Rendiconti
del
Seminario Matematico
della
Università di Padova

Bruno Pini

Traduzione in equazioni integrali di un problema analogo al problema biarmonico fondamentale

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 22 (1953), p. 192-206

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1953__22__192_0>

TRADUZIONE IN EQUAZIONI INTEGRALI DI UN PROBLEMA ANALOGO AL PROBLEMA BIARMONICO FONDAMENTALE

Nota (*) *di* Bruno Pini (*a Bologna*)

La possibilità di esprimere una funzione biarmonica come una certa combinazione lineare di funzioni armoniche suggerisce di esprimere la soluzione del problema biarmonico fondamentale come una combinazione di semplici e doppi strati opportunamente ponderati.

Ciò porta a tradurre tale problema in un sistema di equazioni integrali; questa è la via seguita ad esempio da Marcolongo e da Lauricella, previa una opportuna trasformazione iniziale del problema. Però, anzichè sfruttare il fatto che l'equazione biarmonica nasce dall'iterazione dell'operatore di Laplace, ci si può invece appoggiare sulla possibilità di esprimere tale equazione come il risultato dell'applicazione successiva dell'operatore di Laplace e del suo aggiunto; partendo da questo punto di vista, Zaremba ha ideato un procedimento costruttivo, e un analogo procedimento è stato recentemente usato da Fichera.

Se ora sostituiamo all'operatore di Laplace l'operatore parabolico

$$\mathfrak{L} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial y},$$

poichè questo non è autoaggiunto, si presenteranno, come estensioni del problema biarmonico, due ben distinti problemi i quali potranno essere convenientemente trattati l'uno con uno dei procedimenti accennati, l'altro con l'altro.

(*) Pervenuta in Redazione il 22 aprile 1953.

Siano $x = \chi_i(y)$, $0 \leq x \leq a$, $i = 1, 2$, due funzioni continue con le loro derivate prime e tali che $\chi_1(y) < \chi_2(y)$. Indichiamo con D il dominio $0 \leq y \leq a$, $\chi_1(x) \leq x \leq \chi_2(y)$ e chiamiamo γ_i l'arco di equazione $x = \chi_i(x)$, $0 \leq y \leq a$, e c il segmento di caratteristica $y = 0$, $\chi_1(0) \leq x \leq \chi_2(0)$.

Un primo problema consiste nella ricerca di una funzione $u(x, y)$ che in $D - c - \gamma_1 - \gamma_2$ sia soluzione regolare dell'equazione

$$\mathfrak{L}^{(2}[u] = \frac{\partial^4 u}{dx^4} - 2\frac{\partial^3 u}{\partial x^3 \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

che essa e la sua derivata rispetto a y assumano assegnati su c, mentre essa e la sua derivata rispetto a x assumano assegnati valori su γ_1 e γ_2.

Un secondo problema consiste nella ricerca di una funzione $u(x, y)$ che in $D - \mathfrak{F} D$ sia soluzione regolare dell'equazione

$$\mathfrak{L}\overline{\mathfrak{L}}[u] = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

che assuma assegnati valori su $\mathfrak{F} D$, mentre la sua derivata rispetto a x assuma assegnati valori su γ_1 e γ_2.

Beninteso che i dati al contorno si possono intendere raggiunti in senso ordinario come limiti superficiali o in senso generalizzato. Noi ci poniamo dal primo di questi punti di vista e nella presente Nota trattiamo il primo dei problemi anzidetti, mentre il secondo è oggetto di un'altra Nota [1]).

In estensione a un classico risultato di ALMANSI sulla scomposizione di una funzione poliarmonica in funzioni armoniche, T. BOGGIO [2]) ha provato che se $\mathfrak{L}$ è un operatore differenziale lineare a coefficienti costanti, indicando con $D_x\,(D_y)$ l'operazione di derivazione rispetto a $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial}{\partial y}\right)$, se $\mathfrak{L}$ e $D_x\mathfrak{L}(D_y\mathfrak{L})$ sono primi tra loro, allora una soluzione regolare di $\mathfrak{L}^{(n)}[u] = 0$

---

1) B. PINI, *Un problema di valori al contorno per l'equazione* $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, in corso di stampa nei Rend. Acc. Naz. Lincei.

2) T. BOGGIO, *Sull'integrazione di alcune equazioni lineari alle derivate parziali,* Annali di Mat., 8 (3) 1902.

può porsi nella forma

$$u = \sum_{1}^{n}{}_k\, x^{n-k}\, v_k \qquad (\sum_{1}^{n}{}_k\, y^{n-k}\, v_k)$$

essendo v_k $(k = 1, 2, ..., n)$ soluzioni regolari di $\mathfrak{L}[u] = 0$.

