RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIORGIO TREVISAN

Sulla equivalenza archimedea relativa alle gruppo-strutture

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 20 (1951), p. 425-429

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1951__20__425_0>

SULLA EQUIVALENZA ARCHIMEDEA RELATIVA ALLE GRUPPO-STRUTTURE

Nota di (*) GIORGIO TREVISAN (*a Padova*).

In un recente lavoro LOONSTRA (1) si è proposto di trasportare alle gruppo-strutture (2) commutative vecchi risultati di HAHN (3) relativi ai gruppi commutativi semplicemente ordinati.

In questa prefazione si ricordano brevemente alcune considerazioni di HAHN, quali si desumono dalla Nota di LOONSTRA; viene esposta l'impostazione che LOONSTRA ha dato alla questione; si passa quindi ad esporre l'impostazione data in questa Nota ed i risultati ottenuti.

Dato un gruppo semplicemente ordinato:

1) Due elementi $a > 0$, $b > 0$ hanno lo stesso rango e si scrive $a \backsim b$, se per ogni multiplo ma di a esiste in corrispondenza un multiplo nb di b tale che $ma < nb$ e viceversa per ogni multiplo $n_1 b$ di b esiste in corrispondenza un multiplo $m_1 a$ di a tale che $n_1 b < m_1 a$; se $a \backsim b$ si dice anche che a e b sono equivalenti dal punto di vista archimedeo.

2) L'elemento $a > 0$ ha rango minore dell'elemento $b > 0$ e si scrive $a < b$, se per ogni multiplo ma di a esiste in cor-

(*) Pervenuta in Redazione il 6 ottobre 1951.

(1) F. LOONSTRA, *The classes of partially ordered groups*, [Compositio Mathematice 1951, pagg. 130-40].

(2) Riguardo alla nomenclatura si fa presente che si è tradotto dall'inglese *lattice*, *po-group*, *l-group* rispettivamente con *struttura*, *gruppo parzialmente ordinato*, *gruppo struttura*.

(3) H. HAHN, *Über die nicht-archimedischen grössensysteme*, [S. B. Wiener Akademie. Nat Klasse Abt II a, 116, 1907 pagg. 601-53].

rispondenza un multiplo nb di b tale che $ma < nb$, ma non viceversa.

3) L'elemento $a > 0$ ha rango maggiore di $b > 0$ e si scrive $a \succ b$ se $b \prec a$.

4) Il caso che uno almeno degli elementi a e b sia negativo, si riconduce ai precedenti mediante convenienti passaggi all' opposto.

In un gruppo semplicemente ordinato ogni coppia di elementi soddisfa ad una delle eventualità descritte e la relazione $\backsim$ è una relazione di equivalenza.

Orbene Hahn ha studiato l'insieme delle corrispondenti classi di equivalenza, ordinandolo parzialmente in base alla seguente convenzione (la cui legittimità si può porre facilmente fuori dubbio): Se A e B sono due siffatte classi di equivalenza sia $A < B$, se e solo se, $a \prec b$, $a \in A$, $b \in B$.

Loonstra considera gruppi parzialmente ordinati. In un simile gruppo considera il sistema degli elementi paragonabili con l'elemento identico 0 del gruppo ed entro questo sistema introduce la nozione di rango nel modo che segue:

1') La stessa definizione data in 1).

2') Se $a > 0$ e $b > 0$ si scrive $a \prec b$ se esiste m_0 tale che $na < m_0 b$ per ogni numero naturale n (4).

3') È $a \succ b$ se $b \prec a$.

4') Il caso di elementi negativi si riconduce ai precedenti con passaggio all' opposto (5).

La relazione così introdotta è ancora una relazione di equivalenza. Ma per l'insieme delle relative classi non si può dire nemmeno che si tratti di una struttura (anche se il gruppo parzialmente ordinato era un gruppo-struttura commutativa).

