RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

JAURÈS CECCONI

Un complemento al teorema di Stokes

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 22 (1953), p. 23-37

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1953__22__23_0>

UN COMPLEMENTO AL TEOREMA DI STOKES

Nota (*) *di* JAURÈS CECCONI (*a Pisa*)

1. - INTRODUZIONE.

Sia S una superficie orientata di Frechèt, del tipo della 2-cella, e sia

$$(T,\ Q)\ :\ x = x(u,\ v)\ ,\ y = y(u,\ v)\ ,\ z = z(u,\ v)\ ,\ (u,\ v) \varepsilon\, Q\ ,$$

una sua rappresentazione sul quadrato unitario; $0 \leq u$, $v \leq 1$; del piano uv.

In un precedente lavoro [2] ho dimostrato il seguente:

TEOREMA A. — *Se*

a) *S è quadrabile secondo Lebesgue,*
b) *la linea contorno $\theta(S)$ di S è rettificabile,*
c) *$F(x,\ y,\ z)$ è una funzione continua in un insieme aperto R, contenente il sostegno $[S]$ di S, insieme con le sue derivate parziali $F_z(x,\ y,\ z)$, $F_y(x,\ y,\ z)$,*

allora sussiste la seguente uguaglianza (*di Stokes*)

$$(1)\quad \int\!\!\int_{(T,\,Q)} F_z(x, y, z)dzdx - \int\!\!\int_{(T,\,Q)} F_y(x, y\ ,z)dxdy = \int_{\theta(S)} F(x, y, z)dx\ ,$$

gli integrali nei due membri essendo appropriati integrali di Weierstrass di superficie (L. CESARI [4]) *e di linea* (L. TONELLI [8], [9]).

Le ipotesi a) e b) dell'enunciato del Teorema A sono legate alla esistenza degli integrali di superficie e di linea che si

---

(*) Pervenuta in Redazione il 28 ottobre 1952.

sono considerati, e pertanto non possono essere rimosse, l'ipotesi c), invece, può essere allargata in più maniere.

Nel presente avoro, in quest'ordine di idee, ed in armonia con quanto è stato fatto da C. B. MORREY [5], G. SCORZA DRAGONI [6], E. BAJADA [1], G. STAMPACCHIA [7], prendo in considerazione funzioni $F(x, y, z)$ soltanto approssimativamente continue e limitate in R; dotate, inoltre, di derivate parziali $F_z(x, y, z)$, $F_y(x, y, z)$ soltanto approssimativamente continue e limitate in R [1]).

A questo scopo ho bisogno, innanzitutto, di estendere i concetti di integrale di linea e di superficie che entrano nella (1), in modo che essi abbiano significato per le funzioni che saranno prese in considerazione.

2. - ESTENSIONE DELLA NOZIONE DI INTEGRALE DI SUPERFICIE

Sia $S \equiv (T, Q)$ la superficie considerata nel n. 1, sia $[S]$ il sostegno di S, R un insieme aperto contenente $[S]$.

Sia $f(x, y, z)$ una funzione definita in R, ivi misurabile, limitata ed approssimativamente continua, salvo al più per i punti di un sotto insieme di R che si proietta in un insieme I_{xy} di misura nulla nel piano xy.

Consideriamo una rappresentazione « assolutamente continua » nel senso di L. CESARI [3] di S, che per brevità supporremo a stessa (T, Q) del n. 1, consideriamo il Jacobiano $H_3(u, v)$ (L. CESARI [3]) della trasformazione piana

$$(T_3, Q) \ : \ x = x(u, v) \ , \ y = y(u, v) \ , \ z = 0 \ , \ (u, v) \varepsilon Q \ ,$$

associata a (T, Q), e consideriamo infine la funzione

$$f[x(u, v), \ y(u, v), \ z(u, v)] \cdot H_3(u, v) \, .$$

definita quasi ovunque su Q.

Affermo che questa funzione è misurabile su Q, e quindi, in virtù delle ipotesi fatte su (T, Q) e su $f(x, y, z)$, sommabile su Q.

---

1) La approssimativa continuità delle funzioni $F(x, y, z)$, $F_z(x, y, z)$, $F_y(x, y, z)$ non è richiesta su tutto R, per una formulazione delle ipotesi che si fanno su queste funzioni si vedano gli enunciati dei Teoremi B e C.

