ALDO BRESSAN

Sulle deformazioni dei corpi cristallini cilindrici nello schema di De Saint Venant

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 22 (1953), p. 281-293

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1953__22__281_0>

SULLE DEFORMAZIONI DEI CORPI CRISTALLINI CILINDRICI NELLO SCHEMA DI DE SAINT VENANT

Nota (*) *di* ALDO BRESSAN (*a Padova*)

Nella presente nota faccio delle considerazioni di raffronto tra le soluzioni semplici del problema di DE SAINT VENANT per un solido cristallino cilindrico omogeneo C^* avente *tre piani di simmetria cristallografica* e quelle di uno isotropo C_i ad esso geometricamente eguale.

Per ogni deformazione di tipo semplice (estensione semplice, flessione uniforme, flessione non uniforme, torsione) definita punto per punto, assunta da C^* sotto una data sollecitazione [equilibrata] mi propongo di trovare le condizioni a cui debbono soddisfare i coefficienti di elasticità di C^* — anisotropo — affinchè esista un cilindro C_i isotropo ad esso geometricamente eguale che, nel criterio di approssimazione di DE SAINT VENANT, assuma la stessa deformazione di C^*.

Qualora esista questo C_i mi propongo di trovare i legami che intercedono tra i coefficienti di elasticità di C^* e quelli di C_i e tra le forze sollecitanti.

Questi confronti possono riuscire utili per l'integrazione dei problemi di DE SAINT VENANT relativi a cilindri anisotropi del tipo suddetto, in quanto si riconosce da essi quando e come ci si può riportare al corrispondente caso isotropo e dalla soluzione di questo, se nota, dedurre quella relativa al corpo cristallino che si considera.

Fra l'altro ho occasione di osservare che il problema della flessione non uniforme ammette una soluzione polinomiale di

---

(*) Pervenuta in Redazione il 14 marzo 1953.

secondo grado nelle caratteristiche di tensione anche in casi diversi da quello ben noto in cui la sezione del corpo cilindrico è ellittica.

1. - Premesse di carattere generale.

Suppongo C^* riferito alla sua terna centrale d'inerzia $(0, x_1, x_2, x_3)$ e in equilibrio sotto forze che lo sollecitano solo sulle basi e siano R_i^* e M_i^*, $(i = 1, 2, 3)$, le componenti secondo gli assi del risultante e del momento risultante rispetto ad O delle forze che lo sollecitano sulla base superiore. La sua altezza sia tale da permettere l'applicazione del principio di approssimazione di DE SAINT VENANT.

Siano $n_1, n_2, n_3 = 0$ i coseni direttori della normale interna alla superficie laterale σ di C^* e i suoi coefficienti di elasticità m_{rs} $(r, s = 1, 2, \dots, 6)$ soddisfino le uguaglianze

$$m_{r4}^* = m_{r5}^* = m_{45}^* = m_{36}^* = m_{46}^* = m_{56}^* = 0, \quad (r = 1, 2, 3). \tag{1}$$

Detta A una sezione normale del corpo cilindrico, posto

$$\rho_1^2 = \frac{1}{A}\int_A x_1^2 dA \tag{2}$$

e convenendo di indicare con un soprassegno il valore medio in A, la soluzione del problema di DE SAINT VENANT è rappresentata [1]) da quella scelta delle caratteristiche di tensione, X_r, $(r = 1 \dots 6)$, che soddisfano le equazioni:

$$X_1 = X_2 = X_6 = 0\,, \tag{3}$$

$$\left\{\begin{aligned} & X_3 = X_3' x_3 + X_{33}''\,, \\ & X_3' = -\frac{1}{A}\left[\frac{R_1}{\rho_1^2}x_1 + \frac{R_2}{\rho_2^2}x_2\right], \\ & X_3'' = -\frac{1}{A}\left[R_3 - \frac{M_2}{\rho_1^2}x_1 + \frac{M_1}{\rho_2^2}x_2\right], \end{aligned}\right. \tag{4}$$

---

[1]) G. GRIOLI: *Sul problema di De Saint Venant nei solidi cristallini.* «Rendiconti del Seminario Matematico», Padova, Anno XXI n. 2.

$$(5) \qquad \frac{\partial X_4}{\partial x_2} + \frac{\partial X_5}{\partial x_1} = - X_3' = \frac{1}{A}\left[\frac{R_1}{\rho_1^2}x_1 + \frac{R_2}{\rho_2^2}x_2\right],$$

$$(6) \qquad X_4 n_2 + X_5 n_1 = 0,$$

$$(7) \qquad \begin{cases} \overline{X_4} = -\dfrac{R_2}{A}, \quad \overline{x_1 X_4} - \overline{x_2 X_5} = -\dfrac{M_3}{A} \\ \overline{X_5} = -\dfrac{R_1}{A} \end{cases}$$

e che rendono minimo il funzionale

$$(8) \quad \mathfrak{J} = \int_A \left\{ \frac{1}{m_{44}}\left[m_{44}X_4 - \frac{m_{13}R_2}{A\rho_1^2}P_3\right]^2 + \frac{1}{m_{55}}\left[m_{55}X_5 - \frac{m_{23}R_1}{A\rho_1^2}P_4\right]^2 \right\} dA,$$

dove è

$$P_3 = x_1^2 + \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma \quad , \quad P_4 = x_2^2 + \alpha_{11}x_1^2 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_0$$

con α, β, γ, α_{11}, α_1, α_2, α_0 costanti arbitrarie [2]).

