GABRIELE DARBO

Sulle condizioni sufficienti per la continuità di un integrale

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 22 (1953), p. 134-142
<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1953__22__134_0>

SULLE CONDIZIONI SUFFICIENTI PER LA CONTINUITÀ DI UN INTEGRALE

Nota (*) *di* GABRIELE DARBO (*a Padova*)

E' noto [1]) che se $Q(x, y)$ è una funzione continua assieme alla derivata $Q_x(x, y)$ in un rettangolo $\mathrm{R} \equiv \{a \leq x \leq b\,;\; y_1 \leq y \leq y_2\}$, l' integrale

$$I[y(x)] = \int_a^b Q(x,\ y(x))y'(x)dx$$

è *continuo* nella classe $\mathfrak{K}$ delle funzioni $y(x)$ assolutamente continue in $a \vdash\!\dashv b$ e tali che $y_1 \leq y(x) \leq y_2$.

S. Faedo [2]) ha dimostrato che la continuità (anche uniforme) sussiste ancora se si suppone la $Q(x, y)$ uniformemente lipschitziana rispetto ad x e se ne serve poi per dare delle condizioni sufficienti per la continuità di integrali del tipo di Fubini-Tonelli.

In questa nota, limitandoci a campi rettangolari dimostreremo i seguenti teoremi:

TEOREMA I. — *Se $Q(x, y)$ è una funzione quasi continua nel rettangolo $R \equiv \{a \leq x \leq b\,;\; y_1 \leq y \leq y_2\}$ e tale che esistano una funzione $F(x)$ monotona in $a \vdash\!\dashv b$ e una $\varphi(y)$ sommabile in $y_1 \vdash\!\dashv y_2$, tali che per ogni coppia (x', y) e (x'', y) di R si abbia*

$$(1) \qquad |Q(x',\ y) - Q(x'',\ y)| \leq |F(x') - F(x'')|\varphi(y)$$

(*) Pervenuta in Redazione il 23 gennaio 1953.

[1]) L. TONELLI: *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni*, I Vol. pag. 385-392.

[2]) S. FAEDO: *Un nuovo tipo di funzionali continui*, [Rend. di matem. e delle sue appl., Serie 5, pp. 223-249] pag. 228.

e se $y(x)$ *è una qualunque funzione della classe* $\mathcal{K}$, $Q(x, y(x))\cdot$ $\cdot y'(x)$ *è quasi continua in* $a \vdash\!\dashv b$.

TEOREMA II. — *Se* $Q(x, y)$ *è inoltre limitata in* R, $Q(x, y(x))y'(x)$ *è sommabile e l'integrale*

$$I[y(x)] = \int_a^b Q(x, y(x))y'(x)dx$$

è uniformemente continuo nella classe $\mathcal{K}$*; sussiste, cioè, la relazione*

$$|I[y(x)] - I[\bar{y}(x)]| \leq \theta(\rho)$$

per ogni coppia di funzioni $y(x)$ *e* $\bar{y}(x)$ *di* $\mathcal{K}$, *dove* $\rho = \max_{a \leq x \leq b} |y(x) - \bar{y}(x)|$ *e* $\theta(\rho)$ *è infinitesimo con* ρ.

1. - UN LEMMA PRELIMINARE. — Sia $y(x)$ assolutamente continua in $a \vdash\!\dashv b$; $\mathcal{H}$ l'insieme dei punti di $a \vdash\!\dashv b$ nei quali $y(x)$ non è derivabile o ha derivata nulla; $E(\Delta)$ l'insieme dei punti $x \in a \vdash\!\dashv b$ tali che $y(x) \in \Delta$ essendo Δ un insieme aperto *variabile* sull'asse y. Allora risulta

$$|E(\Delta) - \mathcal{H}| \rightarrow 0 \quad \text{uniformemente per} \quad |\Delta| \rightarrow 0 \;;$$ [3])

vale a dire, per ogni ε positivo esiste un $\sigma > 0$, tale che $|E(\Delta) - \mathcal{H}| < \varepsilon$ quando è $|\Delta| < \sigma$.

