RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIUSEPPE SCORZA DRAGONI

Un criterio di convergenza in lunghezza e la derivazione per serie

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 22 (1953), p. 177-180

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1953__22__177_0>

UN CRITERIO DI CONVERGENZA IN LUNGHEZZA E LA DERIVAZIONE PER SERIE

Nota (*) *di* GIUSEPPE SCORZA DRAGONI (*a Padova*)

In una Nota recente [1]), BAIADA ha dimostrato che:
Se le funzioni [2])

$$f_1(x),\ f_2(x),\ \dots \qquad (a \leq x \leq b;\ a < b)$$

sono assolutamente continue nell'intervallo chiuso $a \vdash\!\dashv b$ *e verificano la condizione*

$$\int_a^{b-h} |\, f_n'(x+h) - f_n'(x) \,|\, dx \leq \varepsilon_n(h) \qquad (0 < h < b-a;\ n = 1, 2, \dots), \tag{1}$$

con gli $\varepsilon_n(h)$ *infinitesimi, per* h *infinitesimo, e soddisfacenti alla*

$$\sum_{1}^{+\infty}{}_{r}\, \varepsilon_n\left(\frac{h}{2^r}\right) \leq \sigma(h) \qquad (n = 1, 2, \dots), \tag{2}$$

$\sigma(h)$ *essendo a sua volta infinitesimo con* h, *e se la successione*

$$f_1(x),\ f_2(x),\ \dots \tag{3}$$

converge uniformemente in $a \vdash\!\dashv b$ *verso una funzione (continua e) a variazione limitata* $f(x)$, *la successione* $l_1, l_2, \dots$ *delle*

(*) Pervenuta in Redazione il 23 gennaio 1953.

1) E. BAIADA, *Un criterio di convergenza in lunghezza e la derivazione per serie* [« Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa », serie III, vol. VI (1952), pagg. 59-68].

2) Consideriamo funzioni reali di variabile reale. Intendiamo l'integrazione nel senso di LEBESGUE; e se $g(x)$ è una funzione data in un certo intervallo, indichiamo con $g'(x)$ la derivata di g nei punti in cui g è derivabile e lo zero nei punti in cui g non è derivabile.

lunghezze delle curve $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, ..., *rappresentate dalle equazioni*

$$y = f_1(x),\ y = f_2(x),\ \dots \qquad (a \leq x \leq b),$$

converge verso la lunghezza l *della curva* $\mathcal{C}$, *rappresentata dall' equazione*

$$y = f(x) \qquad (a \leq x \leq b);$$

e quindi [3]) la successione $f'_1(x)$, $f'_2(x)$, ... converge approssimativamente verso $f'(x)$.

Atteso l' interesse del teorema, non mi sembra inopportuno far vedere che la dimostrazione stessa di BAIADA si può atteggiare in guisa da riuscire assai rapida e semplice.

Poniamo

$$h_r = (b - a)/2^r \qquad (r = 1,\ 2,\ \dots)$$

e dividiamo l'intervallo $a \vdash\!\!\dashv b$ in 2^r parti uguali mediante i punti

$$a_{r,\,0} = a, \quad a_{r,\,1} = a + h_r, \dots,$$
$$a_{r,\,s} = a + sh_r, \dots,\ a_{r,\,2^r} = a + 2^r h_r = b\,.$$

Indichiamo con $P_{n,\,r,\,s}$ il punto $(a_{r,s},\ f_n(a_{r,\,s}))$ della curva $\mathcal{C}_n$ e con $P_{r,\,s}$ il punto $(a_{r,\,s},\ f(a_{r,\,s}))$ della curva $\mathcal{C}$; con $\pi_{n,\,r}$ la poligonale di vertici successivi $P_{n,\,r,\,0}$, $P_{n,\,r,\,1}$, ..., $P_{n,\,r,\,2^r}$, iscritta a $\mathcal{C}_n$, e con π_r quella di vertici successivi $P_{r,\,0}$, $P_{r,\,1}$, ..., $P_{r,\,2^r}$, iscritta a $\mathcal{C}$; con $\lambda_{n,\,r}$ e λ_r le lunghezze rispettive di $\pi_{n,\,r}$ e di π_r.

