$ è precisamente 2^{α_i+1}. Da qui e da quanto detto sopra segue che l'ordine di $R_{i,j}$ è in ogni caso un numero dispari.

Teorema. - *I tre gruppi* $R_{i,1}$, $R_{i,2}$, $R_{i,3}$ *coincidono.*

Invero, poichè $R_{i,j}$ è un sottogruppo proprio normale di G_i d'indice pari, gli ordini di $R_{i,1}$, $R_{i,2}$, $R_{i,3}$ sono primi coll'indice di uno qualsiasi di essi in G_i. Preso allora ad es. il gruppo $R_{i,1}$, esso è normale in G_i e contiene quindi ogni gruppo di G_i il cui ordine è primo coll'indice di $R_{i,1}$ in G_i [13].

Ora, per quanto visto, i gruppi $R_{i,2}, R_{i,3}$ soddisfano alla condizione richiesta e perciò risulta $R_{i,1} \geq R_{i,2}$, $R_{i,1} \geq R_{i,3}$.

Analogamente si vedrebbe che $R_{i,1} \leq R_{i,2}$, $R_{i,1} \leq R_{i,3}$ e quindi infine si conclude che $R_{i,1} = R_{i,2} = R_{i,3}$, c. v. d.

Porremo allora per brevità di scrittura $R_i = R_{i,1} = R_{i,2} = R_{i,3}$.

7. - Abbiamo visto nel n. 6 che qualora il gruppo $I'_{i,j}$ fosse ciclico, il gruppo $I_{i,j}$ è dato come unione di 2 gruppi $I_{i,j} = R_i \cup S_{i,j}$ con R_i sottogruppo normale di $I_{i,j}$ d'ordine dispari ed $S_{i,j}$ sottogruppo di Sylow d'ordine pari, ciclico e contenente il gruppo $P_{i,j} = f_{-1}(I'_{i,j})$, gruppo che appartiene al centro di $I_{i,j}$.

Vogliamo qui precisare che *il gruppo* $P_{i,j}$ *coincide addirittura col gruppo* $S_{i,j}$.

Invero, poichè $S_{i,j}$ è un gruppo di Sylow di $I_{i,j}$ ciclico d'ordine pari tali saranno pure i suoi coniugati, ossia tutti i sottogruppi di Sylow di $I_{i,j}$ d'ordine pari. Inoltre $P_{i,j}$, come appartenente al centro di $I_{i,j}$, appartiene a tutti i sottogruppi di Sylow di $I_{i,j}$ d'ordine pari.

Se allora $P_{i,j}$ fosse un sottogruppo proprio di $S_{i,j}$, tutti i sottogruppi di Sylow di H_i d'ordine pari dovrebbero pure contenere il gruppo $P_{i,j}$ essendo H_i d'indice 2 in $I_{i,j}$. Ma allora sussisterebbe l'assurda relazione: $f(H_i) \geq I'_{i,j}$ perchè $P_{i,j} \leq H_i$; dunque $P_{i,j} = S_{i,j}$ c. v. d.

Visto così che il gruppo $S_{i,j}$, coincide col gruppo $P_{i,j}$, tenuto

[13] G. Scorza: *Gruppi Astratti*; pag. 27 (nota).

conto che $P_{i,j}$ appartiene al centro di $I_{i,j}$ e che l'ordine di $P_{i,j}$ è primo con quello di R_i, risulta: $I_{i,j} = R_i \times S_{i,j}$.

Riassumendo abbiamo:

Se $I'_{i,j}$ indica un sottogruppo d'ordine 4 del gruppo G'_i, dove G'_i è un gruppo d'ordine 8 non ciclico nè isomorfo al gruppo dei quaternioni, e se G_i è un gruppo strutturalmente omomorfo a G'_i, il gruppo $I_{i,j} = f^{-1}(I'_{i,j})$ è del tipo: $I_{i,j} = R_i \times S_{i,j}$ dove R_i è un sottogruppo d'ordine dispari ed $S_{i,j}$ è un p-gruppo d'ordine pari ciclico se tale è $I'_{i,j}$; se $I'_{i,j}$ è invece un gruppo quadrinomio, $S_{i,j}$ è un gruppo quadrinomio o isomorfo al gruppo dei quaternioni.