Prendiamo le mosse dalla seguente relazione, conseguenza di un teorema di L. Cesari [4]),

$$\int_\Delta N(y)dy = \int_{E(\Delta)} |y'(x)|dx\,, \tag{2}$$

dove $N(Y)$ è il numero di soluzioni dell'equazione $y(x) = Y$ contenute in $a \vdash\!\dashv b$.

Per ogni intero n positivo, indichiamo con $\mathcal{E}_n$ l'insieme dei punti x di $a \vdash\!\dashv b$ in cui è $|y'(x)| > \dfrac{1}{n}$ e poniamo

---

[3]) Se D è un insieme misurabile, indichiamo con $|D|$ la misura D.

[4]) L. CESARI: *Funzioni continue a variazione limitata in un insieme* [R. Acc. delle Sc. dell' Ist. di Bologna (1945) serie X, tomo II] pag. 143, Teorema V.

$\mathcal{T}_n = E(\Delta)\cdot\mathcal{E}_n$, $\mathcal{H}_n = a \vdash\!\dashv b - \mathcal{E}_n$. Allora è

$$E(\Delta) \subset \mathcal{H}_n + \mathcal{E}_n \tag{3}$$

e

$$\lim_{n\to\infty} |\mathcal{H}_n - \mathcal{H}| = 0.$$

Dato quindi ε positivo ad arbitrio, potremo determinare un intero ν tale che sia

$$|\mathcal{H}_\nu - \mathcal{H}| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4}$$

Dalla (2) segue inoltre che

$$\int_{E(\Delta)} |y'(x)|dx$$

è funzione assolutamente continua di Δ; quindi è possibile determinare un $\sigma > 0$, tale che, per ogni insieme aperto Δ con $|\Delta| < \sigma$, si abbia

$$\int_{E(\Delta)} |y'(x)|\,dx < \frac{\varepsilon}{2\nu}. \tag{5}$$

Ma abbiamo pure

$$\int_{E(\Delta)} |y'(x)|\,dx \geq \int_{\mathcal{T}_\nu} |y'(x)|\,dx \geq \frac{1}{\nu}|\mathcal{T}_\nu|,$$

che, assieme alla (4) ci dà

$$|\mathcal{T}_\nu| < \frac{\varepsilon}{2}; \tag{6}$$

e quindi dalle (3), (4), (5), (6) si trae

$$|E(\Delta) - \mathcal{H}| \leq |\mathcal{T}_\nu| + |\mathcal{H}_\nu - \mathcal{H}| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

2. - Dimostrazione del primo teorema. — $Q(x, y)$ è quasi continua in R; esiste perciò un insieme $\mathfrak{N} \subset a \vdash\!\dashv b$ numerabile e denso in $a \vdash\!\dashv b$, tale che per ogni $\bar{x} \in \mathfrak{N}$ sia $Q(\bar{x}, y)$ quasi continua rispetto ad y in $y_1 \vdash\!\dashv y_2$. Potremo supporre pure che $\mathfrak{N}$ non contenga punti di discontinuità per la $F(x)$, che per ipotesi è monotona.

Allora, essendo $\mathfrak{N}$ numerabile, potremo, in corrispondenza ad un $\sigma > 0$, determinare un insieme aperto Δ, con $|\Delta| < \sigma$, tale che $Q(\bar{x}, y)$ risulti per ogni $\bar{x} \varepsilon \mathfrak{M}$ continua in y su $y_1 \vdash\!\dashv y_2 - \Delta$, e in modo che in $y_1 \vdash\!\dashv y_2 - \Delta$ la $\varphi(y)$ sia limitata. Per un H opportuno sarà dunque $\varphi(y) \leq H$ in $y_1 \vdash\!\dashv y_2 - \Delta$.

Per le ipotesi fatte avremo

$$|Q(x, y) - Q(x_0, y)| \leq |F(x) - F(x_0)| \cdot H\,, \tag{7}$$

quando $y \varepsilon y_1 \vdash\!\dashv y_2 - \Delta$. E se x_0 è punto di continuità per la $F(x)$, sarà

$Q(x, y) \rightarrow Q(x_0, y)$ uniformemente per $x \rightarrow x_0$, in $y_1 \vdash\!\dashv y_2 - \Delta$

Se manteniamo x in $\mathfrak{M}$ questa relazione porta che $Q(x_0, y)$ è continua su $y_1 \vdash\!\dashv y_2 - \Delta$.

