RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIUSEPPE SCORZA DRAGONI

Un' osservazione sulla derivata di una funzione composta

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 20 (1951), p. 462-467

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1951__20__462_0>

UN' OSSERVAZIONE SULLA DERIVATA DI UNA FUNZIONE COMPOSTA

Nota (*) *di* GIUSEPPE SCORZA DRAGONI (*a Padova*).

In questa Nota ritorno brevemente, per darle una risposta che ritengo definitiva, su una quistione collaterale ad un teorema di VOLPATO [1].

Si tratta di questo: indicare condizioni sufficienti perchè la funzione composta $z(x, \rho(x))$, *supposta quasi ovunque derivabile*, ammetta quasi ovunque la solita espressione $z'_x(x, \rho(x)) + z'_y(y, \rho(x))\rho'(x)$ per la sua derivata. Orbene, vedremo in sostanza che a ciò basta che esistano quasi ovunque le derivate scritte [2] e che $z(x, y)$ sia misurabile rispetto ad x e continua rispetto ad y. Per alcune condizioni suppletive, che si presentano quando il punto $(x, \rho(x))$ cade sulla frontiera dell' insieme di definizione, rimando al seguito di questa Nota.

Altri si sta occupando di altre quistioni, che si presentano spontanee nell' ordine di idee qui seguito.

1. - Incominciamo dal seguente teorema:

La funzione $z(x, y)$ sia misurabile rispetto ad x e continua rispetto ad y nell' insieme

$$B:\ 0 \leq x \leq l,\ \sigma(x) \leq y \leq \tau(x),$$

(*) Pervenuta in Redazione il 30 dicembre 1951.

(1) G. SCORZA DRAGONI e M. VOLPATO: *Un teorema di unicità per le soluzioni di una equazione alle derivate parziali del primo ordine* [questi «Rendiconti», questo volume, pagg. 446-461], n. 9.

(2) Si badi bene, le $z'_x(x, \rho(x))$ e $z'_y(x, \rho(x))$, non le $z'_x(x, y)$, $z'_y(x, y)$.

dove $\sigma(x)$ *e* $\tau(x)$ *son funzioni continue nell'intervallo*

$$I: 0 \leq x \leq l,$$

soddisfacenti ivi nell'interno alla $\sigma(x) < \tau(x)$. *La funzione* $\rho(x)$ *sia continua in* I, *vi soddisfaccia nell'interno alla* $\sigma(x) < \rho(x) < \tau(x)$ *e vi sia quasi ovunque derivabile (con derivata finita). E per quasi tutti gli* x *di* I *la funzione* $z(x, y)$ *ammetta derivate parziali (finite) nei punti della curva* $y = \rho(x)$. *Allora, posto* $Z(x) = z(x, \rho(x))$, *in quasi tutti i punti di* I *è anche*

$$Z'(x) = z'_x(x, \rho(x)) + z'_y(x, \rho(x))\, \rho'(x), \tag{1}$$

ammesso che $Z(x)$ *sia derivabile in quasi tutti i punti di* I.

Si consideri un intervallo $p \vdash\!\dashv q$, con gli estremi interni ad I. Se c e d son numeri abbastanza piccoli in modulo, negativo il primo e positivo il secondo, tutti i punti (x, y) soddisfacenti alle $p \leq x \leq q$, $c \leq y - \rho(x) \leq d$ sono interni a B. E nel rettangolo $p \leq x \leq q$, $c \leq k \leq d$ si definisca la funzione $\gamma(x, k)$ in base alle seguenti posizioni: $\gamma(x_0, k)$ è identicamente nulla, se $z(x, y)$ non ammette derivata parziale rispetto ad y nel punto $(x_0, \rho(x_0))$; nel caso contrario, $\gamma(x_0, 0)$ è proprio questa derivata parziale e $\gamma(x_0, k)$ è, per k diverso da zero, il rapporto incrementale

$$\frac{z(x_0, \rho(x_0) + k) - z(x_0, \rho(x_0))}{k};$$

allora la funzione $\gamma(x, k)$ è misurabile rispetto alla x e continua rispetto a k. In virtù di un mio teorema [3], la funzione $\gamma(x, k)$ è perciò quasi continua in modo semiregolare rispetto a k.

Sia allora δ una porzione chiusa di $p \vdash\!\dashv q$, siffatta che, per ogni x' di δ la funzione $\rho(x)$ ammetta derivata (finita) in x' e

[3] G. Scorza Dragoni: *Un teorema sulle funzioni continue rispetto ad una e misurabili rispetto ad una altra variabile* [questi « Rendiconti », vol. XVII (1948), pagg. 102–106].

la funzione $z(x, y)$ ammetta derivate parziali prime (finite) in $(x', \rho(x'))$ e che la $\gamma(x, k)$ sia uniformemente continua, se considerata nell'insieme ottenuto al variare di x in δ e di k in $c \vdash\!\dashv d$.