L'ordine dei tre gruppi $S_{i,1}$, $S_{i,2}$, $S_{i,3}$ è o per tutti e tre uguale a 4 o per tutti e tre uguale a 8. Inoltre $S_{i,j} = f_{-1}(I'_{i,j})$.

8. - A questo punto passiamo ad esaminare separatamente i tre casi:

I. caso: G' gruppo abeliano d'ordine 8 e tipo $(1, 1, 1)$;

II. caso: G' gruppo abeliano d'ordine 8 e tipo $(2, 1)$;

III. caso: G' gruppo diedrale d'ordine 8.

Nel I. caso i tre sottogruppi d'ordine 4 di G', I'_1, I'_2, I'_3 sono gruppi quadrinomi. Pertanto se G è un gruppo strutturalmente omomorfo a G', posto, come al solito, $I_i = f^{-1}(I'_i)$ valgono le relazioni:

$$I_1 = R \times S_1, \qquad I_2 = R \times S_2, \qquad I_3 = R \times S_3$$

con R sottogruppo d'ordine dispari ed S_1, S_2, S_3 tutti e tre quadrinomi o tutti e tre isomorfi al gruppo dei quaternioni.

Inoltre $S_i = f_{-1}(I'_i)$ (3).

Poichè il gruppo I_i è d'indice 2 in G, se S è un sottogruppo di Sylow di G d'ordine pari, S non risulta contenuto in nessuno dei sottogruppi I_1, I_2, I_3 e quindi $f(S) = G'$. S contiene allora in virtù della (3) i gruppi distinti S_1, S_2, S_3 che sono d'indice 2 in S (n. 6). Ne segue che $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$. Visto che $G = I_1 + I_2 + I_3 = I_1 \cup I_2 \cup I_3$, riesce $G = R \cup (S_1 \cup S_2 \cup S_3) =$

$= R \cup S$. Poichè ogni elemento di R era permutabile con ogni elemento di S_i e poichè l'ordine di R è primo con l'ordine di S, riesce $G = R \times S$.

Siano i tre gruppi S_1, S_2, S_3 gruppi quadrinomi.

Essendo l'indice 2 di S_i in S, l'ordine di S in questo caso sarà 8. Esso contiene tre gruppi quadrinomi distinti e ciò basta per concludere che S è un gruppo abeliano d'ordine 8 e tipo $(1, 1, 1)$ [14].

Siano invece i gruppi S_1, S_2, S_3 isomorfi al gruppo dei quaternioni. L'ordine di S risulta allora $2 \cdot 8 = 16$.

Poichè $f(S_i \cap S_j) = I'_i \cap I'_j$ è un gruppo non identico, i gruppi S_1, S_2, S_3 si tagliano a due a due secondo un gruppo non identico. Ma un gruppo isomorfo al gruppo dei quaternioni possiede un solo sottogruppo d'ordine 2 e perciò i tre gruppi S_1, S_2, S_3 hanno lo stesso gruppo d'ordine 2, che indichiamo con N. Consideriamo poi un altro gruppo M d'ordine 2 di G. Essendo $f(M) \neq G'$, M è contenuto in uno dei gruppi I_1, I_2, I_3 ad es. per fissare le idee in I_1. Poichè M è un p-gruppo d'ordine pari esso sarà contenuto nell'unico sottogruppo di Sylow di I_1 d'ordine pari: S_1. Pertanto $M < S_1$, Essendo S_1 per ipotesi isomorfo al gruppo dei quaternioni, esso contiene il solo sottogruppo N d'ordine 2 e quindi $M = N$. Dunque il gruppo S ha un solo gruppo d'ordine 2 e non essendo S ciclico, esso risulta un gruppo generalizzato dei quaternioni d'ordine 16.

Facciamo vedere che il gruppo S non può essere strutturalmente omomorfo a G'.

Infatti il gruppo G conterrebbe allora un gruppo $\{g\}$ ciclico d'ordine 8 non contenuto nè in I_1 nè in I_2 nè in I_3, e quindi dovrebbe essere $f(\{g\}) = G'$, ciò che è assurdo.