La convergenza uniforme della (3) verso $f(x)$, porta che, oltre alle

$$\lim_{r \to +\infty} \lambda_{n,\,r} = l_n\,, \qquad \lim_{r \to +\infty} \lambda_r = l\,,$$

vere le prime per ogni valore fissato di n, sussiste anche, per ogni valore fisso di r, la

$$\lim_{n \to +\infty} \lambda_{n,\,r} = \lambda_r\,. \tag{4}$$

Quindi, per concludere nel senso voluto basta dimostrare

---

[3]) L. TONELLI, *Fondamenti di calcolo delle variazioni* [Zanichelli, Bologna, (1921)], vol. I, n. 28.

che è

$$l_n - \lambda_{n,r} \leq \sigma(h_r)\,. \tag{5}$$

Allora infatti risulta

$$| l - l_n | \leq l - \lambda_r + | \lambda_r - \lambda_{n,r} | + | \lambda_{n,r} - l_n | \leq$$
$$\leq l - \lambda_r + | \lambda_r - \lambda_{n,r} | + \sigma(h_r)\,;$$

dato il numero positivo η, si può scegliere il numero naturale t in guisa da aversi $\sigma(h_t) < \eta/3$ e $l - \lambda_t < \eta/3$; fissato t in tal guisa, se n è abbastanza grande, risulta $|\lambda_t - \lambda_{n,t}| < \eta/3$, vista la (4). E in definitiva si ottiene

$$| l - l_n | \leq l - \lambda_t + | \lambda_t - \lambda_{n,t} | + \sigma(h_t) < \eta\,,$$

almeno se il numero naturale n è abbastanza grande. Donde appunto la convergenza della successione l_1, l_2, ... verso l.

Quanto alla (5), fissato il numero naturale n, si considerino due vertici consecutivi, $P_{n,r,s}$ e $P_{n,r,s+1}$, di $\pi_{n,r}$. Essi sono anche vertici di $\pi_{n,r+1}$, separati mediante $P_{n,r+1,2s+1}$, che ha come ascissa la media aritmetica, $a_{r,s} + h_r/2$, delle ascisse di $P_{n,r,s}$ e $P_{n,r,s+1}$. Allora il punto medio, $Q_{n,r+1,2s+1}$, del segmento $P_{n,r,s}\,P_{n,r,s+1}$ ha la stessa ascissa di $P_{n,r+1,2s+1}$ e l'ordinata uguale alla media aritmetica

$$\{ f_n(a_{r,s} + h_r) + f_n(a_{r,s}) \} /2\,.$$

Dal teorema del triangolo e dalla assoluta continuità di $f_n(x)$ si trae

$$| \overline{P_{n,r,s}P_{n,r+1,2s+1}} + \overline{P_{n,r+1,2s+1}P_{n,r,s+1}} - \overline{P_{n,r,s}P_{n,r,s+1}} | \leq$$
$$\leq 2\cdot \overline{P_{n,r+1,2s+1}Q_{n,r+1,2s+1}} = | f_n(a_{r,s} + h_r) + f_n(a_{r,s}) -$$
$$- 2f_n(a_{r,s} + h_r/2) | = \left| \int_{a_{r,s}+h_r/2}^{a_{r,s}+h_r} f_n'(x)\,dx - \int_{a_{r,s}}^{a_{r,s}+h_r/2} f_n'(x)\,dx \right| =$$
$$= \left| \int_{a_{r,s}}^{a_{r,s}+h_r/2} \{ f_n'(x + h_r/2) - f_n'(x) \}\,dx \right| \leq \int_{a_{r,s}}^{a_{r,s}+h_r/2} | f_n'(x + h_r/2) - f_n'(x) |\,dx\,;$$

e da qui, sommando rispetto all' indice s, variabile da 0 a

$2^r - 1$, si deduce

$$\lambda_{n,\,r+1} - \lambda_{n,\,r} \leq \int_a^{b-h_r/2} | f_n'(x + h_r/2) - f_n'(x) |\, dx \leq \varepsilon_n(h_r/2)\,;$$

epperò

$$\begin{aligned} l_n - \lambda_{n,\,r} &= (\lambda_{n,\,r+1} - \lambda_{n,\,r}) + (\lambda_{n,\,r+2} - \lambda_{n,\,r+1}) + \ldots \leq \\ &\leq \varepsilon_n(h_r/2) + \varepsilon_n(h_{r+1}/2) + \ldots = \varepsilon_n(h_r/2) + \\ &+ \varepsilon_n(h_r/2^2) + \ldots \leq \sigma(h_r)\,, \end{aligned}$$

come si voleva. Donde la conclusione.