Affermo quindi che l'integrale

$$\iint_Q f[x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v)]\cdot H_3(u,v)dudv$$

è indipendente dalla rappresentazione « assolutamente continua » considerata per S.

Dopo di che sarà lecito indicare questo integrale con la notazione

$$\iint_{(T,\ Q)} f(x,y,z)dxdy\,.$$

3. - DIMOSTRAZIONE DELLA MISURABILITÀ DELLA FUNZIONE $f[x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v)]\cdot H_3(u,v)$.

Sia $2\delta > 0$ la distanza fra l'insieme chiuso $[S]$ e l'insieme chiuso R^*, frontiera dell'insieme aperto R.

Sia $(R)_\delta$ l'insieme dei punti di R che hanno da R^* distanza $\leq \delta$ e sia R_δ l'insieme aperto $R - (R)_\delta$.

Ogni punto di questo insieme ha la proprietà che ogni sfera di centro in esso e raggio $< \delta$ appartiene ad R.

Sia $0 < h < \delta$; risulta perciò definita nell'insieme R_δ la funzione continua

$$f^{(h)}(x,y,z) = \frac{1}{(2h)^3}\int_{-h}^{h} d\xi \int_{-h}^{h} d\eta \int_{-h}^{h} f[x+\xi,\ y+\eta,\ z+\zeta]d\zeta$$

costituente la media integrale di $f(x,y,z)$.

Ed in virtù di note proprietà delle medie integrali per ogni punto di R che non si proietta su I_{xy} si ha intanto

$$\lim_{h\to 0} f^{(h)}(x,y,z) = f(x,y,z)\,.$$

4. - Richiamo il risultato di L. CESARI ([3] pag. 357) espresso dal seguente

LEMMA 1. — *Sia $(T_3,\ Q)$ la trasformazione piana « assolutamente continua » considerata nel n. 2, sia B un insieme misurabile del piano xy tale che*

$$\iint_B \Psi(x,y\,;\ T_3,Q)dxdy = 0\,,$$

essendo $\Psi(x, y; T_3, Q)$ *la funzione di molteplicità assoluta* [3] *della trasformazione* (T_3, Q). *Sia* $T_3^{(-1)}(B)$ *l'insieme dei modelli dei punti di* B *secondo* (T_3, Q).

Allora esiste un insieme misurabile $D \subset Q$ *contenente* $T_3^{(-1)}(B)$ *tale che*

$$\iint_D |H_3(u, v)| du dv = 0 .$$

Da questo Lemma si deduce il seguente

LEMMA 2. — *Nelle stesse ipotesi del Lemma 1, sia* I *un insieme di punti del piano* xy, *di misura nulla, e sia* G *l'insieme di punti del piano* uv *in cui è* $H_3(u, v) \neq 0$.

Allora è nulla la misura dell'insieme $T_3^{(-1)}(I) \cdot G$.

Infatti in virtù delle ipotesi è

$$\iint_I \Psi(x, y; T_3, Q) dx dy = 0$$

e perciò in virtù del Lemma 1 esiste un insieme W contenente $T_3^{(-1)}(I)$ sul quale è

$$\iint_W |H_3(u, v)| du dv = 0 .$$

E' quindi

$$\iint_{W \cdot G} |H_3(u, v)| du dv = 0 ,$$

essendo $H_3(u, v) \neq 0$ in ogni punto di $W \cdot G$.

E' quindi nulla la misura dell'insieme $W \cdot G$ e perciò anche quella dell'insieme $T_3^{(-1)}(I) \cdot G$ in esso contenuto.

5. - Essendo I_{xy} l'insieme introdotto nel n. 2, sia $E_3(u, v)$ l'insieme $T_3^{(-1)}(I_{xy})$. Distinguo alcuni casi per il punto (u, v).