Potremo perciò porre una soluzione di $\mathfrak{L}^{(2)}[u] = 0$ nella forma

$$xu + yv + w$$

con u, v, w soluzioni di $\mathfrak{L}[u] = 0$. D'altra parte, per classici risultati di HOLMGREN e LEVI, ogni soluzione ordinaria dell'equazione del calore può esprimersi come somma di un integrale di POISSON e di due doppi strati se i dati al contorno sono continui, o di due semplici strati se i dati su γ_1 e γ_2 sono funzioni continue con le loro derivate prime [3]).

Potremo perciò cercare la soluzione del problema

$$(1) \qquad \begin{array}{llll} \mathfrak{L}^{(2)}[u] = 0 & \text{in} & D - c - \gamma_1 - \gamma_2 & \\ u = f_i(y) & \text{su} & \gamma_i \quad , \ i = 1,\ 2, & \\ u = g(x) & \text{su} & c & , \ \begin{array}{l} f_1(0) = g(\chi_1(0)), \\ f_2(0) = g(\chi_2(0)) \end{array} \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} = \varphi_i(y) & \text{su} & \gamma_i \quad , \ i = 1,\ 2, & \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = \psi(x) & \text{su} & c\, , & \end{array}$$

sotto certe ipotesi di regolarità dei dati che preciseremo più avanti, come una certa combinazione di integrali di POISSON e di semplici e doppi strati.

Il problema in esame trovasi considerato, dal solo punto di vista dell'unicità della soluzione in una Nota di F. SICARDI [4]); a imitazione di una analoga questione trattata da LEVI-CIVITA e da FUBINI, viene integrato il prodotto $\dfrac{\partial u}{\partial y}\mathfrak{L}^{(2)}[u]$

---

[3]) Ciò non è più vero se i dati al contorno s'intendono raggiunti in un senso generalizzato; cfr. G. DOETSCH, *Les équations aux dérivées partielles du type parabolique*, Enseign. Math., 35 (1936) 43-87.

[4]) F. SICARDI, *Unicità della soluzione di una equazione a derivate parziali del 4° ordine a caratteristiche multiple*, Boll. U.M.I., 1 (2), (1939) 331-334.

sul dominio D e con opportune trasformazioni in integrali di linea viene isolato un integrale a integrando non negativo; se i dati al contorno sono nulli, si deduce che u deve essere identicamente nulla. Tale procedimento richiede però non solo la regolarità di u in $D - \mathfrak{F}D$, ma un certo ordine di regolarità in tutto D che permetta le trasformazioni eseguite. Per noi invece l'unicità della soluzione resterà acquisita in conseguenza dell'unicità della soluzione per il sistema di equazioni integrali in cui verrà tradotto il problema.

Lo stesso risultato si ha per l'equazione non omogenea

$$\mathfrak{L}^{(2)}[u] = F(x, y)$$

se $F(x, y)$ è continua in D e ivi verifica una condizione di HÖLDER rispetto a y.

Infatti, com'è noto [5]), in tali ipotesi

$$-\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_D F(Q)U(P, Q)dQ\,, \qquad (P = (x, y)\,,\ Q = (\xi, \eta))$$

se $U(P, Q)$ è la soluzione fondamentale dell'equazione del calore, è soluzione di $\mathfrak{L}[u] = F$. Con gli stessi ragionamenti usati da GEVREY per dimostrare questo fatto, si può provare che

$$-\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_D F(Q)(y - \eta)U(P, Q)dQ \tag{2}$$

è soluzione regolare di $\mathfrak{L}^{(2)}[u] = F$.

Cominciamo col provare che nel problema (1) si può supporre che sia $g(x) = \psi(x) = 0$.

Si ha infatti la seguente proposizione:

I. — *Se $f(x)$ è una funzione continua insieme alle sue derivate prima e seconda su $\alpha \leq x \leq \beta$ e $\varphi(x)$ è un'altra funzione continua sul medesimo intervallo, la funzione*

$$u(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_\alpha^\beta \left\{ \frac{f(\xi) - (\xi - x)f'(\xi)}{\sqrt{y}} + \right. \tag{3}$$

5) M. GEVREY, *Sur les équations aux dérivées partielles du type parabolique*, Jour. de Math., (6) 9 (1913) 305-471.

$$+ [\varphi(\xi) + f''(\xi)]\sqrt{y}\Big\} \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4y}\right] d\xi$$