* * *

Confronterò C^* con un cilindro omogeneo isotropo C geometricamente eguale a C^* e per indicare grandezze corrispondenti, relative a C^* e C_i, adopererò i medesimi simboli con e senza asterisco.

Per ogni C^* le caratteristiche di deformazione sono espresse da

$$(9) \qquad \begin{cases} \varepsilon_r^* = - m_{r3}^* X_3^* = \\ \quad = -\dfrac{m_{13}^*}{A}\left[\dfrac{R_1^*}{\rho_1^2}x_1x_3 + \dfrac{R_2^*}{\rho_2^2}x_2x_3 - \dfrac{M_2^*}{\rho_1^2}x_1 + \dfrac{M_1^*}{\rho_2^2}x_2 + R_3^*\right], \\ \varepsilon_{r+3}^* = - m_{r+3,\,r+3}^* X_{r+3}^*, \qquad\qquad (r = 1, 2, 3,), \\ \varepsilon_6^* = 0. \end{cases}$$

---

[2]) In loco citato risulta che X_4 e X_5 sono funzioni delle sole x_1 e x_2.

Sarà quindi, con riferimento ad un corpo omogeneo isotropo [3]),

$$
(10) \qquad \begin{cases} \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -\, m_{13} X_3 \quad , \quad \varepsilon_3 = -\, m_{33} X_3 , \\ \varepsilon_{r+3} = 2(m_{13} - m_{33}) X_{r+3} \qquad\qquad (r = 1,\, 2), \\ \varepsilon_6 = 0 , \end{cases}
$$

Naturalmente supporrò che delle disuguaglianze

$$
(12) \qquad \begin{cases} m^*_{13} \neq m^*_{23} \\ m^*_{44} \neq 2(m^*_{33} - m^*_{13}) \qquad m^*_{55} \neq 2(m^*_{33} - m^*_{13}) \end{cases}
$$

almeno una sia soddisfatta.

* * *

L'eguaglianza delle deformazioni di C^* e C_i, richiede come condizione necessaria e sufficiente quella delle caratteristiche di deformazione.

Basta allora osservare le (9,1) per riconoscere che condizione necessaria per tale uguaglianza è il verificarsi delle relazioni:

$$
(13) \qquad \begin{cases} m^*_{r3} R^*_i - m_{13} R_i = 0 \, , \quad m^*_{r3} M^*_j - m_{13} M_3 = 0 \, , \\ m^*_{33} R^*_i - m_{33} R_i = 0 \, , \quad m^*_{33} M^*_j - m_{33} M_3 = 0 \, , \\ (r = 1,\, 2 \quad , \quad i = 1,\, 2,\, 3, \quad , \quad j = 1,\, 2) \, . \end{cases}
$$

---

3) Le (10) valgono anche per un corpo non isotropo per il quale siano soddisfatte le relazioni

$$
(11) \qquad \begin{cases} m_{13} = m_{23} \qquad m_{44} = m_{55} = 2(m_{33} - m_{13}) \\ m_{44} > 0 \qquad 2m_{13} + m_{33} > 0 \end{cases}
$$

tale corpo potrà chiamarsi (rispetto al problema di DE SAINT VENANT) *pseudo-isotropo*.

Le relazioni di raffronto che farò fra le soluzioni del problema di DE SAINT VENANT, relative a un corpo cilindrico C^* e quelle relative ad uno isotropo geometricamente eguale, si manterranno valide anche se, anzichè un cilindro isotropo, se ne considera uno pseudoisotropo.

2. - Estensione semplice - Flessione pura.

Sia

$$R_i^* = R_i = 0\,, \quad (i = 1,\, 2)\,, \quad M_3^* = M_3 = 0 \tag{14}$$

Tenuto conto di (14), dato il carattere definito positivo del funzionale (8) si riconosce che, in base alle (5), (6), (7), (14), e alla condizione di minimo del funzionale (8) risulta

$$X_4^* = X_5^* = X_4 = X_5 = 0 \tag{15}$$

e lo stato tensionale [vedi anche (4)] riesce lineare e indipendente dalla natura del materiale.

Le (13) risultano, per le (9), oltrechè necessarie, anche sufficienti affinchè C^* e C_i abbiano eguali deformazioni. Da esse [tenuto conto di (14)] segue innanzi tutto

$$m_{13}^* = m_{23}^* \tag{16}$$

da cui si vede che *se C^* è del tutto generico, non esiste un cilindro isotropo che abbia una medesima estensione semplice o una stessa deformazione pura.*

Invece per ogni C^* per cui è verificata la (16) [ad es. per un C^* monometrico] le (13) si riducono a

$$\frac{m_{13}}{m_{33}} = \frac{m_{13}^*}{m_{33}^*}\,, \qquad \frac{R_3}{R_3^*} = \frac{M_1}{M_1^*} = \frac{M_2}{M_2^*} = \frac{m_{33}^*}{m_{33}} \tag{17}$$

e rappresentano condizioni anche sufficienti.

