GIORGIO TREVISAN

Sulla distributività delle strutture che posseggono una valutazione distributiva

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 20 (1951), p. 396-400

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1951__20__396_0>

SULLA DISTRIBUTIVITÀ DELLE STRUTTURE CHE POSSEGGONO UNA VALUTAZIONE DISTRIBUTIVA

Nota (*) *di* GIORGIO TREVISAN (*a Padova*).

Lo scopo della presente Nota è di risolvere il problema 71 proposto da BIRKHOFF (1) nel suo «LATTICE THEORY».

1. - Per *valutazione* su una struttura L si intende ogni funzione reale $v[x]$, definiva per $x \in L$, che verifichi la:

$$(1) \qquad v[x] + v[y] = v[x \cap y] + v[x \cup y],$$

per ogni coppia x, y di L.

È detta poi *distributiva* ogni *valutazione* verificante la:

$$(2) \quad 2\{v[x \cup y \cup z] - v[x \cap y \cap z]\} = v[x \cup y] + v[y \cup z] +$$

$$+ v[z \cup x] - v[x \cap y] - v[y \cap z] - v[z \cap x].$$

Si sa che le valutazioni di una *struttura distributiva* sono *distributive*.

Il problema proposto dal BIRKHOFF è di invertire, in un certo senso, tale proprietà e precisamente si domanda:

È *distributiva* una *struttura* che possiede una *valutazione* $v[x]$ verificante la (2) e tale che

(*) Pervenuta in Redazione il 13 settembre 1951.

(1) BIRKHOFF: *Lattice Theory* [American Mathematical Society 1948, pag. 151 Problem 71].

$$(\alpha)\qquad r[t] = \text{costante}\ x \leq t \leq y \ \rightarrow\ x = y\ ?$$

La risposta è affermativa come si fa vedere in questa Nota.

2. - Si rammentano proprietà ([2]) note delle *strutture*, relative alla *distributività*, utili per il seguito.

I. - *Una struttura L è distributiva, se e solo se, per ogni sua terna di elementi x, y, z verificanti le*

$$(3)\qquad x \cap y = x \cap z, \qquad x \cup y = x \cup z$$

ne consegue che:

$$(3')\qquad y = z.$$

Ed ancora la proprietà equivalente:

II. - *Una struttura che non è distributiva contiene certamente come sua sottostruttura una delle strutture i cui diagrammi di* Hasse *sono riportati nelle figure* (a) *e* (b).

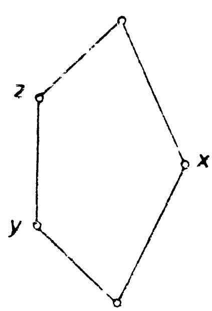

Fig. (a).

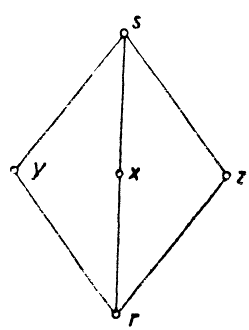

Fig. (b).

([2]) Per queste proprietà vedere l'opera sopra citata, particolarmente il Teorema II. di pag. 134 ed il conseguente corollario.

3. - Lemma I: *Se $v[x]$ è una valutazione distributiva della struttura L e se gli elementi x, y, z di L verificano le* (3) *allora ne segue che*:

(4) $$v[y] = v[z] = v[y \cup z] = v[y \cap z].$$

Tenuto conto delle (3) nella (z) si ha:

$$2\,\{v[x \cup z \cup z] - v[x \cap z \cap z]\} = v[x \cup z] + v[y \cup z] +$$

$$+ v[z \cup x] - v[x \cap z] - v[y \cap z] - v[z \cap x]$$

e semplificando si ottiene

(5) $$v[y \cup z] = v[y \cap z].$$

Ora per le (3) si ha $r = x \cap y \cap z = x \cap z = x \cap y$ ed $s = x \cup y \cup z = x \cup z = x \cup y$ e per queste e la (1)

$$v[x] + v[y] = v[r] + v[s] = v[x] + v[z]$$

cioè

(6) $$v[y] = v[z].$$

Ed ancora per le (5), (6), (1)

$$2\,v[y] = v[y] + v[z] = v[y \cap z] + v[y \cup z] = 2\,v[y \cap z]$$

cioè semplificando

(7) $$v[y] = v[y \cap z]$$

e così le (5), (6), (7) dimostrano la tesi.