è soluzione regolare di $\mathfrak{L}^{(2)}[u] = 0$ *nel semipiano* $y > 0$, *e per ogni* $\bar{x}$ *tale che* $\alpha < \bar{x} < \beta$, *si ha*

$$\lim_{(x,\,y)\to(\bar{x},\,0+)} u(x, y) = f(\bar{x}) \quad , \quad \lim_{(x,\,y)\to(\bar{x},\,0+)} \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = \varphi(\bar{x}).$$

Posto $\Phi(\xi) = \varphi(\xi) + f''(\xi)$, consideriamo la funzione

$$v(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_\alpha^\beta \Phi(\xi)\sqrt{y} \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4y}\right] d\xi \, ; \tag{4}$$

in base a note proprietà dell'integrale di Poisson [6]), si ha

$$\lim_{(x,\,y)\to(\bar{x},\,0+)} v(x, y) = 0 \tag{5}$$

per ogni $\bar{x}$ tale che $\alpha < \bar{x} < \beta$.

Esaminiamo

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_\alpha^\beta \frac{\Phi(\xi)}{2} \frac{\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4y}\right]}{\sqrt{y}} d\xi +$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_\alpha^\beta \Phi(\xi) \frac{(x-\xi)^2}{4y\sqrt{y}} \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4y}\right] d\xi \, .$$

Il primo dei due addendi a destra converge a $\frac{1}{2}\Phi(\bar{x})$ per $(x, y) \to (\bar{x}, 0+)$; il secondo si può scrivere

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \Phi(\bar{x}) \int_{\frac{\alpha-x}{2\sqrt{y}}}^{\frac{\beta-x}{2\sqrt{y}}} t^2 e^{-t^2} dt + \frac{1}{8\sqrt{\pi}} \int_{\alpha-x}^{\beta-x} [\Phi(x+z) - \Phi(\bar{x})] \frac{z^2}{y\sqrt{y}} \exp\frac{-z^2}{4y} dz \, ;$$

di questi due integrali il primo converge a $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ per

---

[6]) Cfr. E. Goursat, Cours d'Analyse Mathematique, III, 296-299.

$(x, y) \to (\bar{x}, 0+)$; il secondo si può scrivere

$$\left(\int_{\alpha-x}^{-\varepsilon} + \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} + \int_{+\varepsilon}^{\beta-x}\right)[\Phi(x+z) - \Phi(\bar{x})]\frac{z^2}{y\sqrt{y}}\exp\frac{-z^2}{4y}\,dz\,;$$

gl'integrali $\int_{\alpha-x}^{-\varepsilon}$, $\int_{+\varepsilon}^{\beta-x}$ convergono manifestamente a zero per $(x, y) \to (\bar{x}, 0+)$; d'altra parte, non appena ε è abbastanza piccolo e x è abbastanza prossimo a $\bar{x}$, sarà $|\Phi(x+z) - \Phi(\bar{x})| < \delta$, essendo δ un prefissato numero positivo; perciò

$$\left|\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}[\Phi(x+z) - \Phi(\bar{x})]\frac{z^2}{y\sqrt{y}}\exp\frac{-z^2}{4y}\,dz\right| < 8\delta\int_{-\frac{\varepsilon}{2\sqrt{y}}}^{+\frac{\varepsilon}{2\sqrt{y}}} t^2e^{-t^2}dt < 4\delta\sqrt{\pi}\,.$$

Si conclude che la funzione (4), oltre alla (5), verifica la relazione

$$\lim_{(x,\,y)\to(\bar{x},\,0+)}\frac{\partial v}{dy} = \Phi(\bar{x}). \tag{6}$$

Consideriamo ora la funzione

$$w(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{\alpha}^{\beta}[f(\xi) - (\xi - x)f'(\xi)]\frac{\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4y}\right]}{\sqrt{y}}\,d\xi. \tag{7}$$

Per le proprietà dell'integrale di POISSON, si ha

$$\lim_{(x,\,y)\to(\bar{x},\,0+)} w(x, y) = f(\bar{x}) \qquad (\alpha < \bar{x} < \beta)\,. \tag{5'}$$

Poi

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{f(x)}{2\sqrt{\pi}}\int_{\alpha}^{\beta}\left[\frac{(x-\xi)^2}{4y^2\sqrt{y}} - \frac{1}{2y\sqrt{y}}\right]\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4y}\right]d\xi\, +$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{\alpha}^{\beta}[f(\xi) - f(x) - (\xi - x)f'(\xi)]\left[\frac{(x-\xi)^2}{4y^2\sqrt{y}} - \frac{1}{2y\sqrt{y}}\right]\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4y}\right]d\xi.$$

