Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova

Marziano Marziani

Sulle forze ponderomotrici nei dielettrici anisotropi

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 20 (1951), p. 389-395

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1951__20__389_0>

SULLE FORZE PONDEROMOTRICI NEI DIELETTRICI ANISOTROPI

Nota (*) *di* MARZIANO MARZIANI (*a Ferrara*).

In un recente lavoro (1) ho calcolato le forze ponderomotrici agenti su un corpo dielettrico, rigido e isotropo, immerso in un campo elettrostatico, seguendo un procedimento che forse presenta qualche carattere di novità, poichè tien conto, tra l'altro, del brusco passaggio tra il dielettrico e il vuoto circostante.

In questa Nota ho esteso le precedenti considerazioni ai mezzi anisotropi e ho trovato, come era da attendersi, le stesse forze che si presentano per i mezzi isotropi più una coppia di momento $P \wedge \bar{F} d\tau$ (2) su ogni elemento di volume.

Ho inoltre dimostrato che l'azione complessiva è ancora equivalente dal punto di vista meccanico, come nel caso dei dielettrici isotropi alle forze agenti su una distribuzione di cariche volumetriche e superficiali con densità $-\operatorname{div} \bar{P}$ e $(\bar{P} \times \bar{n})$, risultato questo che non ho trovato esposto nella letteratura riguardante l'argomento in questione (3).

1. – Un corpo dielettrico, rigido e anisotropo, inizialmente scarico, viene immerso nel campo dovuto a conduttori elettriz-

(*) Pervenuta in Redazione l'11 settembre 1951.

(1) M. MARZIANI: « *Forze ponderomotrici nei dielettrici* » Annali dell'Università di Ferrara 1951.

(2) Le lettere soprassegnate indicano vettori.

(3) Si vedano p. e. POCKELS in *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*. Vol. V, Parte II, pagg. 350-392.

LIVENS « *The Theory of Electricity* », pag. 243, Cambridge University Press, 1918.

zati in equilibrio. Nell' espressione del vettore spostamento di MAXWELL $\overline{D} = \varepsilon \overline{E}$ al posto del coefficiente dielettrico scalare ε si ha, com' è noto, un' omografia vettoriale simmetrica (dilatazione), che nel seguito chiameremo omografia dielettrica.

Considerando le direzioni unite della dilatazione $\varepsilon(M)$, che supporremo siano distinte, verremo a collegare ad ogni punto M del dielettrico una terna di assi ortogonali M, x, y, z. Riferendo ad essa $\overline{D}(M)$, si ha

$$D_x = \varepsilon_1 E_x \qquad D_y = \varepsilon_2 E_y \qquad D_z = \varepsilon_3 E_z$$

dove gli scalari $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$, sono funzioni continue e differenziabili di M.

Immaginiamo ora uno spostamento finito del dielettrico in corrispondenza a una variazione del parametro lagrangiano p, mentre gli altri parametri che insieme a p individuano la posizione del corpo non variano, i conduttori che generano il campo restano fissi e le cariche distribuite sopra di essi costanti.

La corrispondente variazione subita dall' energia elettrostatica U è

(1) $$\Delta U =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{v_0} (\overline{D}' \times \overline{E}' - \overline{D} \times \overline{E})\, dv_0 + \frac{1}{2}\int_{v_\infty} (\overline{D}' \times \overline{E}' - \overline{D} \times \overline{E})\, dv_\infty +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_{v_1} (\overline{D}' \times \overline{E}' - \overline{D} \times \overline{E})\, dv_1 + \frac{1}{2}\int_{v_2} (\overline{D}' \times \overline{E}' - \overline{D} \times \overline{E})\, dv_2$$

dove $\overline{E}, \overline{D}, \overline{E}', \overline{D}'$ indicano i valori iniziali e finali del campo e dello spostamento elettrico in un punto generico M, mentre gli altri simboli conservano il significato espresso nel lavoro citato in [1]. [4]

[4] Cioè dette v e v' i volumi del dielettrico nella posizione iniziale e finale, v_0 è la loro parte comune v_1 e v_2 sono le regioni ottenute togliendo i punti di v_0 rispettivamente da v' e v. v_∞ è il rimanente spazio esterno a $v_0 + v_1 + v_2$.

