RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

FEDERICO CAFIERO

Sugli insiemi compatti di funzioni misurabili negli spazi astratti

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 20 (1951), p. 48-58

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1951__20__48_0>

SUGLI INSIEMI COMPATTI DI FUNZIONI MISURABILI NEGLI SPAZI ASTRATTI

Nota (*) *di* FEDERICO CAFIERO (*a Napoli*).

Scopo di questa Nota è di fare osservare come con semplici considerazioni si possa dare una notevole estensione di un teorema di FRÉCHET [1] relativo alla compattezza, rispetto alla convergenza in misura, di un insieme di funzioni misurabili secondo LEBESGUE.

Più precisamente, indicata con $\boldsymbol{F}$ una famiglia completamente additiva d'insiemi di uno spazio astratto Σ e chiamata funzione misurabile ($\boldsymbol{F}$) ogni funzione reale $f(x)$ di punto del detto spazio, definita in un insieme E di $\boldsymbol{F}$ e tale che, per ogni numero a reale, l'insieme dei punti di E in cui $f(x) > a$ appartenga ad $\boldsymbol{F}$, dimostro che il citato teorema di FRÉCHET si lascia estendere alle funzioni misurabili ($\boldsymbol{F}$) quando la misura per gli insiemi di $\boldsymbol{F}$ si definisce mediante una funzione d'insieme non negativa, monotona e sub-additiva.

Il teorema cui pervengo fornisce in particolare un criterio necessario e sufficiente affinchè un insieme di funzioni di due variabili, misurabili secondo LEBESGUE, sia compatto rispetto alla convergenza quasi-uniforme del tipo semiregolare e regolare [2],

(*) Pervenuta in Redazione il 4 settembre 1950.

(1) M. FRÉCHET: *Sur les ensembles compacts de fontions mesurables.* [« Fundamenta Matematicae » tome IX (1927), pp. 25-32].

(2) Tale nozione, in seguito ad una recente ricerca del prof. G. SCORZA DRAGONI, è stata introdotta da G. STAMPACCHIA. – Cfr. G. SCORZA DRAGONI: *Un teorema sulle funzioni continue rispetto ad una e misurabili rispetto all'altra variabile.* [Rend. del Sem. Mat. di Padova, Anno XVII (1948), pp. 102-106]. – G. STAMPACCHIA: *Criteri di compattezza per gli insiemi di funzioni continue rispetto alle variabili separatamente.* [Rend. del Sem. Mat.

nonchè un criterio, anch'esso necessario e sufficiente, affinchè un insieme di funzioni misurabili secondo BOREL sia compatto rispetto alla convergenza quasi-uniforme in capacità [3].

1. - Sia Σ uno spazio astratto ed $\boldsymbol{F}$ una famiglia di insiemi di Σ completamente additiva [4].

Gli insiemi di $\boldsymbol{F}$ saranno detti *misurabili* ($\boldsymbol{F}$).

Una funzione reale $f(x)$ di punto dello spazio astratto Σ, definita in un insieme E, sarà detta *misurabile* ($\boldsymbol{F}$) *in* E, se l'insieme E è misurabile ($\boldsymbol{F}$) e se tale è anche, per ogni numero a reale, l'insieme dei punti x di E in cui $f(x) > a$ [5].

Sia $\mu(\Gamma)$ una funzione d'insieme non negativa, definita per ogni insieme Γ misurabile ($\boldsymbol{F}$) e soddisfacente alle seguenti condizioni:

I) *Data una coppia d'insiemi* Γ_1 *e* Γ_2 *misurabili* ($\boldsymbol{F}$) *e tali che* $\Gamma_1 \subset \Gamma_2$, *risulta* $\mu(\Gamma_1) \leq \mu(\Gamma_2)$.

II) *Dato un numero finito od un'infinità numerabile d'insiemi* Γ_i *misurabili* ($\boldsymbol{F}$), *risulta* $\mu(\sum_i \Gamma_i) \leq \sum_i \mu(\Gamma_i)$.