Se (u, v) è un punto di Q non appartenente ad $E_3(u, v)$ si ha intanto in virtù del risultato sulle medie integrali, richiamato nel n. 3,

$$\lim_{h \to 0} f^{(h)}[x(u, v),\ y(u, v),\ z(u, v)] = f[x(u, v),\ y(u, v),\ z(u, v)] ,$$

e quindi in ogni punto di $Q - E_3(u, v)$ in cui $H_3(u, v)$ è definito, cioè a dire in quasi ogni punto di $Q - E_3(u, v)$, si ha

$$\lim_{h \to 0} f^{(h)}[x(u, v),\ y(u, v),\ z(u, v)] \cdot H_3(u, v) =$$
$$= f[x(u, v),\ y(u, v),\ z(u, v)] \cdot H_3(u, v) .$$

Se $(u, v) \varepsilon E_3(u, v)$ ed è $H_3(u, v) = 0$ la uguaglianza sopra scritta sussiste ugualmente.

L'insieme dei punti $(u, v) \varepsilon E_3(u, v)$ per i quali è $H_3(u, v) \neq 0$ ha, in virtù del Lemma 2 del n. precedente, misura nulla; risulta così provato che la relazione

$$\lim_{h \to 0} f^{(h)}[x(u, v),\ y(u, v),\ z(u, v)] \cdot H_3(u, v) =$$
$$= f[x(u, v),\ y(u, v),\ z(u, v)] \cdot H_3(u, v)$$

sussiste quasi ovunque su Q.

La funzione $f[x(u, v),\ y(u, v),\ z(u, v)] \cdot H_3(u, v)$ risulta perciò misurabile su Q. Ma $f(x, y, z)$ è limitata su R, $H_3(u, v)$ è sommabile su Q in virtù della ipotesi che (T_3, Q) è « assolutamente continua », ne viene quindi che la funzione $f[x(u, v),$ $y(u, v),\ z(u, v)] \cdot H_3(u, v)$ è sommabile su Q.

Esiste perciò finito l'integrale

$$\iint_Q f[x(u, v),\ y(u, v),\ z(u, v)] \cdot H_3(u, v) du dv .$$

6. - DIMOSTRAZIONE DELLA INDIPENDENZA DI $\iint_Q f[x(u, v),\ y(u, v),$ $z(u, v)] \cdot H_3(u, v) du dv$ DALLA RAPPRESENTAZIONE « ASSOLUTAMENTE CONTINUA ADOTTATA PER S.

A questo scopo enuncio intanto la seguente proposizione che è contenuta in alcuni Teoremi stabiliti da L. CESARI in [4].

TEOREMA. — *Sia $S \equiv (T, Q)$ una superficie orientata di Frechét, data come nel n. 1, di area secondo Lebesgue finita. Sia $g(x, y, z, u, v, w)$ una funzione continua delle variabili (x, y, z, u, v, w) per (x, y, z) appartenente ad R ed (u, v, w) qualunque, positivamente omogenea, nelle variabili u, v, w, di grado* 1.

Allora esiste l'integrale di Weierstrass-Cesari della funzione $g(x, y, z, u, v, w)$ su S, che gode, fra l'altro, della proprietà:

a) *è indipendente dalla rappresentazione (T, Q) adottata per S,*

b) *si riduce nella ipotesi che (T, Q) sia « assolutamente continua » all'integrale di Lebesgue* [2])

$$\iint_Q g[x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v),\ H_1(u,v),\ H_2(u,v),\ H_3(u,v)]dudv\,.$$

Nel caso particolare in cui $g(x, y, z, u, v, w)$ sia della forma $G(x, y, z)\cdot w$ questo integrale viene qui indicato con la notazione

$$\iint_S G(x, y, z)dxdy$$

e si riduce, nelle stesse ipotesi di « assoluta continuità » di (T, Q) all'integrale di Lebesgue

$$\iint_Q G[x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v)]\cdot H_3(u,v)dudv\,.$$

Sia allora

$$(T', Q)\ :\ x = x'(u,v),\ y = y'(u,v),\ z = z'(u,v),\ (u,v)\in Q\,,$$

un'altra rappresentazione « assolutamente continua » di S.