Ricordando le ipotesi fatte e ragionando come a proposito del teorema del minimo di Thomson (5), la relazione (1) diventa:

$$
(2) \qquad \Delta\, U = \frac{1}{2}\int_{v_0} (\overline{E}' \times \overline{D} - \overline{E} \times \overline{D}')\, dv_0 +
$$

$$
+\frac{1}{2}\int_{v_\infty} (\overline{E}' \times \overline{D} - \overline{E} \times \overline{D}')\, dv_\infty + \frac{1}{2}\int_{v_1} (\overline{E}' \times \overline{D} - \overline{E} \times \overline{D}')\, dv_1 +
$$

$$
+\frac{1}{2}\int_{v_2} (\overline{E}' \times \overline{D} - \overline{E} \times \overline{D}')\, dv_2 .
$$

Detta M, x', y', z' la terna di assi ortogonali orientata secondo le direzioni unite dell' omografia dielettrica a spostamento avvenuto si ha:

$$
D'_{x'} = \varepsilon'_1 E'_{x'} \qquad D'_{y'} = \varepsilon'_2 E'_{y'} \qquad D'_{z'} = \varepsilon'_3 E'_{z'}
$$

e indicando con $E_{x'}, E_{y'}, E_{z'}$; E'_x, E'_y, E'_z le componenti di $\overline{E}$ e di $\overline{E}'$ rispettivamente lungo gli assi M, x', y', z' e M, x, y, z, avremo

$$
\overline{E}' \times \overline{D} = \varepsilon_1 E_x E'_x + \varepsilon_2 E_y E'_y + \varepsilon_3 E_z E'_z
$$

$$
\overline{E} \times \overline{D}' = \varepsilon'_1 E'_{x'} E_{x'} + \varepsilon'_2 E'_{y'} E_{y'} + \varepsilon'_3 E'_{z'} E_{z'} .
$$

Sostituendo nel primo integrale di (2) si ottiene:

$$
(3) \qquad \Delta\, U =
$$

$$
= \frac{1}{2}\int_{v_0} \Big[(\varepsilon_1 - \varepsilon'_1)\, E_x E'_x + (\varepsilon_2 - \varepsilon'_2)\, E_y E'_y + (\varepsilon_3 - \varepsilon'_3)\, E_z E'_z \Big]\, dv_0 +
$$

(5) D. Graffi: « *Teoria Matematica dell' elettromagnetismo* ». Editrice Patron, Bologna, 1949, vol. I, pag. 212.

$$+\frac{1}{2}\int_{r_0}\Big[\varepsilon_1'(E_x E_x' - E_{x'}' E_{x'}) + \varepsilon_2'(E_y E_y' - E_{y'}' E_{y'}) +$$

$$+ \varepsilon_3'(E_z E_z' - E_{z'}' E_{z'})\Big]\, dr_0 + \frac{1}{2}\int_{r_\infty}(\bar{E}'\times\bar{D} - \bar{E}\times\bar{D}')\, dr_\infty +$$

$$+\frac{1}{2}\int_{r_1}(\bar{E}'\times\bar{D} - \bar{E}\times\bar{D}')\, dr_1 + \frac{1}{2}\int_{r_2}(\bar{E}'\times\bar{D} - \bar{E}\times\bar{D}')\, dr_2 .$$

Considerando i vettori unitari $(\bar{i}, \bar{j}, \bar{k})$ $(\bar{i}', \bar{j}', \bar{k}')$ diretti secondo gli assi M, x, y, z e M, x', y', z' si ha

$$E_{x'} = E_x + \bar{E}\times(\bar{i}' - \bar{i})$$

$$E_{y'} = E_y + \bar{E}\times(\bar{j}' - \bar{j})$$

$$E_{z'} = E_z + \bar{E}\times(\bar{k}' - \bar{k})$$

e analogamente per le componenti di E' lungo gli assi M, x', y', z'.