La funzione $\mu(\Gamma)$ sarà detta *misura* ($\boldsymbol{F}, \mu$) e, per ogni insieme Γ misurabile ($\boldsymbol{F}$), il numero $\mu(\Gamma)$ sarà detto *la misura* (μ) di Γ.

Se ogni punto di un insieme E di Σ, ad eccezione di quelli di un sotto-insieme di E di misura (μ) nulla, gode di una certa

di Padova. Anno XIX (1950), pp. 201-213]. *Sulle successioni di funzioni continue rispetto ad una variabile e misurabili rispetto ad un'altra.* [Rend. Acc. Naz. Lincei s. 8, v. VI, pp. 298-301 (1949)]. - F. CAFIERO: *Criteri di compattezza per le successioni di funzioni generalmente a variazione limitata.* [Nota I. - Rend. Acc. Naz. Lincei s. 8, v. VIII, fasc. 4, pp. 305-311. - Nota II, ibidem, fasc. 5, pp. 450-457].

(3) Per la nozione di capacità cfr., ad esempio, M. BRELOT: *Points irreguliers et trasformations continues en théorie du potentiel.* [Journal de Mathématique. Tome 19 (1940), pp. 319-337].

(4) Tale cioè che:

i) *L'insieme vuoto appartiene ad* $\boldsymbol{F}$.

i) *Il complementare di un insieme di* $\boldsymbol{F}$ *appartiene ad* $\boldsymbol{F}$.

ii) *La somma di un numero finito o di una infinità numerabile di insiemi di* $\boldsymbol{F}$ *appartiene ad* $\boldsymbol{F}$.

(5) Per le proprietà di cui godono le funzioni misurabili ($\boldsymbol{F}$) cfr. S. SAKS: *Theory of the Integral*, pp. 12-15.

proprietà, noi diremo che tale proprietà è soddisfatta *quasi-ovunque* (μ) in E.

Due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ definite in un insieme E di Σ, saranno dette *equivalenti* (μ) in E se assumono gli stessi valori quasi-ovunque (μ) in E.

2. - Date le funzioni $f(x)$ e $g(x)$ misurabili ($\boldsymbol{F}$) in E e fissato un numero positivo ε, indicheremo con $H(f, g, \varepsilon)$ il sottoinsieme di E costituito dai punti x di E in cui risulta:

$$|f(x) - g(x)| \geq \varepsilon .$$

L'insieme $H(f, g, \varepsilon)$ è ovviamente misurabile ($\boldsymbol{F}$).

Ciò posto, data la successione $\{f_n(x)\}$ di funzioni misurabili ($\boldsymbol{F}$) in E, diremo che essa converge *in misura* (μ) verso la funzione $f(x)$ misurabile ($\boldsymbol{F}$) in E, se per ogni coppia di numeri positivi ε ed η esiste un indice $\nu(\varepsilon, \eta)$ tale che per $n > \nu(\varepsilon, \eta)$ si abbia:

$$\mu\,[H(f_n, f, \varepsilon)] < \eta \text{ (6)} .$$

Sussiste il seguente teorema:

I. *Condizione necessaria e sufficiente perchè la successione* $\{f_n(x)\}$ *di funzioni misurabili* ($\boldsymbol{F}$) *in* E *converga in misura* (μ) *verso una funzione misurabile* ($\boldsymbol{F}$) *in* E, *è che per ogni coppia di numeri positivi* ε *ed* η *si possa determinare un indice* $\nu(\varepsilon, \eta)$ *in modo tale che risulti*:

$$\mu\,[H(f_p, f_q, \varepsilon)] < \eta$$

per $p \geq \nu(\varepsilon, \eta)$ *e* $q \geq \nu(\varepsilon, \eta)$.