Il primo termine a secondo membro è uguale a

$$\frac{f(x)}{4y\sqrt{\pi y}}\left\{(\alpha-x)\exp\left[-\frac{(\alpha-x)^2}{4y}\right]-(\beta-x)\exp\left[-\frac{(\beta-x)^2}{4y}\right]\right\}$$

e converge perciò a zero per $(x, y) \to (\bar{x}, 0+)$; il secondo termine, posto $f(\xi)-f(x)-(\xi-x)f'(\xi)=-\frac{1}{2}(\xi-x)^2 f''(\theta)$, ($\theta$ compreso tra ξ e x), si può scrivere

$$\frac{f''(\bar{x})}{\sqrt{\pi}}\cdot\int\limits_{\frac{\alpha-x}{2\sqrt{y}}}^{\frac{\beta-x}{2\sqrt{y}}}(t^2-2t^4)e^{-t^2}dt+\frac{1}{4\sqrt{\pi}}\int\limits_{\alpha}^{\beta}[f''(\theta)-$$

$$-f''(\bar{x})]\left[\frac{(x-\xi)^2}{2y\sqrt{y}}-\frac{(x-\xi)^4}{4y^2\sqrt{y}}\right]\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4y}\right]d\xi.$$

Il primo integrale converge a $-\sqrt{\pi}$ per $(x, y) \to (\bar{x}, 0+)$. Il secondo si può scrivere

$$\left(\int\limits_{\alpha-x}^{-\varepsilon}+\int\limits_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}+\int\limits_{+\varepsilon}^{\beta-x}\right)[f''(\theta)-f''(\bar{x})]\left(\frac{z^2}{2y\sqrt{y}}-\frac{z^4}{4y^2\sqrt{y}}\right)\exp\frac{-z^2}{4y}dz;$$

degl'integrali ora scritti, il primo e il terzo convergono manifestamente a zero per $(x, y) \to (\bar{x}, 0+)$, mentre il secondo, prendendo ε opportunamente piccolo, si può rendere in modulo piccolo a piacere, causa la continuità della $f''(x)$. Pertanto si ha

$$(6') \qquad \lim_{(x,y)\to(\bar{x},0+)}\frac{\partial w}{\partial y}=-f''\bar{x}) \qquad (\alpha<\bar{x}<\beta).$$

D'altra parte la (3) è, nel semipiano $y > 0$, soluzione regolare di $\mathfrak{L}^{(2)}[u]=0$ poichè essa si può scrivere $J_1+xJ_2+yJ_3$, con J_1, J_2, J_3 tre integrali di POISSON.

Pertanto in base alle (5), (6), (5') e (6') resta provato l'asserto.

Il problema (1) può quindi essere sostituito dal seguente

$$(1') \quad \begin{array}{llll} \mathfrak{L}^{(2)}[u]=0 & \text{in} & D-c-\gamma_1-\gamma_2 & \\ u=f_i(y) & \text{su} & \gamma_i & , f_i(0)=0,\ i=1,\ 2 \\ u=0 & \text{su} & c & \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}=\varphi_i(y) & \text{su} & \gamma_i & , i=1,\ 2 \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=0 & \text{su} & c\,. & \end{array}$$

Per comodità di scrittura, poniamo

$$\frac{(x-\xi)^m}{(y-\eta)^n}\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-\eta)}\right]=U_{m,n}(x,y\,;\ \xi,\ \eta)$$

e mostriamo che:

II. — *Se le funzioni* $f_i(y)$, $f_i'(y)$, $\varphi_i(y)$, $0\leq y\leq a$, *sono continue, si possono univocamente determinare quattro funzioni continue* $\mu_i(y)$, $\nu_i(y)$, $i=1,2$, *in modo che*

$$(8) \quad \begin{aligned} u(x,\ y)=\sum_1^2{}_i\int_0^y \mu_i(\eta)\,U_{0,1/2}(x,\ y\,;\ \chi_i(\eta),\ \eta)d\eta\ + \\ +\sum_1^2{}_i\int_0^y \nu_i(\eta)U_{2,3/2}(x,\ y\,;\ \chi_i(\eta),\ \eta)d\eta \end{aligned}$$

sia soluzione di (1′).

Anzitutto la funzione $u(x,y)$ è, in $D-\gamma_1-\gamma_2$, soluzione regolare di $\mathfrak{L}^{(2)}[u]=0$, poichè essa si può porre nella forma $S'+S_1''+xS_2''$, ove s'intende con S' uno strato semplice e con S_1'', S_2'' due doppi strati.

Per provare la II ci serviremo di ragionamenti simili a quelli usati da HOLMGREN [7]) e da LEVI [8]) per l'equazione del calore. Imponendo le assegnate condizioni al contorno, si scri-

---

7) E. HOLMGREN, *Sur l'équation de la propagation de la chaleur*, Arkiv för Mat., Astr. och Fys., 4 (1908).

