RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

ANNAMARIA SCORZA TOSO

Un' osservazione sulle funzioni di due variabili continue separatamente rispetto a queste

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 20 (1951), p. 468-469

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1951__20__468_0>

UN' OSSERVAZIONE SULLE FUNZIONI DI DUE VARIABILI CONTINUE SEPARATAMENTE RISPETTO A QUESTE

Nota (*) *di* ANNAMARIA SCORZA TOSO (*a Padova*).

In una Nota pubblicata in questi Rendiconti (1), SCORZA DRAGONI ha dato il seguente teorema:

Se $f(x, y)$ è una funzione finita, misurabile rispetto ad x e continua rispetto ad y nel rettangolo

$$R: \quad a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d$$

allora, dato ad arbitrio il numero $\varepsilon > 0$, è sempre possibile determinare in R un insieme misurabile $A_x(\varepsilon)$, la cui proiezione ortogonale sull' asse x sia un insieme misurabile di misura lineare minore di ε ed in modo che $f(x, y)$ risulti continua rispetto ad (x, y) nell' insieme $C_x(\varepsilon)$ ottenuto da R sopprimendo $A_x(\varepsilon)$.

Lo SCORZA DRAGONI osservava anche in modo esplicito che:

L' insieme $C_x(\varepsilon)$ si può supporre naturalmente chiuso,

e proponeva di precisare il risultato da lui raggiunto nel caso in cui la $f(x, y)$ fosse continua in R separatamente nelle due variabili. BAJADA (2) ha risolto la questione dimostrando

(*) Pervenuta in Redazione il 31 dicembre 1951.

(1) G. SCORZA DRAGONI: *Un teorema sulle funzioni continue rispetto ad una e misurabili rispetto ad un' altra variabile* [questi «Rendiconti», vol. XVII (1948), pagg. 102-106].

(2) E. BAJADA: *Sulle funzioni continue separatamente rispetto alle variabili e gli integrali curvilinei* [questi «Rendiconti», vol. XVII (1948), pagg. 201-218], n. 2.

che in questa ipotesi la funzione $f(x, y)$ risulta continua nel complesso delle variabili in un conveniente insieme chiuso $C(\varepsilon)$ ottenuto sopprimendo da R un insieme $A(\varepsilon)$ le cui proiezioni ortogonali sugli assi x ed y sono due insiemi di misure lineari minori di un numero positivo ε prefissato a piacere.

In questa Nota mi propongo di far vedere come il teorema di BAJADA si possa dedurre da quello di SCORZA DRAGONI.

Infatti dal teorema di SCORZA DRAGONI segue subito che, dato ad arbitrio il numero $\varepsilon > 0$, la $f(x, y)$ è continua nel complesso delle due variabili in due convenienti insiemi chiusi $C_x(\varepsilon)$ e $C_y(\varepsilon)$, ottenuti da R sopprimendo rispettivamente due insiemi $A_x(\varepsilon)$ ed $A_y(\varepsilon)$ proiettantisi ortogonalmente, il primo sull'asse x ed il secondo sull'asse y, in insiemi di misure lineari minori di ε.

È facile ora provare che la $f(x, y)$ è continua anche nell'insieme chiuso $C(\varepsilon)$, con $C(\varepsilon) = C_x(\varepsilon) + C_y(\varepsilon)$. Sia infatti P un punto di tale insieme. Se P appartiene tanto a $C_x(\varepsilon)$ che a $C_y(\varepsilon)$, è ovvio che $f(x, y)$ è continua in P anche quando la si pensi data in $C(\varepsilon)$. Se P appartiene soltanto a $C_x(\varepsilon)$, P non è d'accumulazione per $C_y(\varepsilon)$ e quindi i punti di $C(\varepsilon)$ abbastanza prossimi a P appartengono a $C_x(\varepsilon)$ e la continuità in P di $f(x, y)$ è di nuovo ovvia. Analogamente se P appartiene soltanto a $C_y(\varepsilon)$.

Concludendo, la $f(x, y)$ è continua nell'insieme $C(\varepsilon)$, ottenuto da R sopprimendo l'insieme $A(\varepsilon)$, con $A(\varepsilon) = A_x(\varepsilon) \cdot A_y(\varepsilon)$, sopprimendo cioè un insieme le cui proiezioni ortogonali sugli assi x ed y sono due insiemi di misure lineari minori di ε.

OSSERVAZIONE. – È anche ovvio che se $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ è una successione (decrescente) di numeri positivi, e se $C(\varepsilon_n)$ è un insieme che abbia per ε_n il significato di $C(\varepsilon)$ per ε, la successione $C(\varepsilon_1)$, $C(\varepsilon_2)$, $C(\varepsilon_3), \ldots$ può essere sostituita dalla successione non decrescente $C(\varepsilon_1)$, $C(\varepsilon_1) + C(\varepsilon_2)$, $C(\varepsilon_1) + C(\varepsilon_2) + C(\varepsilon_3), \ldots$