In virtù del teorema di L. CESARI ora enunciato e della continuità in R^δ delle funzioni $f^{(h)}(x, y, z)$; $0 < h < \delta$; si ha intanto [3])

$$\iint_Q f^{(h)}[x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v)]\cdot H_3(u,v)dudv =$$
$$= \iint_Q f^{(h)}[x'(u,v),\ y'(u,v),\ z'(u,v)]\cdot H_3'(u,v)dudv\,.$$

---

[2]) $H_1(u,v)$ e $H_2(u,v)$ hanno significato analogo a $H_3(u,v)$. Il teorema sussiste anche se $g(x, y, z, u, v, w)$ è soltanto continua e positivamente omogenea per $(x, y, z)\in[S]$ e (u, v, w) qualunque.

[3]) $H_1'(u,v)$, $H_2'(u,v)$, $H_3'(u,v)$ sono definiti rispetto a (T', Q) così come $H_1(u,v)$, $H_2(u,v)$ $H_3(u,v)$ lo sono rispetto a (T, Q).

Passando al limite, in virtù del Teorema di integrazione di Lebesgue, se ne deduce

$$\iint_Q f[x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v)]\cdot H_3(u,v)dudv =$$

$$= \iint_Q f[x'(u,v),\ y'(u,v),\ z'(u,v)]\cdot H_3'(u,v)dudv$$

e questo prova la indipendenza di

$$\iint_Q f[x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v)]\cdot H_3(u,v)dudv$$

dalla rappresentazione (T, Q).

7. - ESTENSIONE DELLA NOZIONE DI INTEGRALE DI LINEA.

Sia γ una linea orientata di Frechét del tipo della circonferenza, di lunghezza finita L, e sia

$$(\mathcal{C},\ Q^*):\ x = \xi(p)\ ,\ y = \eta(p)\ ,\ z = \zeta(p)\ ,\ p \varepsilon Q^*\ ,$$

una sua rappresentazione sulla frontiera Q^* del quadrato unitario Q del piano uv.

Sia $[\gamma]$ il sostegno di questa linea e sia R un insieme aperto contenente $[\gamma]$. Sia $f(x, y, z)$ una funzione definita in R, ivi misurabile limitata ed approssimativamente continua, salvo al più per i punti di un sotto-insieme di R che si proietta in un insieme I_x di misura nulla dell'asse x.

Fissiamo un punto $p_0 \varepsilon Q^*$ e, per ogni punto $p \varepsilon Q^*$, indichiamo con t la lunghezza dell'arco di Q^* avente origine in p_0 ed estremo in p.

Poniamo quindi

$$x(t) = \xi(p)\quad ,\quad y(t) = \eta(p)\quad ,\quad z(t) = \zeta(p)\,.$$

Otteniamo così una trasformazione continua

$$(\mathcal{C}',\ I):\ x = x(t)\ ,\ y = y(t)\ ,\ z = z(t)\ ,\ t \varepsilon (0,4) \equiv I\ ,$$

del tipo della 1-cella che diciamo associata a $(\mathcal{C}\,,\ Q^*)$ e a p_0.

Sia γ' la linea orientata di Frechét del tipo della 1-cella individuata da $(\mathcal{C}',\ I)$; anche la lunghezza di γ' è uguale ad L.

Si può quindi considerare una rappresentazione « assolutamente continua » di γ' che per brevità supponiamo sia la stessa $(\mathcal{C}', I)$.

Consideriamo infine la funzione

$$f[x(t),\ y(t),\ z(t)]\cdot x'(t)\,.$$

Dico che questa funzione è misurabile su $I \equiv (0,4)$ e quindi, in virtù delle ipotesi fatte su γ e su $f(x, y, z)$ sommabile su questo stesso intervallo.

Dico anche che l'integrale

$$\int_0^4 f[x(t),\ y(t),\ z(t)]\cdot x'(t)dt$$

è indipendente da $(\mathcal{C},\ Q^*)$, p_0, $(\mathcal{C}',\ I)$, dipende cioè soltanto da γ e pertanto può essere indicato con la notazione

$$\int_\gamma f(x, y, z)\cdot dx\,.$$

8. - DIMOSTRAZIONE DELLA ESISTENZA DI $\int_0^4 f[x(t),\ y(t),\ z(t)]\cdot x'(t)\cdot dt$ E DELLA SUA INDIPENDENZA DA $(\mathcal{C},\ Q^*)$, p_0 E $(\mathcal{C}',\ I)$.