Il teorema enunciato estende alle successioni di funzioni misurabili ($\boldsymbol{F}$), quello di Cauchy per la convergenza in misura di una successione di funzioni misurabili nel senso di Lebesgue.

(6) Seguendo i classici procedimenti, si dimostra facilmente che: *se una successione di funzioni misurabili* ($\boldsymbol{F}$) *in* E, *converge in misura* (μ) *verso due distinte funzioni misurabili* ($\boldsymbol{F}$), *queste sono equivalenti* (μ).

Esso si dimostra con ragionamenti analoghi a quelli seguiti per la dimostrazione del teorema ora citato di CAUCHY, poichè in questa viene soltanto sfruttata la monotonia e la sub-additività completa della misura secondo LEBESGUE.

Per la stessa ragione sussiste anche il seguente teorema che estende alle successioni di funzioni misurabili $(\boldsymbol{F})$ quello analogo dato da F. RIESZ per le successioni di funzioni misurabili nel senso di LEBESGUE.

II. *Da una successione* $\{f_n(x)\}$ *di funzioni misurabili* $(\boldsymbol{F})$ *in* E, *convergente in misura* (μ) *verso una funzione* $f(x)$ *misurabile* $(\boldsymbol{F})$ *in* E, *se ne può estrarre una convergente in* E *quasi-ovunque* (μ) *e quasi-uniformemente* (μ) *verso* $f(x)$.

Il significato che si deve attribuire alle locuzioni *convergente quasi-ovunque* (μ) e *convergente quasi-uniformemente* (μ), usate nel teorema ora enunciato, è ovvio (7).

3. - Diremo che la funzione $f(x)$ misurabile $(\boldsymbol{F})$ in E è *quasi-limitata* (μ) in E se, per ogni numero positivo ε, è possibile determinare un numero positivo A ed un sotto-insieme I misurabile $(\boldsymbol{F})$ di E, di misura (μ) minore di ε, in modo tale che si abbia $|f(x)| < A$ in tutti i punti di $E - I$ (8).

( ) Si noti che dalla convergenza quasi-ovunque (μ) di una successione $\{f_n(x)\}$ di funzioni misurabili $(\boldsymbol{F})$ in E, di misura (μ) finita, verso una funzione $f(x)$ misurabile $(\boldsymbol{F})$, non segue in generale nè la convergenza quasi-uniforme (μ), nè quella in misura (μ) della successione stessa verso la $f(x)$.

Seguendo i classici procedimenti si può invece dimostrare che: *se una successione di funzioni misurabili* $(\boldsymbol{F})$ *in* E, *converge in* E *quasi-uniformemente* (μ) *verso una funzione* $f(x)$ *misurabile* $(\boldsymbol{F})$, *essa converge in* E *quasi ovunque* (μ) *verso* $f(x)$.

(8) Le funzioni misurabili $(\boldsymbol{F})$ in un insieme E di misura (μ) finita, non sono in generale quasi-limitate (μ) in E. Ciò invece accade quando alla misura $(\boldsymbol{F}, \mu)$ si impone l'ulteriore condizione:

Per ogni successione $\{\Gamma_i\}$ *non crescente di insiemi misurabili* $(\boldsymbol{F})$, *convergente verso l'insieme vuoto, risulta*:

$$\lim_{i \to \infty} \mu(\Gamma_i) = \mu(\lim_{i \to \infty} \Gamma_i) = 0 .$$

In questo caso infatti, com' è stato già osservato da KOROVKIN (Mathe-

Ogni funzione misurabile $(\boldsymbol{F})$ in E ed ivi quasi limitata (μ) gode ovviamente della seguente proprietà:

α) *Per ogni coppia di numeri positivi ε ed ω è possibile decomporre E in un numero finito k di insiemi parziali E_i $(i = 1, 2, \ldots . k)$ misurabili $(\boldsymbol{F})$, a due a due privi di punti in comune, e determinare un sotto-insieme I misurabile $(\boldsymbol{F})$ di E, di misura (μ) minore di ε, in modo tale che l'oscillazione di $f(x)$ in ognuno degli insiemi $E_i - I \cdot E_i$ sia minore di ω.*