E sia x_0 un punto (di δ) di densità lineare 1 per δ; al punto x_0, in ultima analisi, *sono consentite quasi tutte le posizioni in I.*

Se $x_0 + h$ appartiene a δ ed h è abbastanza piccolo in modulo, di guisa che tale è anche

$$k = \rho(x_0 + h) - \rho(x_0),$$

risulta

$$\begin{aligned}
Z(x_0 + h) - Z(x_0) &= z(x_0 + h, \rho(x_0) + k) - z(x_0, \rho(x_0)) = \\
&= z(x_0 + h, \rho(x_0) + k) - z(x_0 + h, \rho(x_0)) + \\
&\quad + z(x_0 + h, \rho(x_0)) - z(x_0, \rho(x_0)) = \\
&= \gamma(x_0 + h, -k)\, k + z(x_0 + h, \rho(x_0)) - z(x_0, \rho(x_0)) = \\
&= \gamma(x_0, 0)\, k + \alpha k + z(x_0 + h, \rho(x_0)) - z(x_0, \rho(x_0)) = \\
&= z'_y(x_0, \rho(x_0))\, k + z'_x(x_0, \rho(x_0))\, h + \alpha k + \beta h,
\end{aligned} \tag{2}$$

dove α e β sono entrambi infinitesimi, se h tende a zero in guisa che $x_0 + h$ appartenga a δ, cioè se h tende a zero mantenendosi in un conveniente insieme di densità lineare 1 nell'origine. E da qui ovviamente la (1), per $x = x_0$; cioè la dimostrazione del teorema è completa ([4]).

2. – Il ragionamento svolto permette conclusioni più ampie. Esso prova che il rapporto incrementale $(Z(x_0 + h) - Z(x_0))/h$

([4]) Il tipo di ragionamento non è nuovo. Si confronti per esempio R. CACCIOPPOLI: *Sulla differenziabilità delle funzioni di più variabili* [« Rendiconto della Reale Accademia di Scienze fisiche e matematiche di Napoli », serie 3ª, vol. 34 (1928), pagg. 152-159], n. 1. E si vegga ora anche l'accenno contenuto in loc. cit. ([1]), nota ([9]) a pag. 452.

converge verso $z'_x(x_0, \rho(x_0)) + z'_y(x_0, \rho(x_0)) \cdot \rho'(x_0)$ se h tende a zero mantenendosi in un conveniente insieme di densità lineare 1 nell' origine, e prova questo a prescindere da ogni ipotesi circa la derivabilità o meno di $Z(x)$. In definitiva:

Se si interpreta la $Z'(x)$ che compare nella (1) come una derivata asintotica, non c' è più bisogno di alcuna ipotesi di derivabilità o meno di $Z(x)$ perchè, fermo il resto, la (1) sia valida quasi ovunque nell' intervallo I.

3. - E passiamo al seguente altro teorema:

La funzione $z(x, y)$ sia misurabile rispetto ad x e continua rispetto ad y nell' insieme B considerato nel teorema del n. 1. La sezione $s(a)$ di B con l' orizzontale $y = \sigma(a)$ nel punto $S(a) = (a, \sigma(a))$ abbia densità lineare positiva nel punto $S(a)$ per quasi tutti gli a dell' intervallo I, cioè dell' intervallo $0 \leq x \leq l$. La funzione $\sigma(x)$ abbia derivata (finita) in quasi tutti i punti di I. La funzione $z(x, y)$ ammetta derivate parziali prime (finite) nei punti della curva $y = \sigma(x)$ almeno per x quasi ovunque in I (5)*. Allora, posto $Z_1(x) = z(x, \sigma(x))$, di guisa che $Z_1(x)$ è misurabile in I, risulta per quasi tutti i punti di I*

$$Z'_1(x) = z'_x(x, \sigma(x)) + z'_y(x, \sigma(x)) \cdot \sigma'(x), \tag{3}$$

ammesso che $Z_1(x)$ sia derivabile in quasi tutto I. Un teorema perfettamente analogo sussiste per la funzione $Z_2(x)$, se $Z_2(x) = z(x, \tau(x))$ (6).