In tal modo la funzione integranda del secondo integrale della (3) diventa:

$$-\frac{1}{2}\varepsilon_1'\Big[E_x'\bar{E}\times(\bar{i}' - \bar{i}) + E_x\bar{E}'\times(\bar{i}' - \bar{i}) + \bar{E}\times(\bar{i}' - \bar{i})\,\bar{E}'\times(\bar{i}' - \bar{i})\Big] -$$

$$-\frac{1}{2}\varepsilon_2'\Big[E_y'\bar{E}\times(\bar{j}' - \bar{j}) + E_y\bar{E}'\times(\bar{j}' - \bar{j}) + \bar{E}\times(\bar{j}' - \bar{j})\,\bar{E}'\times(\bar{j}' - \bar{j})\Big] -$$

$$-\frac{1}{2}\varepsilon_3'\Big[E_z'\bar{E}\times(\bar{k}' - \bar{k}) + E_z\bar{E}'\times(\bar{k}' - \bar{k}) + \bar{E}\times(\bar{k}' - \bar{k})\,\bar{E}'\times(\bar{k}' - \bar{k})\Big].$$

Se ora si considera come infinitesima la variazione del parametro p, a primo membro della (3) avremo la variazione infinitesima $\frac{\partial U}{\partial p}\delta p$ dell' energia, corrispondente alla variazione infinitesima δp, mentre a secondo membro, essendo ε_r $(r = 1, 2, 3)$ differenziabili per ipotesi, le $(\varepsilon_r - \varepsilon_r')$ tendono a $grad\, \varepsilon_r \times \delta M$.

Inoltre osserviamo che $M, \bar{i}', \bar{j}', \bar{k}'$ è la posizione finale della terna unitaria ortogonale collegata a quel punto del dielettrico rigido che inizialmente è in $M - \delta M$, quindi per δp infinitesimo, $(\bar{i}' - \bar{i})$ sarà il risultante delle due variazioni $\frac{d\bar{i}}{dM}\delta M$ e $\delta\bar{\omega} \wedge \bar{i}$, dove $\delta\bar{\omega}$ è la rotazione infinitesima subita dal corpo nello spostamento. In modo analogo per $(\bar{j}' - \bar{j})$ e $(\bar{k}' - \bar{k})$.

Trascurando infinitesimi d'ordine superiore a δp e tenendo presente che per gli integrali estesi a v_1 e v_2 valgono le stesse considerazioni esposte nel lavoro citato in ([1]), si può scrivere:

$$\frac{\partial U}{\partial p}\delta p = \frac{1}{2}\int_v (E_x^2\, grad\, \varepsilon_1 + E_y^2\, grad\, \varepsilon_2 + E_z^2\, grad\, \varepsilon_3) \times \delta M\, dv +$$

$$+ \int_v (\varepsilon_1 E_x\, \delta\bar{\omega} \wedge \bar{i} \times \bar{E} + \varepsilon_2 E_y\, \delta\bar{\omega} \wedge \bar{j} \times \bar{E} + \varepsilon_3 E_z\, \delta\bar{\omega} \wedge \bar{k} \times \bar{E})\, dv +$$

$$+ \int_v (\varepsilon_1 E_x \frac{d\bar{i}}{dM}\delta M + \varepsilon_2 \frac{d\bar{j}}{dM}\delta M + \varepsilon_3 \frac{d\bar{k}}{dM}\delta M) \times \bar{E}\, dv -$$

$$- \frac{1}{2}\int_\sigma (\bar{P} \times \bar{E}_0)\, \bar{n} \times \delta M\, d\sigma$$

cioè con semplici passaggi ricordando che $div \frac{\partial M}{\partial p} = 0$ si ha:

$$\frac{\partial U}{\partial p}\delta p = \frac{1}{2}\int_v div[(\bar{D} \times \bar{E})\delta M]\, dv - \frac{1}{2}\int_v \Big[\varepsilon_1\, grad\, (\bar{E} \times \bar{i})^2 +$$

$$+ \varepsilon_2\, grad\, (\bar{E} \times \bar{j})^2 + \varepsilon_3\, grad\, (\bar{E} \times \bar{k})^2\Big] \times \delta M\, dv +$$

$$+ \int_v \bar{P} \wedge \delta\bar{\omega} \times \bar{E}\, dv + \int_v \Big[\varepsilon_1 E_x\, K\frac{d\bar{i}}{dM}\bar{E} + \varepsilon_2 E_y\, K\frac{d\bar{j}}{dM}\bar{E} +$$

$$+ \varepsilon_3 E_z\, K\frac{d\bar{k}}{dM}\bar{E}\Big] \times \delta M\, dv - \frac{1}{2}\int_\sigma (\bar{P} \times \bar{E}_0)\, \bar{n} \times \delta M\, d\sigma \;.$$

da cui segue

$$\frac{\partial U}{\partial p}\delta p = \frac{1}{2}\int_\sigma \bar{D}\times\bar{E}\,\bar{n}\times\delta M\,d\sigma - \int_v \frac{d\bar{E}}{dM}\bar{D}\times\delta M\,dv +$$

$$+\int_v \bar{P}\wedge\delta\bar{\omega}\times\bar{E}\,dv - \frac{1}{2}\int_\sigma (\bar{P}\times\bar{E}_0)\,\bar{n}\times\delta M\,d\sigma .$$