Per tale ragione, detto Φ un insieme di funzioni misurabili $(\boldsymbol{F})$ in E ed ivi quasi-limitate (μ), diremo che le funzioni di Φ sono *egualmente misurabili* $(\boldsymbol{F})$ in E se, per ogni coppia di numeri positivi ε ed ω, è possibile decomporre E in un numero finito k di insiemi parziali E_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ misurabili $(\boldsymbol{F})$, a due a due privi di punti in comune, ed associare ad ogni funzione $f(x)$ di $\boldsymbol{F}$ un sotto-insieme I_f misurabile $(\boldsymbol{F})$ di E, di misura (μ) minore di ε, in modo tale che l'oscillazione di ogni funzione $f(x)$ di Φ sia in ogni insieme $E_i - E_i \cdot I_f$ minore di ω.

Analogamente diremo che le funzioni di Φ sono *egualmente quasi-limitate* (μ) se, per ogni numero positivo ε, si può determinare un numero positivo A ed associare ad ogni funzione $f(x)$ di Φ un insieme misurabile $(\boldsymbol{F})$, I_f, di misura (μ) minore di ε, in modo tale che per ogni funzione $f(x)$ di Φ si abbia $|f(x)| < A$ in $E - I_f$.

Ciò posto dimostriamo il seguente teorema, che estende alle funzioni misurabili $(\boldsymbol{F})$ un criterio necessario e sufficiente, dato da Fréchet, per la compattezza, rispetto alla convergenza in misura, di un insieme di funzioni misurabili nel senso di Lebesgue.

Condizione necessaria e sufficiente affinchè un insieme Φ di funzioni misurabili $(\boldsymbol{F})$ in E ed ivi quasi-limitate (μ), sia compatto rispetto alla convergenza in misura (μ), è che le

matical Reviews, vol, 9; N. 7, p. 339), il teorema di Severini – Egoroff si estende alle funzioni misurabili $(\boldsymbol{F})$ e quindi, essendo ogni funzione misurabile $(\boldsymbol{F})$ in E il limite di una successione di funzioni misurabili $(\boldsymbol{F})$ in E ed assumenti un numero finito di valori, ne segue l'asserto.

funzioni di Φ siano egualmente quasi-limitate (μ) *ed egualmente misurabili* ($\boldsymbol{F}$) *in* E.

La necessità della condizione relativa alla eguale limitatezza (μ) è ovvia. Essa, in virtù del teorema II, discende dall'ipotesi di compattezza dell'insieme Φ e dal fatto che le funzioni di Φ sono supposte quasi-limitate (μ).

Passiamo quindi a dimostrare la necessità della condizione relativa alla eguale misurabilità ($\boldsymbol{F}$) delle funzioni di Φ: facciamo vedere cioè che, nell'ipotesi che l'insieme Φ di funzioni misurabili ($\boldsymbol{F}$) e quasi-limitate (μ) sia compatto rispetto alla convergenza in misura (μ), per ogni fissata coppia di numeri positivi ε ed ω, si può realizzare una suddivisione, diciamola S, di E in insiemi parziali misurabili ($\boldsymbol{F}$), a due a due privi di punti in comune, in ognuno dei quali l'oscillazione di ogni funzione $f(x)$ di Φ è minore di ω quando si prescinde dai valori assunti in un insieme I_f misurabile $\boldsymbol{F}$ e di misura (μ) minore di ε.