Concludiamo dunque che *condizione necessaria perchè un gruppo d'ordine finito G sia strutturalmente omomorfo al gruppo abeliano G' d'ordine 8 e tipo $(1, 1, 1)$, è che sia: $G = R \times S$ con R gruppo d'ordine dispari ed S isomorfo al gruppo G'.*

(14) Vedasi nota (6).

Nel II. caso il gruppo G' contiene un gruppo quadrinomio che indichiamo con I'_1 e due gruppi ciclici d'ordine 4: I'_2, I'_3.

Se G è un gruppo strutturalmente omomorfo a G' per i tre gruppi $I_1 = f^{-1}(I'_1), I_2 = f^{-1}(I'_2), I_3 = f^{-1}(I'_3)$ si hanno le relazioni:

$$(4) \qquad I_1 = R \times S_1 \qquad I_2 = R \times S_2 \qquad I_3 = R \times S_3$$

dove R è un gruppo d'ordine dispari ed S_1 è un gruppo quadrinomio oppure isomorfo al gruppo dei quaternioni, mentre S_2, S_3 sono gruppi ciclici d'ordine uguale all'ordine di S_1.

Indichiamo con S un sottogruppo di Sylow di G d'ordine pari.

Come nel primo caso si vede che valgono le relazioni:

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \qquad\qquad G = R \times S .$$

Se S_1 è un gruppo quadrinomio, gli ordini dei gruppi S_1, S_2, S_3 saranno uguali a 4. L'ordine di S sarà 8 e poichè contiene due gruppi ciclici d'ordine 4 e un gruppo quadrinomio, possiamo dire che il gruppo S d'ordine 8 è abeliano del tipo (1, 2) ([15]).

Se S_1 è invece un gruppo isomorfo al gruppo dei quaternioni, il gruppo S avrà l'ordine uguale a $2 \cdot 8 = 16$.

Proviamo che S contiene un solo sottogruppo d'ordine 2.

Indichiamo con M_i l'unico sottogruppo d'ordine 2 di S_i. Essendo $S_i > T$ con $T = f_{-1}(I'_1 \cap I'_2 \cap I'_3)$ poichè $I'_1 \cap I'_2 \cap I'_3 > > U'$, T è ciclico d'ordine una potenza di 2 e quindi $M_1 = M_2 = M_3$. Poniamo $M_i = M$. Sia poi N un altro sottogruppo ciclico d'ordine 2 di S. Poichè non può essere $f(N) = G'$, il gruppo N sarà contenuto in almeno uno dei gruppi I_i e quindi per le (4) in almeno uno dei gruppi S_1, S_2, S_3. Ma allora $N = M$ e quindi S ha un solo sottogruppo d'ordine 2. Poichè d'altra parte esso contiene più di un sottogruppo ciclico d'indice 2 (S_1, S_2), in virtù di un teorema sui p-gruppi d'ordine pari,

([15]) Vedasi nota ([6]).

si conclude che S è isomorfo al gruppo dei quaternioni. Ma ciò è assurdo essendo l'ordine S uguale a 16.

L'ipotesi che S_1 sia isomorfo al gruppo dei quaternioni va dunque scartata.

Concludiamo che: *Condizione necessaria perchè un gruppo finito G sia strutturalmente omomorfo al gruppo abeliano G' d'ordine 8 e tipo (1, 2) è che sia: $G = R \times S$ con R gruppo d'ordine dispari ed S isomorfo a G'.*

Nel III. caso il gruppo G' contiene un gruppo ciclico I'_1 d'ordine 4 e due gruppi quadrinomi I'_2, I'_3. Se G è un gruppo strutturalmente omomorfo a G', posto $I_i = f^{-1}(I'_i)$, sussistono le relazioni:

$$G = I_1 + I_2 + I_3 = I_1 \cup I_2 \cup I_3;$$

$$I_1 = R \times S_1, \qquad I_2 = R \times S_2, \qquad I_3 = R \times S_3$$

con R gruppo d'ordine dispari ed S_2, S_3 tutti e due gruppi quadrinomi o tutti e due isomorfi al gruppo dei quaternioni mentre S_1 è un gruppo ciclico dello stesso ordine di S_i $(i = 2, 3)$. Inoltre $S_i = f_{-1}(I'_i)$.

Studiamo il gruppo unione $S_1 \cup S_2 \cup S_3$.