La misurabilità della funzione $f[x(t),\ y(t),\ z(t)]\cdot x'(t)$ in I si prova con gli stessi argomenti dei nn. 3, 4, 5.

Siano infatti δ e R_δ rispettivamente un numero reale > 0 ed un componente di R tali che la sfera avente centro in un punto di R_δ e raggio $< \delta$ appartenga ad R.

Sia

$$f^{(h)}(x, y, z) = \frac{1}{(2h)^3}\int_{-h}^{h} d\xi \int_{-h}^{h} d\eta \int_{-h}^{h} f(x + \xi,\ y + \eta,\ z + \zeta)d\zeta$$

la media integrale di $f(x, y, z)$.

La funzione $f^{(h)}(x, y, z)$; $0 < h < \delta$; è continua in R_δ e tale che per ogni punto di R_δ, che non si proietta su I_x si abbia

$$\lim_{h \to 0} f^{(h)}(x, y, z) = f(x, y, z)\,.$$

Il nostro asserto si prova allora con lo stesso ragionamento del n. 5 facendo uso, anzichè dei Lemmi 1, 2, dei seguenti.

LEMMA 3. — *Sia* $y = f(x)$ *una funzione continua e a variazione limitata nell'intervallo* (a, b). *Sia* (c, d) *un intervallo dell'asse* y *contenente l'immagine di* (a, b) *secondo* $f(x)$, *e sia, per ogni* y *di* (c, d), $n(y, f)$ *il numero (finito od infinito) dei valori di* x *in* (a, b) *per i quali è* $y = f(x)$.

Sia B *un insieme di punti di* (c, d) *per il quale è*

$$\int_B n(y, f) dy = 0$$

e sia $f^{(-1)}(B)$ *l'insieme dei modelli dei punti di* B *secondo* $f(x)$.

Allora esiste un insieme misurabile D *contenente* $f^{(-1)}(B)$ *per il quale è*

$$\int_D |y'(x)| dx = 0 .$$

LEMMA 4. — *Nelle stesse ipotesi del Lemma 3 sia* I *un insieme di punti di* (c, d) *di misura nulla e sia* G *l'insieme dei punti di* (a, b) *in cui è* $f'(x) \neq 0$. *Allora è nulla la misura dell'insieme* $f^{(-1)}(I) \cdot G$.

Il Lemma 3 è noto, il Lemma 4 si deduce da questo con il ragionamento del n. 4.

Venendo infine alla indipendenza di

$$\int_0^4 f[x(t),\ y(t),\ z(t)] x'(t) dt$$

osserviamo che essa segue come nel n. 6 dal seguente

TEOREMA (L. TONELLI [8], [9]). — *Sia* γ *una linea orientata di Frechèt* [4] *di lunghezza finita del tipo della circonferenza. Sia* $g(x, y, z)$ *una funzione continua in un insieme aperto* R *contenente il sostegno* $[\gamma]$ *di* γ.

---

[4]) La nozione di equivalenza considerata da L. TONELLI in [9] coincide con quella di Frechèt.

Allora esiste l'integrale di linea $\int_\gamma f(x, y, z) \cdot dx$ *che gode fra l'altro delle seguenti proprietà:*

a) *è indipendente dalla rappresentazione di* γ,

b) *se* $(\mathcal{C}, Q^*)$ *è una rappresentazione di* γ, *se* p_0 *è un qualunque punto di* Q^*, *se* $(\mathcal{C}', I)$ *è una trasformazione del tipo della* 1*-cella associata a* $(\mathcal{C}, Q^*)$ *e a* p_0 *come nel n. precedente e se*

$$(\overline{\mathcal{C}}, I): \; x = \overline{x}(t) \;\; , \;\; y = \overline{y}(t) \;\; , \;\; z = \overline{z}(t) \;\; , \;\; t \varepsilon I$$

è una trasformazione «assolutamente continua» equivalente secondo Frechèt a $(\mathcal{C}', I)$ *allora*

$$\int_\gamma f(x, y, z) dx = \int_0^1 f[\overline{x}(t), \; \overline{y}(t), \; \overline{z}(t)] \cdot \overline{x}'(t) dt \, .$$

9. - UNA ESTENSIONE DEL TEOREMA A.

