RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

GABRIELE DARBO

La nozione di variazione limitata e di assoluta continuità super-uniforme

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 22 (1953), p. 246-250

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1953__22__246_0>

LA NOZIONE DI VARIAZIONE LIMITATA E DI ASSOLUTA CONTINUITÀ SUPER-UNIFORME

Nota (*) *di* GABRIELE DARBO (*a Padova*)

In un recente lavoro, E. Bajada [1]) ha considerato delle funzioni di due variabili $f(x, y)$ che egli chiama *assolutamente continue rispetto ad x in modo super-uniforme* rispetto ad y.

Nella presente nota, vengono messe in rilievo alcune proprietà di certe classi di funzioni a variazione limitata e assolutamente continue, che si ricollegano alla nozione citata.

1. - Sia $\{ f(x) \}$ una classe di funzioni definite in $a \vdash\!\dashv b$;

α) *diremo che* $\{ f(x) \}$ *è una classe a variazione limitata in modo super-uniforme* (V. L. s. u.), *se esiste una costante M tale che, preso ad arbitrio un numero finito d'intervalli disgiunti $\xi_i' {}^{-} \xi_i''$ di $a \vdash\!\dashv b$ ed associata comunque ad ogni intervallo una funzione $f_i(x)$ della classe $\{ f(x) \}$, si abbia*

$$\sum_i | f_i(\xi_i') - f_i(\xi_i'') | \leq M ; \tag{1}$$

β) *diremo invece che* $\{ f(x) \}$ *è una classe assolutamente continua in modo super-uniforme* (A. C. s. u.), *se per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste un* $\delta > 0$, *tale che per ogni sistema finito d'intervalli* $\xi_i' {}^{-} \xi_i''$ *disgiunti, di* $a \vdash\!\dashv b$, *con* $\sum_i | \xi_i' - \xi_i'' | < \delta$, *si abbia*

$$\sum_i | f_i(\xi_i') - f_i(\xi_i'') |$$

qualunque siano la funzioni $f_i(x)$ *della classe* $\{ f(x) \}$.

(*) Pervenuta in Redazione il 17 Marzo 1953.

1) E. BAJADA, *L'equazione* $p = f(x, y, z, q)$ *e l'unicità*, [Rendiconti Acc. Lincei, Vol. XII (1952, I sem.)], pag. 163-167.

OSSERVAZIONE: La nozione di funzioni $f(x, y)$ a variazione limitata o assolutamente continua rispetto ad x in modo super-uniforme rispetto ad y si può rimandare a quella relativa alla classe di funzioni $f(x, \bar{y})$ descritta al variare di $\bar{y}$.

2. - Sia $\{f(x)\}$ una classe V. L. s. u. in $a \vdash\!\dashv b$.

Chiameremo variazione totale della classe $\{f(x)\}$ in $a \vdash\!\dashv b$ l'estremo superiore delle somme

$$\sum_i | f_i(\xi_i') - f_i(\xi_i'') |$$

già considerate in α). Tale numero lo indicheremo con $W(a, b)$. Se $\alpha \vdash\!\dashv \beta$ è un subintervallo di $a \vdash\!\dashv b$ la $W(\alpha, \beta)$ è una funzione additiva d'intervallo. Infatti, $\alpha \vdash\!\dashv \beta$ e $\beta \vdash\!\dashv \gamma$ siano intervalli contigui contenuti in $a \vdash\!\dashv b$. Fissato un $\varepsilon > 0$ si potrà trovare un sistema d'intervalli disgiunti contenuto in $\alpha \vdash\!\dashv \beta$ e uno contenuto in $\beta \vdash\!\dashv \gamma$ tali che almeno una somma S_1 del tipo (1) relativa al primo, ed una S_2 relativa al secondo, soddisfino alle relazioni

$$W(\alpha, \beta) - S_1 < \varepsilon\,,$$
$$W(\beta, \gamma) - S_2 < \varepsilon\,;$$

da cui segue

$$W(\alpha, \beta) + W(\beta, \gamma) < S_1 + S_2 + 2\varepsilon \leq W(\alpha, \gamma) + 2\varepsilon$$

e per l'arbitrarietà di ε,

$$W(\alpha, \beta) + W(\beta, \gamma) \leq W(\alpha, \gamma)\,. \tag{2}$$

Non può essere d'altronde $W(\alpha, \beta) + W(\beta, \gamma) < W(\alpha, \gamma)$ perchè in tal caso esisterebbe in $\alpha \vdash\!\dashv \gamma$ un sistema d'intervalli $\{\xi_i' - \xi_i''\}$ tale che una somma S del tipo (1) relativa ad esso sarebbe maggiore di $W(\alpha, \beta) + W(\beta, \gamma)$. Ma allora, spezzando in due parti, $\xi_r' - \beta$ e $\beta - \xi_r''$ l'eventuale intervallo che contenesse β si perverrebbe facilmente ad un assurdo.

Osserviamo ancora che se una classe $\{f(x)\}$ è V. L. s. u. in due intervalli contigui, essa lo è pure nell'intervallo somma. La dimostrazione è immediata.