Lemma II: *Una struttura L che possegga una valutazione distributiva $v[x]$ verificante la* (α) *non contiene come sue sottostrutture, strutture del tipo della* fig. (a).

Infatti ragionando per assurdo supposto che L contenga la struttura di fig. (a) come sua sottostruttura e conservate le denominazioni degli elementi come in figura si avrebbe $y \neq z$.

Detto ora ξ un elemento di L tale che $y < \xi \leq z$ si avrebbe, facilmente, $x \cap y = x \cap \xi$ e $x \cup y = x \cup \xi$ e quindi applicando il lemma I si otterrebbe $v[y] = v[\xi]$, ma per la (α) ciò porterebbe ad $y = z$ contro l'ipotesi.

Lemma III: *Una struttura L che possegga una valutazione distributiva $v[x]$ verificante la (α) non contiene come sue sottostrutture strutture del tipo della* fig. (b).

Ragionando per assurdo si supponga che esista una siffatta sottostruttura e per le denominazioni degli elementi ci si riferisca sempre alla fig. (b).

Si ha $x \cap y = x \cap z = y \cap z = r$, $x \cup y = x \cup z = y \cup z = s$ e quindi con ovvie applicazioni del Lemma I:

$$(8) \qquad v[x] = v[y] = v[z] = v[r] = v[s].$$

È $r \neq s$; sia ora ξ un elemento di L tale che $x < \xi < s$.

Un tale elemento certamente esiste perchè altrimenti per la (α) e la (8) seguirebbe $x = s$ contro l'ipotesi.

Si consideri l'elemento $p = \xi \cap y$. Se fosse $p = r$ dato che $\xi \cup y = s$ si avrebbe che r, x, ξ, s, y costituirebbe una sottostruttura di L di quelle la cui esistenza è esclusa dal Lemma II.

Se fosse $p = y$ sarebbe $y \cup x \leq \xi < s$ contro l'ipotesi.

Sarà dunque $r < p < y$.

Ora è certamente $p \cap x = r$; si dimostra che $p \cup z = \xi$.

Se $p \cup x = p$ risulterebbe $x \leq p < y$ mentre che x ed y per ipotesi non sono paragonabili.

Sia $p < p \cup x < \xi$, ma allora $(p \cup x) \cap y = p$ dato che $\xi \cap y = p$ ed ancora $(p \cup x) \cup y = s$ dato che $p \cup x \geq x$ e che $x \cup y = s$ e tutti questi fatti porterebbero alle conclusioni che L contiene $p, p \cup x, x, s, y$ come sua sottostruttura contro il Lemma II.

Deve essere dunque $p \cup x = \xi$. Analogamente ragionando su q si ricava che $q \cap x = r$ e $q \cup x = \xi$.

Ora poichè $p \cap q = r$ applicando il Lemma I si ottiene

$$v[p] = v[q] = v[r] = v[p \cup q] \tag{9}$$

e si ha ancora per la (1) e quanto sopra dimostrato

$$v[p] + v[x] = v[r] + v[\xi]$$

cioè per la (9)

$$v[x] = v[\xi]$$

e tenendo conto della (8)

$$v[\xi] = v[x] \text{ per } x \leq \xi \leq s$$

ciò che porta per la (α) $x = s$ contro l'ipotesi.

Il problema proposto all'inizio risulta essere risolto.

Basta all'uopo confrontare i Lemmi II e III con la proposizione II del n. 2.