8) E. E. LEVI, *Sull'equazione del calore*, Annali di Mat. (3), 14, (1908).

veranno quattro equazioni integrali di VOLTERRA di cui due di prima specie e due di seconda specie. Quelle di prima specie si trasformeranno in due di seconda specie; con ciò si avrà un sistema di quattro equazioni integrali di VOLTERRA di seconda specie.

Si ha intanto

$$\text{(9)} \qquad \sum_1^2{}_i \int_0^y \mu_i(\eta) U_{0,1/2}(\chi_j(y),\ y;\ \chi_i(\eta),\ \eta) d\eta +$$

$$+ \sum_1^2{}_i \int_0^y \nu_i(\eta) U_{2,3/2}(\chi_j(y),\ y;\ \chi_i(\eta),\ \eta) d\eta = f_j(y), \qquad j = 1,\ 2.$$

Poichè $U_{0,0}(\chi_j(y),\ y;\ \chi_i(\eta),\ \eta)$ e $U_{2,1}(\chi_j(y),\ y;\ \chi_i(\eta),\ \eta)$ sono funzioni continue insieme alle loro derivate parziali prime, si applicherà il procedimento di VOLTERRA [9]). Allo scopo moltiplichiamo per $\dfrac{dy}{\sqrt{z-y}}$ e integriamo tra 0 e z; si ha

$$\sum_1^2{}_i \int_0^z \frac{dy}{\sqrt{z-y}} \int_0^y \mu_i(\eta) U_{0,1/2}(\chi_j(y),\ y;\ \chi_i(\eta),\ \eta) d\eta +$$

$$+ \sum_1^2{}_i \int_0^z \frac{dy}{\sqrt{z-y}} \int_0^y \nu_i(\eta) U_{2,3/2}(\chi_j(y),\ y;\ \chi_i(\eta),\ \eta) d\eta = \int_0^z \frac{f_j(y)dy}{\sqrt{z-y}}$$

da cui, invertendo l'ordine delle integrazioni,

$$\text{(10)} \qquad \sum_1^2{}_i \int_0^z \mu_i(\eta) d\eta \int_\eta^z \frac{1}{\sqrt{z-y}} U_{0,1/2}(\chi_j(y),\ y;\ \chi_i(\eta),\ \eta) dy +$$

$$+ \sum_1^2{}_i \int_0^z \nu_i(\eta) d\eta \int_\eta^z \frac{1}{\sqrt{z-y}} U_{2,3/2}(\chi_j(y),\ y;\ \chi_i(\eta),\ \eta) dy = \int_0^z \frac{f_j(y)dy}{\sqrt{z-y}}$$

---

9) V. VOLTERRA, *Leçons sur les équations intégrales et les équations intégro-différentielles*, Paris, 1913, pag. 60 e sgg.

che scriviamo

$$(10') \qquad \sum_1^2{}_i \int_0^z \mu_i(\eta) V_{ji}(\eta, z) d\eta + \sum_1^2{}_i \int_0^z \nu_i(\eta) W_{ji}(\eta, z) d\eta = F_j(z) .$$

Poichè $\displaystyle\int_\eta^z \frac{dy}{\sqrt{(z-y)(y-\eta)}} = \pi$, si ha

$$V_{hh}(z, z) = \lim_{\eta \to z} \int_\eta^z \frac{\exp\left[-\dfrac{(\chi_h(y)-\chi_h(\eta))^2}{4(y-\eta)}\right]}{\sqrt{(z-y)(y-\eta)}} dy = \pi$$

mentre

$$V_{hk}(z, z) = \lim_{\eta \to z} \int_\eta^z \frac{\exp\left[-\dfrac{(\chi_h(y)-\chi_k(\eta))^2}{4(y-\eta)}\right]}{\sqrt{(z-y)(y-\eta)}} dy = 0$$

essendo $|\chi_h(y) - \chi_k(y)| > 0$.

Poichè $\displaystyle\lim_{\eta \to z} \int_\eta^z \sqrt{\frac{y-\eta}{z-y}}\, dy = 0$, si ha

$$W_{hh}(z, z) = \lim_{\eta \to z} \int_\eta^z \frac{[\chi_h(y)-\chi_h(\eta)]^2}{\sqrt{(z-y)(y-\eta)^3}} \exp\left[-\frac{(\chi_h(y)-\chi_k(\eta))^2}{4(y-\eta)}\right] dy = 0$$

$$W_{hk}(z, z) = \lim_{\eta \to z} \int_\eta^z \frac{[\chi_h(y)-\chi_k(\eta)]^2}{\sqrt{(z-y)(y-\eta)^3}} \exp\left[-\frac{(\chi_h(y-\chi_k(\eta))^2}{4(y-\eta)}\right] dy = 0$$

essendo $|\chi_h(y) - \chi_k(y)| > 0$.