A tale scopo, detta $f_1(x)$ una funzione di Φ e fissati i numeri positivi ε ed ω, decomponiamo l'insieme E in un numero finito di insiemi parziali $E_i^{(1)}$ $(i = 1, 2, \ldots, k_1)$ misurabili ($\boldsymbol{F}$), a due a due privi di punti in comune, e determiniamo un sotto-insieme I_1 misurabile ($\boldsymbol{F}$) di E, di misura (μ) minore di $\varepsilon/2$, in modo tale che l'oscillazione di $f_1(x)$ in ognuno degli insiemi $E_i^{(1)} - I_1 \cdot E_i^{(1)}$ sia minore di $\omega/3$.

Ciò può farsi poichè ogni funzione di Φ, come abbiamo già osservato, gode della proprietà α).

Osserviamo ora che due casi sono possibili.

I° Caso: Si può determinare, per ogni funzione $f(x)$ di Φ, un sotto-insieme I_f misurabile ($\boldsymbol{F}$) di E, di misura (μ) minore di ε, in modo tale che l'oscillazione di $f(x)$ risulti minore di ω in ogni insieme $E_i^{(1)} - E_i^{(1)} \cdot I_f$.

II° Caso: Esiste un sotto-insieme Φ_1 di funzioni di Φ, le quali, comunque si prescinda per ognuna di esse dai valori assunti in un sotto-insieme di E misurabile ($\boldsymbol{F}$) e di misura (μ) minore di ε, hanno oscillazione maggiore di ω in qualche insieme $E_i^{(1)}$ $(i = 1, 2, \ldots. k_1)$.

Nel primo caso la suddivisione S è realizzata. Nel secondo caso osserviamo che all'insieme Φ_1 non appartengono le funzioni $f(x)$ di Φ per le quali risulta:

$$(1) \qquad \mu\left[H\left(f_1, f, \frac{\omega}{3}\right)\right] \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

È infatti:

$$|f(x') - f(x'')| \leq |f(x') - f_1(x')| + |f_1(x') - \\ - f_1(x'')| + |f_1(x'') - f(x'')|$$

e quindi posto:

$$I_f = I_1 + H\left(f_1, f, \frac{\omega}{3}\right),$$

se la (1) è verificata si ha:

$$\mu(I_f) < \varepsilon, \ \textit{estr. sup.}\ |f(x') - f(x'')| < \omega$$

per x' ed x'' appartenenti ad $E_i^{(1)} - I_f \cdot E_i^{(1)}$ $(i = 1, 2, \ldots, k_1)$.

Se quindi $f_2(x)$ appartiene a Φ_1, soddisfa alla condizione:

$$\mu\left[H\left(f_1, f_2, \frac{\omega}{3}\right)\right] > \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ciò posto, suddividiamo l'insieme E in un numero finito di insiemi parziali $E_j^{(2)}$ $(j = 1, 2, \ldots, k_2)$ misurabili $(\boldsymbol{F})$, a due a due privi di punti in comune, e determiniamo un sotto-insieme I_2 misurabile $(\boldsymbol{F})$ di E, di misura (μ) minore di $\varepsilon/2$, in modo tale che l'oscillazione di $f_2(x)$ in ognuno degli insiemi parziali $E_j^{(2)} - I_2 \cdot E_j^{(2)}$ sia minore di $\omega/3$.

Operiamo poi una suddivisione di E in insiemi parziali mediante gli insiemi:

$$E_{ij} = E_i^{(1)} \cdot E_j^{(2)} \quad (i = 1, 2, \ldots, k_1;\ j = 1, 2, \ldots, k_2).$$

