Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova

Giovanni Zacher

Determinazione dei gruppi finiti struturalmente omomorfi ad un p-gruppo hamiltoniano finito

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 20 (1951), p. 357-364

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1951__20__357_0>

DETERMINAZIONE DEI GRUPPI FINITI STRUTTURALMENTE OMOMORFI AD UN P-GRUPPO HAMILTONIANO FINITO

Nota (*) *di* GIOVANNI ZACHER (*a Padova*).

Lo scopo precipuo propostomi in questa nota era di assegnare una condizione necessaria e sufficiente perchè un gruppo finito G si possa porre in omomorfismo strutturale con un p-gruppo hamiltoniano finito G'. Nella risoluzione di tale problema trovai opportuno di caratterizzare i gruppi finiti che sono strutturalmente omomorfi ad un gruppo abeliano d' ordine 2^s e tipo $(2, 1, 1 \ldots 1)$.

1. – In questo numero richiamiamo alcune proprietà fondamentali sui p-gruppi hamiltoniani finiti, utili per il nostro problema.

Indichiamo con G' un p-gruppo hamiltoniano finito. Il suo ordine dovrà allora essere un numero pari in quanto G' deve contenere un gruppo isomorfo al gruppo dei quaternioni [1]. Anzi per G' sussiste una rappresentazione del tipo $G' = H' \times Q'$ (1) con Q' isomorfo al gruppo dei quaternioni ed H' un gruppo ad elementi tutti bilateri. Il gruppo Q' contiene 3 elementi a'_1, a'_2, a'_3 del periodo 4 soddisfacenti alle relazioni $\{a'_i, a'_j\} = Q', a'^2_1 = a'^2_2 = a'^2_3$, $a'_3 = a'_1 a'_2$ ed $\{a^{2'}_i\}$ costituisce il centro C' di Q'.

Mi sono accorto a lavoro compiuto che lo stesso risultato fu già trovato per altra via da M SUZUKI: *On the homomorphisms of finite groups*, in Tr. of the A. Math. Soc., march, (1951).

(*) Pervenuta in Redazione il 15 luglio 1951.

[1] G. SCORZA: *Gruppi Astratti*, pag. 87.

Consideriamo ora i 3 gruppi $\{a'_1\} \times H'$, $\{a'_2\} \times H'$, $\{a'_3\} \times H'$. Tenuto conto che un generico elemento g di G' per la (1) ha la forma $g' = h' q'$ con q' in Q' ed h' in H' e che ogni elemento di Q' appartiene ad almeno uno dei 3 gruppi ciclici $\{a'_1\}$, $\{a'_2\}$, $\{a'_3\}$ concludiamo colla relazione $G' = \{a'_1\} \times H' + \{a'_2\} \times H' + \{a'_3\} \times H'$ (2).

Questi tre gruppi sono d'ordine 2 in G' e contengono tutti e 3 per la (2) il sottogruppo proprio $C' \times H'$ per cui, posto per semplicità $I'_i = \{a'_i\} \times H'$, risulta $I'_i \cap I'_j = C' \times H'$, ed il gruppo I'_i è abeliano d'ordine 2^{s-1} e tipo $(2, 1 \ldots 1)$ mentre $C' \times H'$ è d'ordine 2^{s-2} e tipo $(1, 1 \ldots 1)$.

Supporremo in questo studio che l'ordine di H' sia maggiore di uno, in quanto altrimenti si cadrebbe nel caso, da me già studiato (²), che G' coincidesse con un gruppo isomorfo al gruppo dei quaternioni.

2. - Indichiamo con G un gruppo finito strutturalmente omomorfo al gruppo G' e indichiamo con g un generico elemento di G. Consideriamo quindi il gruppo ciclico $\{g\}$ generato dall'elemento g e sia $f(\{g\})$ il gruppo di G' che corrisponde a G in un omomorfismo strutturale fissato tra G e G'.

LEMMA: Il gruppo $f(\{g\})$ è un sottogruppo ciclico di G'.

Invero il gruppo $f(\{g\})$ non può contenere nè un gruppo isomorfo al gruppo dei quaternioni nè un gruppo quadrinomio in quanto ciò implicherebbe che un sottogruppo del gruppo ciclico $\{g\}$ fosse strutturalmente omomorfo ad uno dei gruppi citati, il che è assurdo (²). D'altra parte dalla relazione $G' = Q' \times H'$ si ricava che ogni sottogruppo d'ordine 8 di G' è o isormorfo al gruppo dei quaternioni oppure contiene un gruppo quadrinomio.

Quindi $f(\{g\})$ dovrà essere un gruppo d'ordine al massimo quattro, nè quadrinomio e quindi ciclico.