È poi

$$\frac{\partial V_{ji}(\eta, z)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \int_\eta^z \frac{\exp\left[-\dfrac{(\chi_j(y)-\chi_i(\eta))^2}{4(y-\eta)}\right]}{\sqrt{(z-y)(y-\eta)}} dy = 2\frac{\partial}{\partial z}\int_\eta^z \exp\left[-\right.$$

$$\left.-\frac{(\chi_j(y)-\chi_i(\eta))^2}{4(y-\eta)}\right] d \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{y-\eta}{z-y}} = \frac{\partial}{\partial z}\left\{ \pi \exp\left[-\frac{(\chi_j(z)-\chi_i(\eta))^2}{4(z-\eta)}\right] - \right.$$

$$-2\int_\eta^z \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{y-\eta}{z-y}}\exp\left[-\frac{(\chi_j(y)-\chi_i(\eta))^2}{4(y-\eta)}\right]\frac{\partial}{\partial y}\Bigg(-$$

$$-\frac{(\chi_j(y)-\chi_i(\eta))^2}{4(y-\eta)}\Bigg)dy=\frac{1}{2(z-\eta)}\int_\eta^z\frac{\exp\left[-\dfrac{(\chi_j(y)-\chi_i(\eta))^2}{4(y-\eta)}\right]}{\sqrt{(z-y)(y-\eta)}}$$

$$\left\{\frac{(\chi_j(y)-\chi_i(\eta))^2}{2(y-\eta)}-[\chi_j(y)-\chi_i(\eta)]\chi_j'(y)\right\}dy\,.$$

Perciò $\dfrac{\partial V_{ji}}{\partial z}$ è del tipo $\dfrac{H_{ji}(\eta,z)}{\sqrt{z-\eta}}$ con $H_{ji}(\eta,z)$ funzione limitata.

Analogamente

$$\frac{\partial W_{ji}}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial z}\int_\eta^z\frac{[\chi_j(y)-\chi_i(\eta)]^2}{\sqrt{(z-y)(y-\eta)^3}}\exp\left[-\frac{[\chi_j(y)-\chi_i(\eta)]^2}{4(y-\eta)}\right]dy=$$

$$=2\frac{\partial}{\partial z}\int_\eta^z\frac{[\chi_j(y)-\chi_i(\eta)]^2}{y-\eta}\exp\left[-\frac{[\chi_j(y)-\chi_i(\eta)]^2}{4(y-\eta)}\right]d\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{y-\eta}{z-y}}$$

che, con una integrazione per parti, si può scrivere

$$\frac{1}{z-\eta}\int_\eta^z\frac{1}{\sqrt{(z-y)(y-\eta)}}\left\{2[\chi_j(y)-\chi_i(\eta)]\chi_j'(y)-\frac{[\chi_j(y)-\chi_i(\eta)]^2}{y-\eta}-\right.$$

$$\left.-\frac{[\chi_j(y)-\chi_i(\eta)]^3}{2(y-\eta)}\chi_j'(y)+\frac{[\chi_j(y)-\chi_i(\eta)]^4}{4(y-\eta)^2}\right\}\exp\left[-\frac{(\chi_j(y)-\chi_i(\eta))^2}{4(y-\eta)}\right]dy$$

la quale, come la precedente, è del tipo $\dfrac{H_{ji}(\eta,z)}{\sqrt{z-\eta}}$ con $H_{ji}(\eta,z)$ funzione limitata.

Si ha quindi

$$\frac{d}{dz}\sum_1^2{}_i\int_0^z\mu_i(\eta)V_{ji}(\eta,z)d\eta=\pi\mu_j(z)+\sum_1^2{}_i\int_0^z\mu_i(\eta)\frac{\partial V_{ji}(\eta,z)}{\partial z}d\eta$$

e

$$\frac{d}{dz}\sum_1^2{}_i\int_0^z\nu_i(\eta)W_{ji}(\eta,z)d\eta=\sum_1^2{}_i\int_0^z\nu_i(\eta)\frac{\partial W_{ji}(\eta,z)}{\partial z}d\eta\,.$$

Derivando pertanto le (10′) si hanno le due equazioni integrali di VOLTERRA di seconda specie

$$(11)\qquad \pi\mu_j(z) + \sum_1^2{}_i \int_0^z \mu_i(\eta)\frac{\partial V_{ji}(\eta, z)}{\partial z}\, d\eta + $$
$$+ \sum_1^2{}_i \int_0^z \nu_i(\eta)\frac{\partial W_{ji}(\eta, z)}{\partial z}\, d\eta = F_j'(z), \qquad j = 1,\ 2\,.$$