Sono ormai in grado di dimostrare il seguente

TEOREMA B. — *Sia S una superficie orientata di Frechèt, del tipo della 2-cella, soddisfacente le ipotesi* a) *e* b) *del Teorema A.*

Sia $f(x, y, z)$ *una funzione definita in R e dotata ivi delle seguenti proprietà:*

c, 1) $f(x, y, z)$ *è misurabile in R, limitata, approssimativamente continua salvo al più per i punti di R che si proiettano su di un insieme* I_x, *dell'asse x, di misura nulla;*

c, 2) $f(x, y, z)$ *è assolutamente continua in y per quasi ogni xz, dotata perciò quasi ovunque, in R di derivata parziale* $f_y(x, y, z)$ *che risulta inoltre misurabile in R, limitata in R, approssimativamente continua salvo al più per i punti di R che si proiettano su di un insieme* I_{xy} *di misura nulla del piano xy;*

c, 3) $f(x, y, z)$ *è assolutamente continua in z per quasi ogni xy, dotata perciò quasi ovunque in R di derivata parziale* $f_z(x, y, z)$ *che risulta inoltre misurabile in R, limitata in R, approssimativamente con-*

tinua salvo al più per i punti di R che si proiettano su di un insieme I_{xz} di misura nulla del piano zx.

Allora sussiste la (1) *del Teorema A in cui gli integrali dei due membri hanno i significati introdotti nei nn. 2, 7.*

10. - DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA B.

Siano δ ed R_δ un numero reale > 0 ed un componente aperto di R_δ tali che la sfera avente centro in ogni punto di R_δ e raggio $< \delta$ appartenga ad R e tali inoltre che $[S]$ appartenga ad R_δ.

Consideriamo per ogni punto di R e per ogni $0 < h < \delta$ le funzioni

$$f^{(h)}(x, y, z) = \frac{1}{(2h)^3}\int_{-h}^{h} d\xi \int_{-h}^{h} d\eta \int_{-h}^{h} f(x+\xi, y+\eta, z+\zeta) d\zeta ,$$

$$\varphi^{(h)}(x, y, z) = \frac{1}{(2h)^3}\int_{-h}^{h} d\xi \int_{-h}^{h} d\zeta \int_{-h}^{h} f_y(x+\xi, y+\eta, z+\zeta) d\eta ,$$

$$\psi^{(h)}(x, y, z) = \frac{1}{(2h)^3}\int_{-h}^{h} d\xi \int_{-h}^{h} d\eta \int_{-h}^{h} f_z(x+\xi, y+\eta, z+\zeta) d\zeta ,$$

costituenti le medie integrali delle funzioni $f(x, y, z)$, $f_y(x, y, z)$, $f_z(x, y, z)$. Ciascuna di queste funzioni è continua su R_δ.

Voglio intanto osservare che se $0 < h < \delta/2$ la $f^{(h)}(x, y, z)$ è derivabile parzialmente rispetto ad y in ogni punto di R_δ e che si ha, in ognuno di questi punti

$$\frac{\partial}{\partial y} f^{(h)}(x, y, z) = \varphi^{(h)}(x, y, z) .$$

Da ciò risulta in particolare che la $\dfrac{\partial}{\partial y} f^{(h)}(x, y, z)$ è continua su R_δ. Risultato analogo sussiste per la $\dfrac{\partial}{\partial z} f^{(h)}(x, y, z)$.

Sia (x_0, y_0, z_0) un punto di R_δ, sia $0 < h < \delta/2$, allora per ogni (x, y, z) appartenente al cubo $c(x_0, y_0, z_0)$ di centro (x_0, y_0, z_0), di lati paralleli agli assi e di semilato $\delta/2$ è definita la funzione

$$\Phi^{(h)}(x, y, z) = \int_{y_0-\delta/2}^{y} \varphi^{(h)}(x, \eta, z)d\eta = \int_{y_0-\delta/2}^{y} d\eta \frac{1}{(2h)^3}\int_{x-h}^{x+h} d\xi \int_{z-h}^{z+h} d\zeta \int_{\eta-h}^{\eta+h} f_\tau(\xi, \tau, \zeta)\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{(2h)^3}\int_{y_0-\delta/2}^{y} d\eta \int_{x-h}^{x+h} d\xi \int_{z-h}^{z+h} \{f(\xi, \eta + h, \zeta) - f(\xi, \eta - h, \zeta)\} d\zeta =$$