Epperò Loonstra restringe le sue considerazioni alle gruppo-strutture commutative; sostituisce a quelle classi di equivalenza certi l-ideali, che chiama I-ideali ed i quali costituiscono una struttura distributiva.

(4) Si noti che nel caso di gruppi semplicemente ordinati da 2) segue che se $a < b$ allora $na < b$ per ogni numero naturale n.

(5) Nel caso di un gruppo parzialmente ordinato due suoi elementi, paragonabili con 0, possono essere di ranghi non paragonabili.

In questa Nota si considera una gruppo-struttura qualunque. Viene definito in essa il rango mediante le 1), . . . , 4) e si dimostra che l' insieme delle corrispondenti classi di equivalenza è una struttura distributiva.

A conforto di questo modo di vedere si dimostra che LOONSTRA introducendo gli I-ideali sostanzialmente non ha fatto altro che dare per la definizione di rango appunto quella che viene addottata in questa Nota e che è la vecchia definizione di HAHN.

Insomma il risultato che si ottiene rappresenta l' estensione alle gruppo-strutture qualunque di quello dato da LOONSTRA per le gruppo-strutture commutative.

2. - Sia G una gruppo-struttura e G^+ l' insieme dei suoi elementi non negativi. Tutte le considerazioni di questo numero riguardano tali elementi di G^+ per i quali si pensa di aver introdotto il concetto di rango secondo 1), . . . , 4).

Dalla definizione seguono immediatamente i lemmi seguenti:

LEMMA I: *Se* $a \lesssim b$ (*cioè vale* 1) o 2)) *e* $b \lesssim a$ *allora* $a \backsim b$.

Lemma II: *Condizione necessaria e sufficiente perchè* $a \lesssim b$ *è che esista un intero* h *tale che*

1) $$a < h\,b \qquad \text{(ovviamente } h > 0)$$

Si ha ora il

TEOREMA I: *Se* $a \lesssim b$ *allora per ogni elemento* c *di* G^+ *è*

2) $$a \cup c \lesssim b \cup c$$

3) $$a \cap c \lesssim b \cap c.$$

Per ipotesi $a < hb$ e quindi $a \cup c \leq hb \cup c$, ma dalle $b \leq b \cup c$, $c \leq b \cup c$ si ha $hb \leq h(b \cup c)$ e $c \leq h(b \cup c)$ e quindi $hb \cup c \leq h(b \cup c)$ cioè $a \cup c < h(b \cup c)$ e per il lemma II segue la 2).

Per provare la 3) si rammenti ([6]) che se a, x, y sono elementi non negativi di una gruppo-struttura si ha $a \cap (y + y) \leq (a \cap x) + (a \cap y)$ e perciò $h b \cap c \leq h (b \cap c)$ e da $a \leq h b$ segue $a \cap c \leq h b \cap c \leq h (b \cap c)$ e per il lemma II la 3).

Tenendo presente il Lemma I dal Teorema I consegue il

Corollario: *Se* $a \backsim b$, *per ogni* c *di* G^+ *si ha*

4) $$a \cup c \backsim b \cup c$$

5) $$a \cap c \backsim b \cap c .$$

Si consideri ora l' insieme Λ delle classi in cui si distribuiscono gli elementi G^+ quando si pongono nella stessa classe elementi dello stesso rango. La classe alla quale appartiene l' elemento a si indicherà con $\Lambda(a)$.

Tra le classi di Λ si stabilisca la relazione di ordine come è detto nel n. 1. La legittimità della definizione segue dal fatto che se $a < b$, $a \backsim a'$, $b \backsim b'$ allora è $a' < b'$.

Si ha quindi il

Teorema II: *L' insieme parzialmente ordinato* Λ *è una struttura distributiva.*

Se $x \in \Lambda(a)$, $y \in \Lambda(b)$ allora $x \cup y \in \Lambda(a \cup b)$ e $x \cap y \in \Lambda(a \cap b)$.