(²) G. ZACHER: *Determinazione dei gruppi finiti strutturalmente omomorfi ad un gruppo d'ordine 8 non ciclico*, Rend. Sem. Mat. di Padova, pp. 315–328 (1951).

Indichiamo con g' un elemento generatore di $f(\{g\})$. In virtù della relazione (2) dimostrato al n. 1, l'elemento g' sarà contenuto necessariamente in uno almeno dei 3 gruppi I'_1, I'_2, I'_3 e quindi pure il gruppo ciclico $f(\{g\}) = \{g'\}$.

Ne segue che il gruppo $\{g\}$ e quindi g stesso sta almeno in uno dei 3 gruppi $I_1 = f^{-1}(I'_1)$, $I_2 = f^{-1}(I'_2)$, $I_3 = f^{-1}(I'_3)$, dove $f^{-1}(A')$ indica il gruppo unione di tutti i sottogruppi di G che l'omomorfismo fissato tra G e G' trasforma $= A'$.

Tenendo conto della genericità dell'elemento g scelto in G, concludiamo col teorema:

Se G è un gruppo finito strutturalmente omomorfo ad un p-gruppo hamiltoniano G', il gruppo G è somma di 3 suoi sottogruppi propri distinti:

(3) $$G = I_1 + I_2 + I_3 .$$

3 - Conviene a questo punto, per continuità di esposizione, anticipare un teorema che verrà dimostrato al n. 4.

Teorema: Se $\overline{G}$ è un gruppo finito strutturalmente omomorfo ad un gruppo $\overline{G}'$ d'ordine 2^s, abeliano e di tipo $(2, 1 \dots 1)$ si ha:

$$\overline{G} = \overline{R} \times \overline{S}$$

con $\overline{R}$ gruppo d'ordine dispari ed $\overline{S}$ isomorfo a $\overline{G}'$. Inoltre $\varphi^{-1}(\overline{U}') = \overline{R}$ (4) e il gruppo $\varphi_{-1}(\overline{G}')$ intersezione di tutti i sottogruppi di $\overline{G}$ che l'omomorfismo strutturale unita in $\overline{G}'$ coincide con $\overline{S}$, $\overline{S} = \varphi_{-1}(\overline{G}')$. (4)*bis*.

Sfruttando questo teorema, la relazione (3) ci permette di scrivere:

(5) $$G = R_1 \times S_1 + R_2 \times S_2 + R_3 \times S_3$$

dove il gruppo S_i è isomorfo al gruppo I'_i, mentre R_i è un gruppo d'ordine dispari ed $f(R_i) = U'$.

TEOREMA: I 3 gruppi R_1, R_2, R_3 coincidono.

Il gruppo $f^{-1}(U')$ è contenuto nel gruppo $I_i = f^{-1}(I'_i)$ e pertanto coincide col sottogruppo unione di tutti i sottogruppi I_i che l'omomorfismo strutturale muta in U', vale a dire per la (4) $R = f^{-1}(U') = R_i$.

Da qui e per la (5) concludiamo colla relazione $G = R \times S_1 + R \times S_2 + R \times S_3 = R \cup (S_1 \cup S_2 \cup S_3)$ (6).

Se indichiamo con r l'ordine del gruppo R, per la $I_i = R \times S_i$ con S_i isomorfo con I'_i, l'ordine di I_i è $2^{s-1} r$, mentre l'ordine g di G pel teorema di SCORZA vale $g = 2 \cdot 2^{s-1} r = 2^s r$ (7).

Se ora S indica un sottogruppo di SYLOW d'ordine pari di G, l'ordine di S per la (7) dovrà essere 2^s essendo r un numero dispari e quindi il gruppo $S \cup R$ coinciderà per la (7) con G.

D'altra parte abbiamo visto che $R = f^{-1}(U')$ e otteniamo quindi $G' = f(G) = f(R \cup S) = f(R) \cup f(S) = U' \cup f(S) = f(S)$.

Ma allora, in virtù della (4) *bis*, il gruppo S d'ordine 2^s contiene i 3 gruppi distinti S_1, S_2, S_3 d'ordine 2^{s-1} e quindi $S = S_i \cup S_j$.

Se teniamo presente che $S \cap R = U$ e che ogni elemento di S_i e quindi anche di $S = S_i \cup S_j$ è permutabile con ogni elemento di R, concludiamo che $G = R \times S$.

Cerchiamo adesso di precisare la natura del gruppo S.

Abbiamo visto al n. 1 che sussistono le relazioni:

$$G' = H' \times Q' = \{a'_1\} \times H' + \{a'_2\} \times H' + \{a'_3\} \times H'$$

con

$$\{a'_j, a'_i\} = Q'.$$

Poichè $f(S) = G' = H' \times Q'$, il gruppo S contiene il gruppo $Q = f_{-1}(Q')$ e questo gruppo è isomorfo al gruppo dei quaternioni (²).