La dimostrazione è simile a quella del n. 1. Dato l'intervallo $p \vdash\!\dashv q$ cogli estremi interni ad I, si determini il numero positivo d in guisa che i punti (x, y) soddisfacenti alle $p \leq x \leq q$, $\sigma(x) \leq y \leq \sigma(x) + d$ appartengano tutti a B. E nel rettangolo $p \leq x \leq q$, $0 \leq k \leq d$ si definisca la funzione $\gamma(x, k)$ in guisa

(5) Naturalmente gli incrementi delle variabili non potranno in generale tendere a zero con legge arbitraria.

(6) In particolare la IX) del lavoro citato in (1) è una conseguenza delle III), IV), V), VI) ed VIII) dello stesso lavoro.

analoga a quella tenuta nel n. 1. Per quasi tutti gli x dell'intervallo $p \vdash q$ la funzione $\gamma(x, k)$ è quindi il rapporto incrementale destro

$$\frac{z(x, \sigma(x) + k) - z(x, \sigma(x))}{k} \qquad (0 < k \leq d);$$

ecc.

Sia allora δ una porzione chiusa $p \vdash q$, siffatta che, per ogni x' di δ la funzione $\sigma(x)$ ammetta derivata (finita) in x', la sezione $s(x')$ abbia densità lineare positiva nel punto $S(x')$, la funzione $z(x, y)$ ammetta derivate prime finite nel punto $S(x')$ e la funzione $Z_1(x)$ sia derivabile in x'. Si supponga inoltre che $\gamma(x, k)$ sia uniformemente continua se considerata definita nell'insieme ottenuto al variare di x in δ e di k in $0 \vdash d$.

Sia x_0 un punto di δ di densità lineare 1 per δ; al punto x_0 *sono consentite quasi tutte le posizioni in I*. Inoltre è possibile far tendere h a zero, mantenendolo in un *conveniente insieme avente nell'origine densità positiva uguale a quella di $s(x_0)$ nel punto $S(x_0)$*, in guisa che $x_0 + h$ appartenga ancora a δ e che il punto $(x_0 + h, \sigma(x_0))$ appartenga ad $s(x_0)$. Sussiste allora una formula di decomposizione analoga alla (2); e da questa si deduce la (3) in modo ovvio.

4. - E passiamo finalmente all' ultimo teorema che intendiamo stabilire.

La funzione $z(x, y)$ sia misurabile rispetto ad x e continua rispetto ad y nell' insieme B considerato nel teorema del n. 1. Le sezioni $s(a)$ e $t(a)$ di B con le orizzontali $y = \sigma(a)$ ed $y = \tau(a)$ abbiano densità lineare positiva, rispettivamente, nei punti $S(a) = (a, \sigma(a))$ e $T(a) = (a, \tau(a))$ per quasi tutti gli a di I. Le funzioni $\sigma(x)$ e $\tau(x)$ ammettano derivata (finita) in quasi tutti i punti di I. Inoltre sia $\rho(x)$ una funzione continua in I, dotata di derivata finita in quasi tutti i punti di I, e tale che $z(x, y)$ ammetta derivate parziali prime (finite) nei punti della curva $y = \rho(x)$ per quasi tutti gli x di I(7).

(7) Cfr. nota (5).

Allora, se la funzione composta $z(x, \rho(x))$ *è derivabile in quasi tutto* I, *la sua derivata è data dalla solita espressione* $z'_x(x, \rho(x)) + z'_y(x, \rho(x))\, \rho'(x)$ *in quasi tutto* I.

Decomponiamo l' intervallo I nella somma di quattro insiemi misurabili A, B, C e D nel modo che segue. Un punto x_0 di I appartiene ad A, se $\sigma(x_0) < \rho(x_0) < \tau(x_0)$; di guisa che A è somma di un numero finito o una infinità numerabile di intervalli. Un punto x_0 appartiene a B (a C), se x_0 appartiene all'insieme in cui la differenza $\rho(x) - \sigma(x)$ si annulla (la differenza $\rho(x) - \tau(x)$ si annulla) ed è anzi di densità lineare 1 per questo insieme. A D appartengono tutti i rimanenti punti di I; di guisa che D è di misura nulla. Allora il teorema è vero per quasi tutti i punti di A, a norma di quanto si è dimostrato nel numero 1. E la proposizione segue per quasi tutti i punti di B, (di C), a norma di quanto si è dimostrato nel numero precedente, perchè nell' intorno di ciascuno di questi punti le funzioni $z(x, \rho(x))$ e $z(x, \sigma(x))$ (le funzioni $z(x, \rho(x))$ e $z(x, \tau(x))$) coincidono a prescindere da insiemi di densità lineare nulla in quei punti.