RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

MAURO PAGNI

Un'osservazione sull'unicità della soluzione del problema di Cauchy per l'equazione $p = f(x, y, z, q)$

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 20 (1951), p. 470-474

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1951__20__470_0>

UN' OSSERVAZIONE SULL' UNICITÀ DELLA SOLUZIONE DEL PROBLEMA DI CAUCHY PER L' EQUAZIONE $p = f(x, y, z, q)$

Nota (*) *di* MAURO PAGNI (*a Trieste*).

È noto che il problema dell' unicità della soluzione dell' equazione differenziale alle derivate parziali del primo ordine

$$p = f(x, y, z, q) \qquad \left(p = \frac{\partial z}{\partial x}, q = \frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

con i dati di CAUCHY è stato studiato da vari autori (1) e che, in

(*) Pervenuta in Redazione il 19 gennaio 1952.

(1) Si veda: 1) A. HAAR: *Über eindeutigkeit un' analyzität der lösungen partieller differentialgleichungen*, [Atti del Congresso Internazionale dei Matematici, Bologna (1928), vol. III]; 2) A. ROSEMBLATT: *Sur l' unicité des solutions des equations aux derivées partielles du premier ordre*, [Comptes Rendus 13 - 10 - 1930]; 3) T. WAZÈWSHI: *Sur l' unicité et la limitation des integrales des équations aux derivées partielles du premier ordre* [Rendiconti Acc. Nazionale dei Lincei, classe di Scienze fis., mat. e nat. s. VI, vol. XVIII]; 4) J. SZARSKI: *Sur cetaines systemes d' inegalités differentielles aux derivées partielles du premier ordre*, [Annales de la Societé Polonaise de Matématique, T. XXI (1948)]; 5) M. VOLPATO: *Sulle condizioni sufficienti per l' unicità degli integrali di un' equazione differenziale alle derivate parziali del primo ordine*, [Sem. Università Ferrara, vol. 8, p I (1950) pp. 137-149]; 6) M. VOLPATO: *Criteri di confronto, di unicità per le soluzioni dell' equazione* $p = f(x, y, z, q)$ *con i dati di Cauchy*, [Rendiconti del Sem. Mat. di Padova, vol. XX (1951)]; 7) E. BAIADA: *Teorema d' unicità per un' equazione alle derivate parziali del primo ordine con i dati di Cauchy*, [Rend. Acc. Naz. dei Lincei, classe di Scienze fis., mat. e nat., s. VIII - vol. XI (1951)]; 8) M. CINQUINI - CIBRARIO e S. CINQUINI: *Sopra una forma più ampia del problema di Cauchy per*

opportune ipotesi sulla funzione $f(x, y, z, q)$, sono stati dati teoremi che assicurano l'unicità della soluzione in un certo campo, prendendo le soluzioni $z(x, y)$ in un'opportuna classe H di funzioni.

Precisiamo, innanzi tutto, le ipotesi che abitualmente si fanno e sulla funzione $f(x, y, z, q)$ e sul campo in cui si stabilisce l'unicità:

$f(x, y, z, q)$ è una funzione reale definita per $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$, z e q qualunque, e tale che $| f(x, y, z', q') - f(x, y, z'', q'') | \leq M | z' - z'' | + N | q' - q'' |$;

il campo, che inidcheremo con T, è la regione dei punti del piano x, y per cui $a \leq x \leq \delta, c + \frac{1}{N}(x - a) \leq y \leq d - \frac{1}{N}(x - a)$; dove δ è un numero maggiore di a e minore sia di b sia di $\frac{N(d - c)}{2} + a$ (2).

Il teorema di unicità si può allora così enunciare.

Se $\omega(y)$ è una funzione continua derivabile in (c, d), l'equazione

$$(1) \qquad p = f(x, y, z, q)$$

ammette al più una sola soluzione $z(x, y)$, nella regione T ora definita, appartenente alle funzioni della classe H e soddisfacente alla $z(a, y) = \omega(y)$.

l'equazione $p = f(x, y, z, q)$ [Ann. Mat. pura e appl., 4 - XXXII (1951)]; 9) S. Cinquini: *Un teorema di unicità (in forma generalizzata) per l'equazione* $p = f(x, y, z, q)$ [Rend. Acc. Naz. Lincei, classe di Scienze fis., mat. e nat., s. VIII - vol. XI (1951) pp. 255-259]; 10) G. Scorza-Dragoni e M. Volpato: *Un teorema di unicità per le soluzioni di una equazione alle derivate parziali del primo ordine*, [Rend. Sem. Mat. di Padova - vol. XX (1951) pp. 446-461].