Si noti che, essendo $f_j(0) = 0$, riesce

$$F_j(z) = \int_0^z \frac{f_j(y)dy}{\sqrt{z-y}} = 2\int_0^z \sqrt{z-y}\, f_j'(y)dy$$

e quindi

$$F_j'(z) = \int_0^z \frac{f_j'(y)dy}{\sqrt{z-y}}\,.$$

Dalla (8) si deduce poi

$$(12)\qquad \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \sum_1^2{}_i \int_0^y [2\nu_i(\eta) - \frac{1}{2}\mu_i(\eta)]\, U_{1,\,^3/_2}(x, y\,;\, \chi_i(\eta), \eta)\, d\eta\, -$$
$$- \frac{1}{2}\sum_1^2{}_i \int_0^y \nu_i\, \eta) U_{3,\,^5/_2}(x, y\,;\, \chi_i(\eta), \eta) d\eta\,.$$

Per una nota proprietà del potenziale di doppio strato [10]) si ha

$$\lim_{P \to P^*} \sum_1^2{}_i \int_0^y [2\nu_i(\eta) - \frac{1}{2}\mu_i(\eta)]\, U_{1,\,^3/_2}(x, y\,;\, \chi_i(\eta), \eta) d\eta =$$
$$= (-1)^{j+1}\, 2\sqrt{\pi}\, [2\nu_j(y^*) - \frac{1}{2}\mu_j(y^*)] + \sum_1^2{}_i \int_0^{y^*} [\, 2\nu_i(\eta)\, -$$
$$- \frac{1}{2}\mu_i(\eta)]\, U_{1,\,^3/_2}(\chi_j(y^*),\ y^*\,;\, \chi_i(\eta), \eta) d\eta, \qquad j = 1,\ 2$$

se P tende, in $D - \gamma_1 - \gamma_2$, a un punto P^* di γ_j.

10) Cfr. E. E. LEVI, l.c., n. 15.

Per esaminare il comportamento dell'ultimo integrale sulla destra di (12), consideriamo la funzione

$$F(x, y) = \int_0^y U_{3,\,5/2}(x, y;\, \chi(\eta), \eta)d\eta$$

ove $\chi(\eta)$ sta ad indicare indifferentemente $\chi_1(\eta)$ o $\chi_2(\eta)$.

Posto $\dfrac{x - \chi(\eta)}{2\sqrt{y - \eta}} = t$, si può scrivere

$$16\int_{\frac{x-\chi(0)}{2\sqrt{y}}}^{\pm\infty} t^2e^{-t^2}dt + 2\int_0^y \chi'(y)\frac{[x - \chi(\eta)]^2}{(y - \eta)^{3/2}}\exp\left[-\frac{(x - \chi(\eta))^2}{4(y - \eta)}\right]d\eta$$

col segno $+$ o $-$ secondochè $x > \chi(y)$ oppure $x < \chi(y)$. Scriviamo

$$F(x, y) = 16\int_{\frac{x-\chi(0)}{2\sqrt{y}}}^{\pm\infty} t^2\epsilon^{-t^2}dt + F_1(x, y)$$

e osserviamo che la funzione $F_1(x, y)$ è continua anche attraverso la curva γ di equazione $x = \chi(y)$. Se il punto (X, Y) è su γ, si ha

$$F(X, Y) = 16\int_{\frac{X-\chi(0)}{2\sqrt{Y}}}^{0} t^2e^{-t^2}dt + F_1(X, Y)$$

onde

$$\lim_{(x, y)\to(X, Y)} F(x, y) = 16\int_{\frac{X-\chi(0)}{2\sqrt{Y}}}^{\pm\infty} t^2e^{-t^2}dt + F_1(X, Y) = F(X, Y) + 16\int_0^{\pm\infty} t^2e^{-t^2}dt =$$

$$= F(X, Y) \pm 4\sqrt{\pi}\,.$$

Dopo di ciò, se $\varphi(\eta)$ è una funzione continua, si ha subito

$$\lim_{(x, y)\to(X, Y)}\int_0^y \varphi(\eta)U_{3,\,5/2}(x, y;\, \chi(\eta), \eta)d\eta = \pm 4\sqrt{\pi}\varphi(Y) +$$

$$+\int_0^Y \varphi(\eta)U_{3,\,5/2}(\chi(Y), Y;\, \chi(\eta), \eta)d\eta\,.$$

Per provare questa eguaglianza basta mostrare che, fissato un $\varepsilon > 0$, non appena il punto (x, y) si trova in un intorno abbastanza piccolo di $(\chi(Y), Y)$, riesce

$$\left| \int_0^y [\varphi(\eta) - \varphi(Y)] U_{3, 5/2}(x, y ; \chi(\eta), \eta) d\eta - \int_0^Y [\varphi(\eta) - \right.$$

$$\left. - \varphi(Y)] U_{3, 5/2}(\chi(Y), Y ; \chi(\eta), \eta) d\eta \right| < \varepsilon .$$