Possiamo infine dimostrare che $Q(x, y)$ è continua sull' insieme R^* che si ottiene togliendo da R i punti (x, y) tali che $y \varepsilon \Delta$ oppure $x \varepsilon \bar{\Delta}$, dove $\bar{\Delta}$ è un qualunque insieme aperto relativamente ad $a \vdash\!\dashv b$, che contiene tutti i punti di discontinuità di $F(x)$.

Infatti, sia (x_0, y_0) un punto di R^* e λ un arbitrario numero positivo. Allora si può scegliere il numero $\delta > 0$ in guisa che da

$$|y - y_0| < \delta \qquad y \varepsilon y_1 \vdash\!\dashv y_2 - \Delta$$

segua

$$|Q(x_0, y) - Q(x_0, y_0)| < \lambda\,;$$

dalla (7) si trae inoltre

$$|Q(x, y) - Q(x_0, y)| < \lambda$$

purchè $|x - x_0|$ risulti minore di un numero positivo opportuno, δ_1; in definitvia si trova

$$|Q(x, y) - Q(x_0, y_0) \leq 2\lambda$$

per $(x, y) \varepsilon R^*$ e sufficientemente vicino a (x_0, y_0).

Consideriamo ora la funzione $y(x)$ della classe $\mathcal{K}$ e in corrispondenza a un arbitrario $\varepsilon > 0$ determiniamo Δ e $\bar{\Delta}$ in modo che $|E(\Delta) - \mathcal{K}|$ sia minore di ε [5]) al pari di $|\bar{\Delta}|$ e che $Q(x, y)$

[5]) E per questo, in virtù del lemma, basta che la $|\bar{\Delta}|$ sia abbastanza piccola.

sia continua su R^*. Se x non appartiene a $E(\Delta)+\bar{\Delta}$, allora $y(x)$ non appartiene a Δ, e $(x, y(x)) \varepsilon R^*$; quindi $Q\ (x, y(x))$ è continua se si prescinde da $E(\Delta)+\bar{\Delta}$. In particolare $Q(x, y(x))$ è continua in $a \vdash\!\dashv b - \mathcal{H}$ se si prescinde da

$$(E(\Delta)+\bar{\Delta})-\mathcal{H} \subset (E(\Delta)-\mathcal{H})+\bar{\Delta}$$

e poichè è

$$|(E(\Delta)+\bar{\Delta})-\mathcal{H}| \leq |E(\Delta)-\mathcal{H}|+|\bar{\Delta}| < 2\varepsilon$$

per l'arbitrarietà di ε è dunque $Q(x, y(x))$ quasi continua in $a \vdash\!\dashv b - \mathcal{H}$. Tale è pure ivi $Q(x, y(x))y'(x)$.

Ma in $\mathcal{H}$ è quasi ovunque $y'(x)=0$ e dalla misurabilità di $\mathcal{H}$ segue che $Q(x, y(x))y'(x)$ è quasi continua in $a \vdash\!\dashv b$.

OSSERVAZIONE. — La relazione (7) ci permette di affermare non solo la quasi continuità della $Q(x_0, y)$ per ogni $x_0 \varepsilon a \vdash\!\dashv b$ sia punto di discontinuità della $F(x)$, ma addirittura l' uniforme quasi continuità della classe di funzioni $\{Q(x_0, y)\}$ descritta al variare di x_0 nell'insieme dei punti di continuità della $F(x)$, intendendo con ciò l'esistenza di un insieme aperto Δ di misura arbitrariamente piccola e tale che, a prescindere da esso le $Q(x_0, y)$ siano equicontinue al variare di x_0 nell'insieme dei punti di continuità di $F(x)$.

Potrebbe tuttavia accadere che negli eventuali punti x_0 di discontinuità di $F(x)$, la $Q(x_0, y)$ non sia quasi continua. In tal caso, però, detta funzione potrà esser modificata nei punti (x_0, y) in modo che si abbia, p. es.,

$$\lim_{x \to x_0+} Q(x, y) = Q(x_0, y) \qquad \text{se } x_0 \neq b$$

e prendendo il limite sinistro se $x_0 = b$ [6]).