$$= \frac{1}{(2h)^3}\int_{x-h}^{x+h} d\xi \int_{z-h}^{z+h} d\zeta \int_{y_0-\delta/2+h}^{y+h} f(\xi, \eta, \zeta)d\eta - \frac{1}{(2h)^3}\int_{x-h}^{x+h} d\xi \int_{z-h}^{z+h} d\zeta \int_{y_0-\delta/2-h}^{y-h} f(\xi, \eta, \zeta)d\eta =$$

$$= \frac{1}{(2h)^3}\int_{x-h}^{x+h} d\xi \int_{z-h}^{z+h} d\zeta \left\{ \int_{y-h}^{y+h} f(\xi, \eta, \zeta)d\eta - \int_{y_0-\delta/2-h}^{y_0-\delta/2+h} f(\xi, \eta, \zeta)du \right\} =$$

$$= f^{(h)}(x, y, z) - f^{(h)}(x, y_0 - \delta/2, z)\,.$$

Ma la funzione $\Phi^{(h)}(x, y, z)$ è derivabile rispetto ad y nel punto (x_0, y_0, z_0) [in virtù della continuità in quello stesso punto della funzione $\varphi^{(h)}(x, y, z)$] con derivata uguale a $\varphi^{(h)}(x_0, y_0, z_0)$, ne viene quindi che anche $f^{(h)}(x, y, z)$ è derivabile rispetto ad y in (x_0, y_0, z_0) e che si ha

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial y} f^{(h)}(x, y, z) \right\}_{(x_0, y_0, z_0)} = \varphi^{(h)}(x_0, y_0, z_0)\,.$$

11. - In virtù del Teorema A e della continuità in R_δ delle funzioni $f^{(h)}(x, y, z)$, $\frac{\partial}{\partial y} f^{(h)}(x, y, z)$, $\frac{\partial}{\partial z} f^{(h)}(x, y, z)$; se $0 < h < \delta/2$; si ha, per siffatti h,

$$\iint_S \frac{\partial}{\partial z} f^{(h)}(x, y, z)dzdx - \iint_S \frac{\partial}{\partial y} f^{(h)}(x, y, z)dxdy =$$

$$= \int_{\theta(S)} f^{(h)}(x, y, z)dx\,,$$

e quindi anche

$$\iint_S \psi^{(h)}(x, y, z)dzdx - \iint_S \varphi^{(h)}(x, y, z)dzdx = \int_{\theta(S)} f^{(h)}(x, y, z)dx\,.$$

In virtù delle ipotesi fatte su $f(x, y, z)$, $f_z(x, y, z)$, $f_y(x, y, z)$ e delle definizioni di integrale date nei nn. 2, 7, si ha quindi:

$$\iint_S f_z(x, y, z)dzdx - \iint_S f_y(x, y, z)dxdy = \int_{\theta(S)} f(x, y, z)dx ,$$

ciò che prova il Teorema B.

12. - UN CASO PARTICOLARE DEL TEOREMA B.

TEOREMA C. — *Sia S una superficie orientata di Frechèt del tipo della 2-cella soddisfacente alle ipotesi* a) *e* b) *del Teorema A.*

Sia $f(x, y, z)$ una funzione che gode delle seguenti proprietà:

c, 1′) *è continua come funzione di x per quasi ogni (y, z), e limitata in R,*

c, 2′) *è assolutamente continua in y per quasi ogni (x, z),*

c, 3′) *è assolutamente continua in z per quasi ogni (x, y),*

c, 4′) *la sua derivata parziale $f_y(x, y, z)$, che in virtù di* c, 2′) *esiste su quasi tutto R, risulta inoltre continua come funzione di z per quasi ogni (x, y), oltrechè limitata e misurabile in R,*

c, 5′) *la sua derivata parziale $f_z(x, y, z)$, che in virtù di* c, 3′) *esiste su quasi tutto R, risulta inoltre continua come funzione di y per quasi ogni (x, z), oltrechè limitata e misurabile in R.*

Allora sussiste la (1) *del Teorema A.*

Questo Teorema si deduce dal precedente Teorema B non appena si osservi che ciascuna delle funzioni $f(x, y, z)$, $f_y(x, y, z)$, $f_z(x, y, z)$ gode delle proprietà espresse nell'enunciato del Teorema B.