Se S indica un sottogruppo di Sylow di G d'ordine pari, essendo $f(S) = G'$, esso contiene i tre gruppi distinti S_1, S_2, S_3 che sono d'indice 2 in S e quindi $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$.

Distinguiamo due casi:

I) S_i un gruppo quadrinomio $(i = 2, 3)$

II) S_i isomorfo al gruppo dei quaternioni.

Nel I caso l'ordine di S_i è 4 e perciò il gruppo S è d'ordine $2 \cdot 4 = 8$; contiene due gruppi quadrinomi ed un gruppo ciclico d'ordine 4.

Ciò basta per concludere che S sia isomorfo G' [16].

Nel secondo caso, l'ordine di S è $2 \cdot 8 = 16$. Con un ragionamento simile a quello che si è fatto nel caso che G' era un gruppo abeliano d'ordine 8 e tipo (1,2), si vedrebbe che S è un gruppo generalizzato dei quaternioni d'ordine 16.

[16] Vedasi nota [6].

Dunque: *Condizione necessaria perchè un gruppo finito G sia strutturalmente omomorfo al gruppo diedrale d'ordine* 8, *è che sia*: $G = R \times S$ *con* R *gruppo d'ordine dispari ed* S *gruppo o isomorfo al gruppo* G' *o isomorfo al gruppo generalizzato dei quaternioni d'ordine* 16.

9. - In questo numero vogliamo invertire i risultati del n. 8.

Sia dunque G_i un gruppo prodotto diretto di due gruppi: $G_i = R_i \times S_i$ con R_i sottogruppo d'ordine dispari ed S_i isomorfo al gruppo G'_i, dove G'_i indica rispettivamente il gruppo abeliano d'ordine 8 e tipo $(1, 1, 1)$, il gruppo abeliano d'ordine 8 e tipo $(2, 1)$, il gruppo diedrale d'ordine 8 a seconda che i è uguale ad $2, 3, 4$.

In virtù di un teorema dello Zappa [17] l'omomorfismo ordinario che si ottiene tra il gruppo G_i e il $\frac{G_i}{R_i}$ associando ad ogni elemento di G_i quel sistema laterale di G_i rispetto R_i che lo contiene, è pure un omomorfismo strutturale. D'altra parte, poichè i gruppi $\frac{G_i}{R_i}$ ed G'_i sono isomorfi [18] e poichè un isomorfismo tra due gruppi è anche un omomorfismo strutturale concludiamo che G_i è strutturalmente omomorfo a G'_i.

Sia infine G_4 un gruppo dato come prodotto diretto di un gruppo R_4 d'ordine dispari e di un gruppo S_4 generalizzato dei quaternioni d'ordine 16: $G_4 = R_4 \times S_4$.

Per un teorema dello Zappa il gruppo G_4 risulta strutturalmente omomorfo al gruppo S_4 [19]. Se riusciamo a far vedere che a sua volta il gruppo S_4 è strutturalmente omomorfo al gruppo diedrale G'_4 d'ordine 8, allora G_4 è pure strutturalmente omomorfo a G'_4.

Perciò osserviamo che se C è il centro di S_4, il gruppo $\frac{S_4}{C}$ è un gruppo diedrale d'ordine 8 e perciò isomorfo al gruppo G_4. D'altra parte l'omomorfismo ordinario tra il gruppo S_4 e

(17) Vedasi nota (4).

(18) G. Scorza, *Gruppi Astratti*, n. 66.

(19) Vedasi nota (4).

il gruppo $\frac{S_4}{C}$ in virtù di un teorema dello ZAPPA [10] è anche un omomorfismo strutturale, sicchè S_4 è strutturalmente omomorfo a G_4.

11. – TEOREMA CONCLUSIVO. – *Condizione necessaria e sufficiente perchè un gruppo finito G sia strutturalmente omomorfo ad un gruppo G' d'ordine* 8 *non ciclico, è che sia*: $G = R \times \boldsymbol{S}$ *con* $\boldsymbol{R}$ *gruppo d'ordine dispari ed* $\boldsymbol{S}$, *se G' non è il gruppo diedrale, isomorfo a G'. Se G' è il gruppo diedrale, $\boldsymbol{S}$ può essere isomorfo a G' oppure un gruppo generalizzato dei quaternioni d'ordine* 16.