Se anche su $F(x)$ si fa l'analoga modificazione, allora la relazione (1) continua ad esser soddisfatta e inoltre l' uniforme quasi continuità delle funzioni $\{Q(x_0, y)\}$ si avrà per x_0 variabile in tutto $a \vdash\!\dashv b$.

---

[6]) L' esistenza dei limiti unilaterali segue dalla (1) poichè se $\varepsilon > 0$, $|Q(x', y) - Q(x'', y)| < \varepsilon$ per $x_0 < x' < x'' < x_0 + \delta$ purchè sia δ opportunamente piccolo e y fissato. Così pure se $x_0 - \delta < x' < x'' < x_0$.

Nel seguito ci serviremo però unicamente del fatto che la $Q(x_0, y)$ potrà esser supposta quasi continua rispetto ad y, *qualunque* sia $x_0 \in a \vdash\!\dashv b$. Ciò perchè la eventuale modificazione anzidetta non altera il valore di $Q(x, y(x))\cdot y'(x)$ che in un insieme al più numerabile e quindi $I[y(x)]$ rimane invariato.

3. - DIMOSTRAZIONE DEL SECONDO TEOREMA. — Sia $y(x)$ una funzione della classe $\mathcal{K}$. Per ogni intero n positivo costruiamo la funzione $y_n(x)$ come segue: diviso l'intervallo $a \vdash\!\dashv b$ in 2^n parti uguali mediante i punti $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{2^n} = b$, sia $x_{r-1} \vdash\!\dashv x_r$ il generico intervallo della suddivisione e $\bar{x}_r$ un punto di massimo per la $y(x)$ nell'intervallo medesimo. Poniamo indi

$$
(8) \qquad
\begin{aligned}
y_n(x) &= \max_{x_{r-1} \leq \xi \leq x} y(\xi) \qquad \text{se } x_{r-1} \leq x \leq \bar{x}_r, \\
y_n(x) &= \max_{x \leq \xi \leq x_r} y(\xi) \qquad \text{se } \bar{x}_r \leq x \leq x_r\,.
\end{aligned}
$$

Si verificano allora le seguenti proprietà:

a) $y_n(x)$ è assolutamente continua in $a \vdash\!\dashv b$ e $(x, y(x)) \in R$; la funzione $y\ (x)$ appartiene cioè alla classe $\mathcal{K}$;

b) $y_n(x)$ è monotona non decrescente in ciascun intervallo $x_{r-1} \vdash\!\dashv \bar{x}_r$, e non crescente in $\bar{x}_r \vdash\!\dashv x_r$ $(r = 1, \ldots, 2^n)$;

c) l'insieme E_n dei punti x di $a \vdash\!\dashv b$ in cui è $y_n(x) = y(x)$, risulta chiuso e contenuto nell'insieme E_{n+1} ;

d) fuori di E_n è $y'_n(x) = 0$;

e) se indichiamo con $\mathcal{E}$ l'insieme dei punti di $a \vdash\!\dashv b$ in cui esiste la $y'(x)$ ed è diversa da zero si ha

$$\lim_{n \to \infty} E_n \mathcal{E} = \mathcal{E}\,.$$

Le proprietà *a*), *b*), *c*), *d*) si dimostrano facilmente. In quanto alla *e*) osserviamo che se x^* è un punto di $\mathcal{E}$, si ha $y'(x^*) \neq 0$. Se è $y'(x^*) > 0$, per tutti gli x di un opportuno intorno sinistro, δ, di x^* è $y(x) < y(x^*)$; allora, preso n in modo che sia $\dfrac{b-a}{2^n} < |\delta|$, se $x^* \in x_{r-1} \!\dashv x_r$, deve essere $x^* \in$ $\in x_{r-1} \!-\! x_r$ e risulta $\max\limits_{x_{r-1} \leq \xi \leq x^*} y(\xi) = y(x^*)$, cioè $y_n(x^*) = y(x^*)$, vale a dire $x^* \varepsilon E_n$; si ragiona in maniera analoga se $y'(x^*) < 0$ considerando un opportuno intorno destro, ecc. [7]).