È ovvio che in ognuno degli insiemi $E_{ij} - E_{ij} \cdot I_f$ l'oscillazione di ogni funzione $f(x)$ di Φ, non appartenente a Φ_1, è ancora minore di ω e che ciò accade, in ogni insieme $E_{ij} - E_{ij} \cdot I_2$, anche per la $f_2(x)$ di Φ_1. Se quindi per le rimanenti funzioni di Φ_1 si verifica il primo caso relativamente alla nuova suddivisione operata, la suddivisione S è ancora realizzata. Se invece esiste un sotto insieme Φ_2 di funzioni di Φ_1, le quali, comunque si prescinda per ognuna di esse dai valori assunti in un sotto insieme misurabile (F) di E, di misura (μ) minore di ε, hanno oscillazione maggiore di ω in qualche insieme E_{ij}, consideriamo una funzione $f_3(x)$ di Φ_2. Tale funzione non appartiene nè all'insieme delle funzioni di Φ per le quali si verifica la (1), nè all'insieme delle funzioni $f(x)$ di Φ per le quali risulta:

$$\mu\left[H\left(f_2, f, \frac{\omega}{3}\right)\right] \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sarà allora:

$$\mu\left[H\left(f_1, f_3, \frac{\omega}{3}\right)\right] > \frac{\varepsilon}{2}, \quad \mu\left[H\left(f_2, f_3, \frac{\omega}{3}\right)\right] > \frac{\varepsilon}{2}.$$

Scelta la $f_3(x)$, procediamo come dopo la scelta di $f_2(x)$ e così via.

Dico che con un numero finito di tali operazioni si realizza la suddivisione S.

Infatti, in caso contrario, si verrebbe a determinare la successione:

$$(2) \qquad f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$$

di funzioni di Φ godente della seguente proprietà:

Risulta:

$$(3) \qquad \mu\left[H\left(f_p, f_q, \frac{\omega}{3}\right)\right] > \frac{\varepsilon}{2} \qquad (p \neq q)$$

per tutti i valori degli indici p e q.

Ma essendo per ipotesi l'insieme Φ compatto rispetto alla convergenza in misura (μ), ciò è assurdo poichè la (3), in virtù del teorema I, esclude la possibilità che dalla successione (2) se ne possa estrarre una convergente in misura (μ) verso una funzione misurabile ($\boldsymbol{F}$).

Dimostriamo ora che la condizione è sufficiente.

A tale scopo, data la successione $\{f_n(x)\}$ di funzioni di Φ e fissato un numero positivo σ, decomponiamo E in un numero finito k di insiemi parziali E_i misurabili ($\boldsymbol{F}$), a due a due privi di punti in comune, e determiniamo un numero positivo A e, per ogni $f_n(x)$, un insieme I_n misurabile ($\boldsymbol{F}$), di misura (μ) minore di $\sigma/2$, in modo tale che risulti:

$$|f_n(x)| < A \text{ in } E - I_n \qquad (n = 1, 2, \ldots.) \tag{4}$$

e che per ogni n si abbia:

$$|f_n(x) - Y_n^{(i)}| < \frac{\sigma}{3} \text{ in } E_i - E_i \cdot I_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, k), \tag{5}$$

avendo indicato con $Y_n^{(i)}$ l'estremo superiore di $f_n(x)$ in $E_i - E_i \cdot I_n$.

Per la (4) si ha ovviamente:

$$|Y_n^{(i)}| \leq A \quad (i = 1, 2, \ldots, k\,;\, n = 1, 2, \ldots)$$

e quindi il punto:

$$P_n \equiv (Y_n^{(1)}, Y_n^{(2)}, \ldots, Y_n^{(k)})$$

dello spazio a k dimensioni varia, al variare di n, in un dominio limitato del detto spazio. Dalla successione $\{P_n\}$ se ne può quindi estrarre una, $\{P_{n_k}\}$, convergente.

Per s e t sufficientemente grandi risulta quindi:

$$|Y_{n_t}^{(i)} - Y_{n_s}^{(i)}| < \frac{\sigma}{3} \qquad (i = 1, 2, \ldots, k)$$

e, per la (5), anche:

$$(6) \qquad |f_{n_t}(x) - f_{n_s}(x)| < \sigma \quad \text{in } E - (I_{n_t} + I_{n_s}) .$$

Notiamo che:

$$\mu (I_{n_t} + I_{n_s}) < \sigma$$

e che quindi per la (6) risulta:

$$\mu [H (f_{n_t}, f_{n_s}, \sigma)] < \sigma$$

per s e t sufficientemente grandi.