(2) Le ipotesi sul campo e sulla funzione f sono state di recente ampliate: si vedano i lavori 5), 6), 9) e 10) citati in (1).

La classe H è solitamente quella delle funzioni $z(x, y)$ continue colle derivate prime continue (3).

E. Baiada (4) ha cercato di allargare la classe H e di dare una maggiore generalità al problema dell'unicità considerando come possibili soluzioni (in analogia a quanto si fa per l'equazione differenziale ordinaria $y' = f(x, y)$ quelle funzioni che verificano l'equazione differenziale (1) anche a meno di un insieme di misura superficiale nulla.

Mostreremo che, se intendiamo la soluzione nel senso generalizzato ora detto e per classe H prendiamo quella delle funzioni $z(x, y)$ lipschitiziane (5), anche in casi molto semplici, l'unicità della soluzione viene a mancare (6).

Sia la funzione $f(x, y, z, q)$ così definita

$$
\begin{aligned}
f &= q^2 && \text{per } |q| < 1, \\
f &= 2q - 1, && \text{per } q > 1, \\
f &= -2q - 1 && \text{per } q < -1.
\end{aligned}
$$

Evidentemente risulta $|f(x, y, z', q') - f(x, y, z'', q'')| \leq \leq 2|q' - q''|$.

Prendiamo l'equazione differenziale

$$
(1') \qquad p = f(x, y, z, q)
$$

(ove f è la funzione precedentemente definita) con il dato $z(0, y) = 0$.

(3) Si vedano i lavori 1), 2), 3), 4), 5), 6) citati in (1); nel lavoro 4) la classe H è quella delle funzioni differenziali.

(4) Si veda il lavoro 7) citato in (1).

(5) Si veda il lavoro 7) citato in (1).

(6) Per le funzioni $z(x, y)$ assolutamente continue secondo Vitali la cosa è pressochè immediata. Si consideri infatti l'equazione $p = 0$ con il dato $z(0, y) = 0$. Oltre alla soluzione evidente $z = 0$ vi è la funzione $z(x, y) = = g(x)$, dove $g(0) = 0$, $g(1) = 1$ e $g(x)$ è una funzione continua tale che $g'(x) = 0$ per quasi tutti i punti dell'intervallo $(0, 1)$.

Se facciamo $d = \frac{1}{2}$, $c = -\frac{1}{2}$ la regione T relativa alla (1′)

è data da $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x \leq y \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x$, $0 \leq x \leq \delta$ ove $\delta < 1$.

Consideriamo ora la funzione $z(x, y)$ così definita in T

$$z \equiv 0 \text{ nei punti di } T \text{ in cui } |y| \geq x,$$

$$z = x - y \text{ nei punti di } T \text{ in cui } 0 \leq y \leq x,$$

$$z = x + y \text{ nei punti di } T \text{ in cui } -x \leq y \leq 0.$$

La funzione $z(x, y)$ così definita risulta evidentemente continua in tutto T, e derivabile con derivate prime continue in tutti i punti di T tranne quelli appartenenti alle rette di equazione $x = y$, $y = 0$, $y = -x$.

Si ha poi

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \text{ in punti di } T \text{ in cui } |y| > x,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 1, \frac{\partial z}{\partial y} = -1 \text{ nei punti di } T \text{ in cui } 0 < y < x,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} = 1 \text{ nei punti di } T \text{ in cui } -x < y < 0.$$

La $z(x, y)$ è quindi soluzione quasi dapertutto della (1′), sulla regione T, e soddisfa alla condizione $z(0, y) = 0$. Ma anche la funzione $z \equiv 0$ è soluzione della (1′) e verifica la condizione $z(0, y) = 0$. Da ciò segue che nella regione T viene a mancare l'unicità.

Si osservi inoltre che le considerazioni ora svolte mostrano in sostanza l'opportunità, nel caso si voglia considerare soluzioni generalizzate della (1) in problemi di unicità, di precisare ulteriormente l'insieme di misura superficiale sul quale non si pretende che la soluzione verifichi l'equazione, limitandosi per esempio ad insiemi che si proiettino sull'asse x in un insieme di misura lineare nulla ([4]).

([1]) Si veda a proposito il lavoro 10) citato in ([1]); in un ordine di idee analogo è pure il lavoro 9).