Ora, fissato un $\delta > 0$ $(< Y)$, l'integrale

$$\int_0^{Y-\delta} [\varphi(\eta) - \varphi(Y)][U_{3, 5/2}(x, y ; \chi(\eta), \eta) - U_{3, 5/2}(\chi(Y), Y ; \chi(\eta), \eta)] d\eta$$

si può rendere in modulo arbitrariamente piccolo prendendo (x, y) sufficientemente prossimo a $(\chi(Y), Y)$. Lo stesso avviene dell'integrale

$$\int_{Y-\delta}^{Y} [\varphi(\eta) - \varphi(Y)] U_{3, 5/2}(\chi(Y), Y ; \chi(\eta), \eta) d\eta$$

tenendo presente la continuità di $\varphi(\eta)$.

Infine, poichè

$$\left| \int_{Y-\delta}^{y} [\varphi(\eta) - \varphi(Y)] U_{3, 5/2}(x, y ; \chi(\eta), \eta) d\eta \right| \leq 2 \left| \int_{Y-\delta}^{y} \chi'(\eta)[\varphi(\eta) - \right.$$

$$\left. - \varphi(Y)] U_{2, 3/2}(x, y ; \chi(\eta), \eta) d\eta \right| + 4 \left| \int_{Y-\delta}^{y} [\varphi(\eta) - \right.$$

$$\left. - \varphi(Y)] U_{2, 1}(x, y ; \chi(\eta), \eta) \frac{d}{d\eta} \left(\frac{x - \chi(\eta)}{2\sqrt{y - \eta}} \right) d\eta \right| ,$$

l'integrale sulla sinistra si può in modulo rendere arbitrariamente piccolo, causa la continuità di $\varphi(\eta)$, prendendo δ opportunamente piccolo.

Con ciò resta provato l'asserto.

Si ha quindi

$$\lim_{P \to P^*} \left(-\frac{1}{2} \sum_{1}^{2}{}_i \int_0^y \nu_i(\eta) U_{3, 5/2}(x, y ; \chi_i(\eta), \eta) d\eta \right) = (-1)^j 2 \sqrt{\pi} \nu_j(y^*) -$$

$$-\frac{1}{2}\sum_1^2{}_i\int_0^{y^*}\nu_i(\eta)U_{3,\,5/2}(\chi_j(y^*),\, y^*;\, \chi_i(\eta),\, \eta)d\eta, \qquad j=1,\ 2$$

se P tende, su $D-\gamma_1-\gamma_2$, a un punto P^* di γ_j ; e in conseguenza

$$\lim_{P\to P^*}\frac{\partial u}{\partial x}=(-1)^{j+1}2\sqrt{\pi}[2\nu_j(y^*)-\frac{1}{2}\mu_j(y^*)]+(-1)^j2\sqrt{\pi}\nu_j(y^*)+$$

$$+\sum_1^2{}_i\int_0^{y^*}[2\nu_i(\eta)-\frac{1}{2}\mu_i(\eta)]U_{1,\,3/2}(\chi_j(y^*),\, y^*;\, \chi_i(\eta),\, \eta)d\eta -$$

$$-\frac{1}{2}\sum_1^2{}_i\int_0^{y^*}\nu_i(\eta)U_{3,\,5/2}(\chi_j(y^*),\, y^*;\, \chi_i(\eta),\, \eta)d\eta, \qquad j=1,\ 2\,.$$

Si hanno in tal modo altre due equazioni integrali di VOLTERRA di seconda specie

$$(13)\qquad (-1)^{j+1}2\sqrt{\pi}\nu_j(y)+(-1)^j\sqrt{\pi}\mu_j(y)+\sum_1^2{}_i\int_0^{y}[2\nu_i(\eta)-$$

$$-\frac{1}{2}\mu_i(\eta)]U_{1,\,3/2}(\chi_j(y),\, y;\, \chi_i(\eta),\, \eta)d\eta -$$

$$-\frac{1}{2}\sum_1^2{}_i\int_0^{y}\nu_i(\eta)U_{3,\,5/2}(\chi_j(y),\, y;\, \chi_i(\eta),\, \eta)d\eta=\varphi_j(y), \qquad j=1,\ 2$$

Le (11) e (13) costituiscono il sistema di equazioni integrali cercato.