Data l'arbitrarietà di σ, fissata una successione decrescente di numeri positivi, $\{\sigma_n\}$, tendente a zero, dalla successione $\{f_n(x)\}$ se ne può quindi estrarre una, $\{f_{1,n}(x)\}$, tale che per p e q sufficientemente grandi risulti:

$$\mu [H (f_{1,p} f_{1,q}, \sigma_1)] < \sigma_1 .$$

Da questa se ne può estrarre un'altra, $\{f_{2,n}(x)\}$, tale che per p e q sufficientemente grandi risulti:

$$\mu [H (f_{2,p}, f_{2,q}, \sigma_2)] < \sigma_2$$

e così via.

Considerando infine la successione:

$$f_{1,1}(x), f_{2,2}(x), \ldots, f_{n,n}(x), \ldots$$

è immediato verificare che essa soddisfa alla condizione necessaria e sufficiente, fornita dal teorema I, perchè una successione di funzioni misurabili ($\boldsymbol{F}$) in E converga in misura (μ) verso una funzione misurabile ($\boldsymbol{F}$) in E.

Il teorema enunciato è così completamente dimostrato.

Si osservi che in base al teorema II, il teorema enunciato fornisce anche un criterio necessario e sufficiente per la compattezza, rispetto alla convergenza quasi-uniforme (μ), di un insieme di funzioni misurabili $(\boldsymbol{F})$, nonchè un criterio sufficiente per la compattezza rispetto alla convergenza quasi-ovunque (μ) ([9]).

4. – Per dedurre dal teorema dimostrato nel numero precedente, un criterio necessario e sufficiente per la compattezza, rispetto alla convergenza quasi-uniforme in modo regolare, di un insieme di funzioni di due variabili, misurabili secondo Lebesgue, basta particolarizzare lo spazio astratto Σ nello spazio euclideo a due dimensioni, la famiglia $(\boldsymbol{F})$ in quella degli insiemi del piano (x, y) misurabili secondo Lebesgue ed assumere, per ogni insieme Γ misurabile secondo Lebesgue, come misura $(\boldsymbol{F}, \mu)$ la funzione d'insieme:

$$\mu(\Gamma) = mis\,\Gamma_x + mis\,\Gamma_y$$

dove con Γ_x e Γ_y abbiamo indicato rispettivamente la proiezione ortogonale sull'asse x e sull'asse y dell'insieme Γ e con la notazione *mis* abbiamo indicato la misura secondo Lebesgue.

Analogamente, per avere un criterio necessario e sufficiente per la compattezza, rispetto alla convergenza quasi-uniforme in modo semi-regolare rispetto ad y $[x]$, per insiemi di funzioni $f(x, y)$ misurabili secondo Lebesgue, particolarizzato lo spazio Σ e la famiglia $\boldsymbol{F}$ come nel caso precedente, basta assumere, per ogni insieme Γ misurabile secondo Lebesgue, come misura $(\boldsymbol{F}, \mu)$ la funzione d'insieme:

$$\mu(\Gamma) = mis\,\Gamma_x \quad [\mu(\Gamma) = mis\,\Gamma_y] .$$

Infine, per avere un criterio necessario e sufficiente per la compattezza, quasi uniforme in capacità, per insiemi di funzioni $f(x, y)$ misurabili secondo Borel, basta particolarizzare Σ nello spazio euclideo a due dimensioni, la famiglia $(\boldsymbol{F})$ in quella degli insiemi del piano (x, y) misurabili secondo Borel ed assumere, per ogni insieme Γ misurabile secondo Borel, come misura $(\boldsymbol{F}, \mu)$ la capacità di Γ.

([9]) Cfr. nota ([7]).