3. - Consideriamo ancora la classe $\{ f(x) \}$ V. L. s. u.

Se poniamo $W(x) = W(a, x)$ risulta $W(x)$ monotona in $a \vdash\!\dashv b$ ed è $W(\alpha, \beta) = W(\beta) - W(\alpha)$. Ne segue che ogni funzione della classe $\{ f(x) \}$ è tale che il suo incremento è maggiorato dall'incremento di una funzione monotona $W(x)$. È questa una proprietà *caratteristica* per le classi V. L. s. u.

In conseguenza, ciascuna funzione di una classe V. L. s. u. è continua nei punti di continuità di $W(x)$. Inoltre essendo pure a variazione limitata ogni $f(x)$, dalla relazione

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| \leq \left| \frac{W(x+h) - W(x)}{h} \right|$$

si avrà quasi ovunque in $a \vdash\!\dashv b$

$$| f'(x) | \leq W'(x) ;$$

ossia le derivate delle funzioni di una classe V. L. s. u. sono maggiorate quasi ovunque da una funzione sommabile.

4. - Consideriamo ora una classe $\{ f(x) \}$ assolutamente continua in modo super-uniforme (A. C. s. u.). Ogni funzione di tale classe è assolutamente continua. Inoltre la classe è pure V. L. s. u. Ciò risulta dal fatto che se facciamo $\varepsilon = 1$ nella definizione data in β), ad esso corrisponde un $\delta > 0$ che

$$\sum_i | f_i(\xi_i') - f_i(\xi_i'') | < 1 , \tag{4}$$

purchè sia $\sum_i | \xi_i' - \xi_i'' | < \delta$. Allora suddividendo $a \vdash\!\dashv b$ in intervalli di ampiezza minore di δ, avremo per la (4) che la classe $\{ f(x) \}$ è V. L. s. u. in ciascuno di essi e perciò anche in $a \vdash\!\dashv b$.

In questo caso la $W(x)$ risulta assolutamente continua e quindi la classe $\{ f(x) \}$ è A. C. s. u. se e soltanto se, l'incremento di ogni $f(x)$ della classe è maggiorato dal corrispondente incremento di una funzione assolutamente continua fissa.

Possiamo ora dimostrare che *se una classe di funzioni* $f(x)$ *assolutamente continue è* V. L. s. u., *essa è pure* A. C. s. u. *e viceversa* (il viceversa è immediato).

Infatti, esiste allora, per quanto è stato detto al n. 3, una funzione $H(x)$ sommabile, tale che per ogni $f(x)$ si abbia quasi ovunque in $a \vdash\!\dashv b$

$$|f'(x)| \leq H(x),$$

per ogni coppia x_1, x_2 di $a \vdash\!\dashv b$ risulta dunque

$$|f(x_1) - f(x_2)| = \left| \int_{x_1}^{x_2} f'(x)dx \right| \leq \left| \int_{x_1}^{x_2} H(x)dx \right|;$$

e, posto $\Phi(x) = \int_a^x H(x)dx$, si trova

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq |\Phi(x_1) - \Phi(x_2)|$$

che per l'assoluta continuità di $\Phi(x)$ prova l'asserto.

5. - Dalle precedenti considerazioni si ottiene facilmente un criterio per il passaggio al limite sotto il segno d'integrale, equivalente a quello noto di Lebesgue, ma notevolmente diverso nella forma.

Dimostriamo il seguente teorema:

Sia $\{f_n(x)\}$ *una successione di funzioni sommabili in* $a \vdash\!\dashv b$ *convergente quasi ovunque in* $a \vdash\!\dashv b$ *ad una funzione* $f(x)$. *Se esiste una costante* M *tale che prese comunque le funzioni* $f_{n_i}(x)$ *nella successione e gli intervalli disgiunti* $\alpha_i - \beta_i$ *in* $a \vdash\!\dashv b$ *risulti sempre*

$$\sum_i \left| \int_{\alpha_i}^{\beta_i} f_{n_i}(x)dx \right| \leq M \tag{5}$$

allora la $f(x)$ *è sommabile e si ha*

$$\lim_{h \to \infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)dx.$$

Infatti, se poniamo

$$F_n(x) = \int_a^x f_n(x)dx \qquad (n = 1, 2, ...)$$

per la (5) la classe $\{F_n(x)\}$ risulta V. L. s. u. Esiste allora una funzione sommabile $H(x)$ tale che per ogni n è

$$|f_n(x)| = |F_n'(x)| \leq H(x)$$

e per il citato teorema di Lebesgue segue l'asserto.

OSSERVAZIONE: Tutte le considerazioni svolte in questa nota si possono estendere immediatamente alle funzioni in due o più variabili. In due variabili, ad esempio, si dovranno considerare gli incrementi doppi delle funzioni e si potranno definire in modo analogo a quello tenuto in α) e in β) le classi di funzioni $\{f(x, y)\}$ V. L. s. u. ed A. C. s. u. (secondo Vitali).

Tutti i teoremi corrispondenti a quelli qui considerati resteranno validi.