Verifichiamo come ciò accada per la funzione $f_y(x, y, z)$, lo stesso ragionamento serve per la funzione $f_z(x, y, z)$, ed analogo ragionamento serve per la funzione $f(x, y, z)$.

In virtù di un Teorema di G. SCORZA DRAGONI [6] ed in forza della ipotesi c, 4′) si può determinare in corrispondenza di ogni intero $n > 0$ un insieme aperto Δ_n del piano xy, di misura $< 1/n$, tale che $f_y(x, y, z)$ sia uniformemente continua nell' insieme costituito dai punti di R che non si proiettano su Δ_n.

Sia R_{xy} l'insieme aperto proiezione di R sul piano xy, sia F_n l'insieme misurabile definito mediante la

$$F_n = R_{xy} - \Delta_n$$

e sia F_n^* l'insieme dei punti di densità 1 di F_n.

Consideriamo infine l'insieme

$$F^* = \sum_{n=1}^{\infty} F_n^* .$$

L'insieme dei punti di R_{xy} che non appartengono ad F^* ha misura nulla.

Sia (x_0, y_0, z_0) un punto di R per il quale (x_0, y_0) appartiene ad F^*.

Dico che $f_y(x, y, z)$ è approssimativamente continua in (x_0, y_0, z_0).

Sia infatti k un intero tale che $(x_0, y_0) \varepsilon F_k^*$.

Fissato $\varepsilon > 0$ ad arbitrio consideriamo l'insieme costituito dai punti (x, y, z) di R in cui è soddisfatta la disuguaglianza

$$|f_y(x, y, z) - f_y(x_0, y_0, z_0)| < \varepsilon .$$

Tale insieme, in virtù del citato risultato di G. SCORZA DRAGONI, contiene tutti i punti di R che si proiettano su F_k^* e che inoltre appartengono ad un cubo con i lati paralleli agli assi x, y, z, con centro in (x_0, y_0, z_0) e lato sufficientemente piccolo.

Tale insieme ha perciò densità 1 in (x_0, y_0, z_0) in quanto R è aperto ed in quanto (x_0, y_0) è di densità 1 per l'insieme F_k^*.

Perciò $f_y(x, y, z)$ è approssimativamente continua in (x_0, y_0, z_0) e quindi in tutti i punti di R che si proiettano su F^*.

E con ciò il Teorema C è provato.

BIBLIOGRAFIA

[1] E. BAJADA: *Sulle funzioni continue separatamente rispetto alle variabili e gli integrali curvilinei.* « Rend. Sem. Mat. Padova », 17, 201-208, 1948.

[2] J. CECCONI: *Sul Teorema di Stokes.* In corso di stampa presso la Rivista di Mat. Univ. Parma.

[3] L. CESARI: *Sulla trasformazione degli integrali doppi.* « Ann. Mat. Pura ed Appl. », 27, 321-374, 1948.

[4] L. CESARI: *La nozione di integrale sopra una superficie in forma parametrica.* « Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa », II, 13, 77-117, 1944.

[5] C. B. MORREY: *A class of representation of manifolds.* Part. II. « Amer. Journ. of Math. », 56, 275-293, 1934.

[6] G. SCORZA DRAGONI: *Un teorema sulle funzioni continue rispetto ad una e misurabili rispetto ad un'altra variabile.* « Rend. Sem. Mat. Padova », 17, 102-106; 1948.

[7] G. STAMPACCHIA: *Sopra una classe di funzioni in 2 variabili. Applicazioni agli integrali doppi del calcolo delle variazioni.* « Giornale di Mat. di Battaglini », 79, 169-208, 1950.

[8] L. TONELLI: *Sugli integrali curvilinei del calcolo delle variazioni.* « Rend. Accad. Lincei », V, 21, 448-453, 1912.

[9] L. TONELLI: *Fondamenti di calcolo delle variazioni,* 2 voll. Zanichelli, Bologna, 1921.