Abbiamo allora i seguenti sviluppi

$$\left| \sum_{r=1}^{2n} \int_{x_{r-1}}^{x_r} \{ Q(x, y_n(x)) - Q(x_{r-1}, y_n(x)) \} y'_n(x) dx \right| \leq$$

$$\leq \sum_{r=1}^{2n} \int_{x_{r-1}}^{x_r} | Q(x, y_n(x)) - Q(x_{r-1}, y_n(x)) | \, | y'_n(x) | \, dx \leq$$

$$\leq \sum_{r=1}^{2n} \int_{x_{r-1}}^{x_r} | F(x) - F(x_{r-1}) | \, \varphi(y_n(x)) \, | y'_n(x) | \, dx \leq$$

$$\leq \sum_{r=1}^{2n} | F(x_r) - F(x_{r-1}) | \int_{x_{r-1}}^{x_r} \varphi(y_n(x)) \, | y'_n(x) | \, dx =$$

$$= \sum_{r=1}^{2n} | F(x_r) - F(x_{r-1}) | \left\{ \int_{x_{r-1}}^{\bar{x}_r} \varphi(y_n(x)) y'_n(x) dx - \int_{\bar{x}_r}^{x_r} \varphi(y_n(x)) y'_n(x) dx \right\} \leq$$

$$\leq \sum_{r=1}^{2n} | F(x_{r-1}) - F(x_r) | \left\{ \left| \int_{y_n(x_{r-1})}^{y_n(\bar{x}_r)} \varphi(y) dy \right| + \left| \int_{y_n(\bar{x}_r)}^{y_n(x_r)} \varphi(y) dy \right| \right\} =$$

$$= \sum_{r=1}^{2n} | F(x_{r-1}) - F(x_r) | \left\{ \left| \int_{y(x_{r-1})}^{y(\bar{x}_r)} \varphi(y) dy \right| + \left| \int_{y(\bar{x}_r)}^{y(x_r)} \varphi(y) dy \right| \right\}.$$

Se $\omega(\sigma)$ è il modulo di continuità della funzione

$$\int_{y_1}^{y} \varphi(y) dy \qquad (y_1 \leq y \leq y_2)$$

e σ_n la oscillazione massima di $y(x)$ negli intervalli $\{x_{r-1} \vdash\!\dashv x_r\}$ $(r = 1, \ldots, 2^n)$, risulta

$$\left| \sum_{r=1}^{2n} \int_{x_{r-1}}^{x_r} \{ Q(x, y_n(x)) - Q(x_{r-1}, y_n(x)) \} y'_n(x) dx \right| \leq$$

[7]) I punti x_r della suddivisione in $2n$ parti appartengono tutti a E_n e così pure i corrispondenti punti $\bar{x}_r$ di massimo.

$$\leq \sum_{r=1}^{2n} | F(x_{r-1}) - F(x_r) | \cdot 2\omega(\sigma_n) = 2 \, | F(b) - F(a) | \, \omega(\sigma_n) ,$$

ossia

$$\left| \int_a^b Q(x, y_n(x)) y'_n(x) dx - \sum_{r=1}^{2n} \int_{y(x_{r-1})}^{y(x_r)} Q(x_{r-1}, y) dy \right| \leq \tag{9}$$

$$\leq 2 \, | F(b) - F(a) | \, \omega(\sigma_n) .$$

Dalla proprietà *d*) segue

$$\int_a^b Q(x, y_n(x)) y'_n(x) dx = \int_{E_n} Q(x, y(x)) y'(x) dx$$

e per la *e*) risulta

$$\lim_{n \to \infty} \int_{E_n} Q(x, y(x)) y'(x) dx = \int_{\mathcal{E}} Q(x, y(x)) y'(x) dx =$$

$$= \int_a^b Q(x, y(x)) y'(x) dx ;$$

posto quindi

$$\left| \int_a^b Q(x, y(x)) y'(x) dx - \int_a^b Q(x, y_n(x)) y'_n(x) dx \right| = \varepsilon_n \tag{10}$$

sarà $\lim\limits_{n \to \infty} \varepsilon_n = 0$; inoltre dalla (9), (10) si ha

$$\left| I[y(x)] - \sum_{r=1}^{2n} \int_{y(x_{r-1})}^{y(x_r)} Q(x_{r-1}, y) dy \right| \leq 2 \, | F(b) - F(a) | \, \omega(\sigma_n) + \varepsilon_n . \tag{11}$$