Il gruppo Q contiene i 3 gruppi $f_{-1}(\{a'_i\})$ $i = 1, 2, 3$ che saranno per la natura di Q tutti e 3 ciclici d'ordine 4 per cui avremo $Q = \{a_i, a_j\}$ dove a_k indica un elemento generatore del gruppo $f_{-1}(\{a'_k\})$ $(k = 1, 2, 3)$; inoltre, poichè $\{a'_i\}$ appartiene ad $f(S_i) = I'_i$ sussisterà pure la relazione $S_i > f_{-1}\{a'_i\}$.

Il gruppo $H = f_{-1}(H')$ è contenuto nei 3 gruppi S_1, S_2, S_3 essendolo H' in I'_1, I'_2, I_3.

TEOREMA: Il gruppo $\{a_i\} \cup H$ coincide col gruppo S_i.

Invero, poichè $\{a_i\} < S_i$, $H < S_i$, sarà $\{a_i\} \cup H \leq S_i$. Viceversa $f(\{a_i\} \cup H) = \{a'_i\} \times H' = I'_i$ e quindi $\{a_i\} \cup H \geq$ $\geq f_{-1}(I'_i) = S_i$. Pertanto $\{a_i\} \cup H = S_i$.

Ricordando che S_i è abeliano e poichè $\{a_i\} \cap H = U$ avendosi $f(\{a_i\} \wedge H) = \{a'_i\} \wedge H' = U'$ ed $S_i \simeq I'_i$, concludiamo che $S_i = \{a_i\} \times H$.

L'ordine di H coincide allora coll'ordine di H' e quindi H è un gruppo isomorfo (³) ad H'.

Risulta così provato il sussistere delle 3 uguaglianze

$$S_1 = \{a_1\} \times H, \; S_2 = \{a_2\} \times H, \; S_3 = \{a_3\} H.$$

Da queste si trae che il gruppo $Q = \{a_1, a_2, a_3\}$ è permutabile elemento per elemento con H e poichè $S_i \cup S_j = S$ si conclude che

$$S = Q \times H$$

ossia S è un p-gruppo hamiltoniano dello stesso ordine di G', per cui S è isomorfo a G'.

Riassumendo abbiamo dunque:

Condizione necessaria perchè un gruppo finito G sia strutturalmente omomorfo ad un p-gruppo hamiltoniano G' è che sia:

$$G = R \times S$$

con R gruppo ordine dispari ed S isomorfo a G'.

(³) *Determinazione dei gruppi finiti strutturalmente omomorfi ad un gruppo abeliano d'ordine 2^s e tipo* (1, 1 . . . 1), di G. ZACHER, Rend. Sem. Mat. di Padova, pp. 346-356 (1951).

La sufficienza della condizione enunciata si deduce poi immediatamente da un teorema dello ZAPPA ([4]).

4. – Come già si è detto al n. 2, dimostreremo qui il seguente teorema:

Condizione necessaria e sufficiente perchè un gruppo finito G sia strutturalmente omomorfo ad un p-gruppo abeliano G' d'ordine 2^s e tipo $(2, 1 \ldots 1)$ è che sia:

$$G = R \times S$$

con R gruppo d'ordine dispari ed S isomorfo a G'.

Il gruppo G' si può rappresentare come prodotto diretto di 2 gruppi, A' ed H', dei quali uno ciclico d'ordine 4 e l'altro ad elementi tutti bilateri, $G' = \{a'\} \times H'$. Supporremo che l'ordine di G' sia 2^s con $s \geq 4$, giacchè il caso di $s = 3$ è già stato risolto ([2]). L'ordine di H' sarà allora maggiore ed uguale a 4 e potremo quindi H' scomporre nel prodotto di 2 gruppi $H' = H'_1 \times H'_2$ con H'_1 gruppo quadrinomio. Avremo allora:

$$\frac{G'}{\{a'\} \times H'_2} = \frac{\{a'\} \times H'_1 \times H'_2}{\{a'\} \times H'_2} \simeq \frac{H'_1}{\{a\} \times H'_2 \wedge H'_1} = \frac{H'_1}{U'} .$$

Da qui deduciamo che il gruppo fattoriale $\dfrac{G'}{\{a'_1\} \times H'_2}$ è un gruppo quadrinomio e quindi pel teorema di SCORZA, G' è somma di 3 gruppi d'indice 2, $I'_1\, I'_2, I'_3$ i cui elementi sono

$$\{\{a'\} \times H'_2\} + h'_1 \{\{a'\} \times H'_2\}$$

$$\{\{a'\} \times H'_2\} + h'_2 \{\{a'\} \times H'_2\}$$

$$\{\{a'\} \times H'_2\} + h'_3 \{\{a'\} \times H'_2\}$$

con h'_1, h'_2, h'_3 i 3 elementi non identici di H'_1.