Ciò segue dal Corollario del Teorema I. Infatti dalle $x \backsim a$, $y \backsim b$ risulta $x \cup y \backsim a \cup y$ e $a \cup y \backsim a \cup b$ cioè $x \cup y \backsim a \cup b$.

Analogamente per le intersezioni. Si ottengono così le disuguaglianze

$$\Lambda(a \cap b) \leq \Lambda(a) \leq \Lambda(a \cup b) \text{ e } \Lambda(a \cap b) \leq \Lambda(b) \leq \Lambda(a \cup b).$$

Sia ora $\Lambda(a) \leq \Lambda(c)$, $\Lambda(b) \leq \Lambda(c)$, ciò porta $a \underset{\backsim}{>} c$, $b \underset{\backsim}{<} c$ e quindi per le 2). $a \cup b \underset{\backsim}{<} c \cup b \underset{\backsim}{<} c \cup c = c$ cioè $\Lambda(a \cup b) \leq \Lambda(c)$.

([6]) G. Birkhoff, *Lattice Theory,* [American Math. Society, Colloquium Publications Vol. XXV. 1948, pag. 221, Ex. 1].

Nello stesso modo si dimostra che se $\Lambda(a) \geq \Lambda(c)$, $\Lambda(b) \geq \Lambda(c)$, allora $\Lambda(a \cap b) \geq \Lambda(c)$. Si conclude che $\Lambda(a)$ e $\Lambda(b)$ hanno l' unione e l' intersezione che sono rispettivamente $\Lambda(a \cup b)$ e $\Lambda(a \cap c)$, cioè Λ è una struttura [7].

Per dimostrare che Λ è distributiva bisogna ricordare che lo è G^+.

Infatti G^+ è una sottostruttura di G; G è una struttura distributiva in quanto gruppo-struttura, dunque G^+ è distributiva.

Ed allora si ha $\Lambda(a) \cap (\Lambda(b) \cup \Lambda(c)) = \Lambda(a) \cap \Lambda(b \cap c) =$
$$= \Lambda(a \cap (b \cup c)) = \Lambda((a \cap b) \cup (a \cap c)) =$$
$$= \Lambda(a \cap b) \cup \Lambda(a \cap c) = (\Lambda(a) \cap \Lambda(b)) \cup (\Lambda(a) \cap \Lambda(c))$$
cioè la tesi.

3 - È evidente ora come provvedere per collocare un qualunque elemento di G in una classe di Λ. Se a è un elemento qualunque di G esso lo si porrà nella classe a cui appartiene $|a| = a \cup -a$ che è notoriamente > 0 se $a \neq 0$ e 0 se $a = 0$.

4. - Si fa ora vedere che nel caso di una gruppo-struttura commutativo G la struttura degli l-ideali del Loonstra è isomorfa alle strutture Λ considerata in questa Nota.

Si ricordi che l' l-ideale $I(a)$ è l' insieme degli elementi $x \in G$ tali che $|x| \leq n|a|$ per qualche naturale n. È $I(a) = I(|a|)$.

Si consideri la corrispondenza che si ottiene associando $I(a)$ a $\Lambda(a)$ (basta supporre $a > 0$). Tale corrispondenza è biunivoca perchè se $I(a) = I(b)$ è $a \backsim b$ e quindi $\Lambda(a) = \Lambda(b)$ e viceversa. Ma se $I(a) \subset I(b)$, $a < nb$ cioè $a \lesssim b$ e $\Lambda(a) \leq \Lambda(b)$ e viceversa.

Dunque la corrispondenza considerata è un isomorfismo.

5. - Rimane aperto e si propone il problema: Data una struttura distributiva Λ, esiste una gruppo-struttura che ha Λ come sua struttura delle classi?

(7) Si è data qui la dimostrazione per comodità del lettore, ma bastava per concludere che Λ è una struttura, osservare che le 4) e 5) stabiliscono essere la relazione di equivalenza considerata una relazione di congruenza nella struttura G.