Sia ora $\bar{y}(x)$ un'altra funzione della classe $\mathfrak{K}$; analogamente a quanto si è fatto per la $y(x)$, indichiamo con $\bar{\sigma}_n$ e $\bar{\varepsilon}_n$ le quantità corrispondenti a σ_n e ε_n per la $\bar{y}(x)$, avremo

$$\left| I[\bar{y}(x)] - \sum_{r=1}^{2n} \int_{\bar{y}(x_{r-1})}^{\bar{y}(x_r)} Q(x_{r-1}, y) dy \right| \leq 2 \, | F(b) - F(a) | \, \omega(\bar{\sigma}_n) + \bar{\varepsilon}_n . \tag{12}$$

Dalle (11) e (12) si ricava infine

$$(13)\quad |I[y(x)]-I[\bar{y}(x)]| \leq \left|\sum_{r=1}^{2n}\right| \left\{ \int_{y(x_{r-1})}^{y(x_r)} Q(x_{r-1}, y)dy - \int_{\bar{y}(x_{r-1})}^{\bar{y}(x_r)} Q(y_{r-1}, y)dy \right\} \Big| +$$

$$+ 2\,|\,F(b) - F(a)\,|\,(\omega(\sigma_n) + \omega(\bar{\sigma}_n)) + \varepsilon_n + \bar{\varepsilon}_n\ ;$$

ma

$$\left|\sum_{r=1}^{2n} \left\{ \int_{y(x_{r-1})}^{y(x_r)} Q(y_{r-1}, y)dy - \int_{\bar{y}(x_{r-1})}^{\bar{y}(x_r)} Q(x_{r-1}, y)dy \right\}\right| =$$

$$= \left|\sum_{r=1}^{2n} \left\{ \int_{\bar{y}(x_r)}^{y(x_r)} Q(x_{r-1}, y)dy - \int_{\bar{y}(x_{r-1})}^{y(x_{r-1})} Q(x_{r-1}, y)dy \right\}\right| \leq$$

$$\leq \left|\sum_{r=1}^{2n} \int_{\bar{y}(x_r)}^{y(x_r)} \{ Q(x_{r-1}, y) - Q(x_r, y) \}\, dy \right| + \left| \int_{\bar{y}(a)}^{y(a)} Q(a, y)dy \right| +$$

$$+ \left| \int_{\bar{y}(b)}^{y(b)} Q(b, y)dy \right| \leq \sum_{r=1}^{2n} \left| \int_{\bar{y}(x_r)}^{y(x_r)} |\,F(x_{r-1}) - F(x_r)\,|\,\varphi(y)dy \right| +$$

$$+ \left| \int_{\bar{y}(a)}^{y(a)} Q(x, y)dy \right| + \left| \int_{\bar{y}(b)}^{y(b)} Q(b, y)dy \right| \leq |\,F(b) - F(a)\,|\,\omega(\rho) + 2M\rho\,,$$

dove M è un numero tale che $|Q(x, y)| \leq M$ in R, e ρ ha il solito significato di massimo divario tra le funzioni $y(x)$ e $\bar{y}(x)$ in $a \vdash\!\dashv b$, e la (12) diventa

$$|I[y(x)] - I[\bar{y}(x)]| \leq |F(b) - F(a)|\omega(\rho) + 2M\rho +$$
$$+ 2|F(b) - F(a)|(\omega(\sigma_n) + \omega(\bar{\sigma}_n)) + \varepsilon_n + \bar{\varepsilon}_n\ ;$$

e poichè σ_n, $\bar{\sigma}_n$, ε_n, $\bar{\varepsilon}_n$ sono infinitesimi per $n \to \infty$, ne segue

$$|I[y(x)] - I[\bar{y}(x)]| \leq |F(b) - F(a)|\omega(\rho) + 2M\rho$$

che è quanto si voleva dimostrare.