([4]) G. ZAPPA: *Sulla condizione perchè un omomorfismo ordinario sia anche un omomorfismo strutturale*, Giornale di Mat. di Battaglini vol. 78, pp. 182–192.

Poichè, per un teorema generale sui p-gruppi alchiani, il gruppo G' non contiene che sottogruppi dello stesso tipo e gruppi di tipo $(1, 1 \ldots 1)$ e poichè I'_i contiene un gruppo ciclico d'ordine 4 $[\{a\}]$, concludiamo che i 3 gruppi I'_1, I'_2, I'_3 sono abeliani d'ordine 2^{s-1} e tipo $(2, 1 \ldots 1)$.

$$G' = I'_1 + I'_2 + I'_3, I'_i \wedge I'_j = \{a'\} \times H'_2. \tag{8}$$

Essendo il teorema enunciato all'inizio di questo numero vero nel caso di $s = 3$, applicando un procedimento d'induzione potremo supporre che se G è un gruppo strutturalmente omomorfo a G', si abbia che il gruppo $I_i = f^{-1}(I'_i)$ sia del tipo $I_i = R_i \times S_i$ con R_i d'ordine dispari ed S_i isomorfo a I'_i. Che i 3 gruppi R_1, R_2, R_3 coincidano si vede poi facilmente in quanto sono sottogruppi normali di $f^{-1}(U')$ d'indice primo cogli ordini r_1, r_2, r_3 di essi.

È immediato pure il fatto che $G = I_1 + I_2 + I_3$ (8) *bis* con $I_i = R \times S_i$ se si tiene presente che il gruppo $f(\{g\})$ è necessariamente per la natura di G' un gruppo ciclico. Dalla (8) *bis* si trae che $f^{-1}(U') = R$.

Se indichiamo con L'_i un generico sottogruppo d'indice 2 in G', per una proprietà poco prima ricordata, esso è abeliano di tipo $(1, 1 \ldots 1)$ oppure di tipo $(2, 1 \ldots 1)$ e quindi sottogruppi di Sylow d'ordine pari di $I_i = f^{-1}(L'_i)$ saranno[8] d'ordine 2^{s-1}.

Se allora S è un sottogruppo di Sylow d'ordine pari di G, S non sarà contenuto in $= I'_i$ e quindi $f(S) = G'$ ossia $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$.

Poichè $f^{-1}(U') = R$ e per la (8) *bis* abbiamo addiritura $S = S_1 + S_2 + S_3$.

Abbiamo visto che i 3 gruppi I'_1, I'_2, I'_3 contengono tutti il gruppo d'ordine 4 $\{a'\}$ e poichè $S_i = f_{-1}(I'_i)$ ed S_i è isomorfo a $I'_i (i = 1, 2, 3)$ il gruppo S_i conterrà il gruppo $\{a\} = f_{-1}(\{a'\})$ che sarà pure ciclico d'ordine 4.

Preso il gruppo S_1 avremo $S_1 = \{a\} \times N$ con N gruppo ad elementi tutti bilateri.

Sia poi s_2 un elemento bilatero di S_2 non contenuto in S_1. Detto poi s_1 un elemento bilatero di S_1 non identico, al gruppo

$\{s_1\} \cup \{s_2\}$ corrisponde in G' un gruppo quadrinomio, quindi $\{s_1\} \cup \{s_2\}$ dev'essere quadrinomio o isomorfo al gruppo dei quaternioni.

Ora la seconda alternativa è da escludersi in quanto un gruppo isomorfo al gruppo dei quaternioni non è generabile mediante 2 elementi d'ordine 2.

Nel primo caso si conclude che s_1 è permutabile con s_2 ed essendo s_1 un generico elemento d'ordine 2 di S_1, s_2 è permutabile con ogni elemento di S_1.

Ma allora $S = \{a\} \times H$ con H gruppo ad elementi tutti bilateri e quindi S isomorfo a G'.

Tenendo presente un teorema dello ZAPPA (4) abbiamo: *Condizione necessaria e sufficiente perchè un gruppo finito G sia strutturalmente omomorfo ad un gruppo abeliano G' d'ordine 2^s $(s \geq 3)$ e tipo $(2, 1 \ldots 1)$ è che sia $G = R \times S$ con R gruppo d'ordine dispari ed S isomorfo a G'.*