A questo punto basta osservare che essendo

$$\bar{D} = \varepsilon_0\,\bar{E} + \bar{P}$$

si ha:

$$\frac{d\bar{E}}{dM}\bar{D}\times\delta M = \frac{d\bar{E}}{dM}\bar{P}\times\delta M + \frac{1}{2}\,dir\,\varepsilon_0\,\bar{E}^2\,\delta M$$

e quindi

$$\frac{\partial U}{\partial p}\delta p = -\int_v \frac{d\bar{E}}{dM}\bar{P}\times\frac{\partial M}{\partial p}\delta p\,dv +$$

$$+\frac{1}{2}\int_\sigma \bar{P}\times(\bar{E}_1-\bar{E}_0)\,\bar{n}\times\frac{\partial M}{\partial p}\delta p\,d\sigma + \int_v \bar{P}\wedge\delta\bar{\omega}\times\bar{E}\,dv .$$

Per la forza generalizzata di Lagrange $\mathcal{P} = -\frac{\partial U}{\partial p}$ corrispondente al parametro p si ha perciò l'espressione:

$$\mathcal{P} = \int_v \frac{d\bar{E}}{dM}\bar{P}\times\frac{\partial M}{\partial p}dv + \int_v \bar{P}\wedge\bar{E}\times\frac{\partial\bar{\omega}}{\partial p}dv +$$

$$+\frac{1}{2}\int_\sigma \bar{P}\times(\bar{E}_0-\bar{E}_1)\,\bar{n}\times\frac{\partial M}{\partial p}d\sigma$$

la quale prova appunto quanto si è accennato all'inizio.

2. – Siccome può sempre scriversi

$$\frac{\partial M}{\partial p} = \frac{\partial O}{\partial p} + \frac{\partial \omega}{\partial p} \wedge (M - O)$$

dove $\frac{\partial O}{\partial p}$ e $\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial p}$ non dipendono da M si ha

$$\frac{d}{dM}\left(\frac{\partial M}{\partial p}\right) = \frac{\partial \omega}{\partial p} \wedge$$

e quindi

$$\mathcal{D} = \int_v \left[\frac{d\bar{E}}{dM} \bar{P} \times \frac{\partial M}{\partial p} + K \frac{d}{dM}\left(\frac{\partial M}{\partial p}\right) \bar{E} \times \bar{P} \right] dv +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_\sigma \bar{P} \times (\bar{E}_0 - \bar{E}_1)\, \bar{n} \times \frac{\partial M}{\partial p}\, d\sigma = \int_v \left[grad\left(E \times \frac{\partial M}{\partial p}\right)\right] \times \bar{P}\, dv +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_\sigma \bar{P} \times (\bar{E}_0 - \bar{E}_1)\, \bar{n} \times \frac{\partial M}{\partial p}\, d\sigma = \int_v (\bar{P} \times \bar{n})\, \bar{E} \times \frac{\partial M}{\partial p}\, dv -$$

$$- \int_v \bar{E} \times \frac{\partial M}{\partial p} (div\, \bar{P})\, dv + \frac{1}{2} \int_\sigma \bar{P} \times (\bar{E}_0 - \bar{E}_1)\, \bar{n} \times \frac{\partial M}{\partial p}\, d\sigma$$

da cui segue, ricordando che il campo $\bar{E}_\sigma$ calcolato proprio sulla superficie σ del dielettrico vale $\frac{\bar{E}_0 + \bar{E}_1}{2}$

$$\mathcal{D} = - \int_v \bar{E} \times \frac{\partial M}{\partial p} (div\, \bar{P})\, dv + \int_\sigma (\bar{P} \times \bar{n})\, \bar{E}_\sigma \times \frac{\partial M}{\partial p}\, d\sigma$$

la quale mostra che l'azione complessiva è equivalente, come nel caso dei dielettrici isotropi, alle forze su cariche volumetriche e superficiali di densità $-\, div\, \bar{P}$ e $(\bar{P} \times \bar{n})$.