Sulle (17) si legge: *Comunque si solleciti ad estensione semplice (a flessione pura) (anche simultanee) un prefissato C^* soddisfacente alla* (16), *esistono infiniti cilindri, geometricamente eguali ad esso e isotropi* [*caratterizzati dalle* (17)] *che, sotto sollecitazioni dello stesso tipo, hanno eguale deformazione di C^*.*

Per ognuno di tali cilindri isotropi C_i la sollecitazione rimane determinata in base a $(17)_2$.

Se invece si prefissano R_3^* e R_3 $\left[M_i, M_i^*, (i = 1, 2), \text{ con } \frac{M_1}{M_1^*} = \frac{M_2}{M_2^*}\right]$ *esiste sempre uno ed uno solo cilindro isotropo caratterizzato dalle* (17) *che ha la stessa estensione semplice* [*flessione pura*] *del prefissato C^** {*verificante la* (16)}.

E' evidente come si legge la $(17)_2$ nel caso di sovrapposizione di una estensione semplice ed una flessione pura.

3. - Torsione.

Sia

$$(18) \qquad \begin{cases} R_i^* = R_i = 0\,, \quad M_j^* = M_j = 0\,, \quad M_3^* \neq 0\,, \quad M_3 \neq 0\,, \\ (i = 1,\ 2,\ 3 \quad , \quad j = 1,\ 2) \end{cases}$$

L'eguaglianza delle deformazioni implica le (13) e condizione necessaria e sufficiente per la

$$\varepsilon_r \equiv \varepsilon_r^*\,, \qquad (r = 4,\ 5)\,,$$

è che in base a (9) e (10) sia

$$(19) \qquad m_{r+3,\,r+3} X_{r+3}^* - 2(m_{33} - m_{13}) X_{r+3} = 0\,, \qquad (r = 1,\ 2).$$

Insieme alla $(7)_2$ vale [4]) la relazione:

$$(20) \qquad \overline{x_1 X_4} + \overline{x_2 X_5} = 0\,.$$

Applicando le (7) e (20) allo stato tensionale di C^* e a quello di C_i si deduce

$$(21) \qquad \begin{cases} \overline{x_1 X_4^*} = -\dfrac{M_3^*}{2A}\,, \quad \overline{x_2 X_5^*} = \dfrac{M_3^*}{2A}\,, \\ \overline{x_1 X_4} = -\dfrac{M_3}{2A}\,, \quad \overline{x_2 X_5} = \dfrac{M_3}{2A}\,, \end{cases}$$

mentre da (19) segue [5])

$$(22) \qquad \begin{cases} m_{44}^* \overline{x_1 X_4^*} - 2(m_{33} - m_{13}) \overline{x_1 X_4} = 0\,, \\ m_{55}^* \overline{x_2 X_5^*} - 2(m_{33} - m_{13}) \overline{x_2 X_5} = 0 \end{cases}$$

---

[4]) G. GRIOLI: *op. cit.* Formula (41) dove è $C_{11} = 0$ per la posizione (18).

[5]) Come è noto per corpi isotropi è $2(m_{33} - m_{13}) = m_{44} > 0$ per cui non può essere $(m_{33} - m_{13}) = 0$.

che in base a (21) divengono:

$$\begin{cases} m_{44}^* M_3^* - 2(m_{33} - m_{13}) M_3 = 0 \\ m_{55}^* M_3^* - 2(m_{33} - m_{13}) M_3 = 0 \,. \end{cases} \tag{23}$$

Da (23) si ha (essendo $m_{33} \neq m_{13}$):

$$m_{44}^* = m_{55}^* \,. \tag{24}$$

Ne segue che *se C^* è generico non esiste un cilindro C_i isotropo geometricamente eguale, che abbia la stessa torsione di C^*.*

Se invece C^* è tale che la (24) sia soddisfatta, le (23) diventano identiche e si riducono a una condizione sufficiente, (oltre che necessaria) perchè C^* e C_i abbiano la medesima torsione.

Anzi si vede che *per ogni prefissato C^* verificante la* (24) *e per ogni scelta di M_3^*, M_3 esistono infiniti C_i isotropi geometricamente eguali a C^* aventi la medesima torsione.*

Per dimostrare quanto sopra osservo che, dette $X_r^{*\prime}$, X_r' $(r = 4, 5)$ ciò che diventano le X_r^*, X_r, $(r = 4, 5)$, per $M_3^* = M_3 = 1$, le $X_r^{*\prime}$, X_r' $(r = 4, 5)$ sono rispettivamente determinate dalle equazioni (5), (6), (7) per $M_3^* = M_3 = 1$ e dal rendere minimo ciò che diviene il funzionale (8) con riferimento a C^* o a C_i. Ma tenuto conto di (18) e (24) si vede subito che le espressioni assunte da $\mathfrak{J}$ in corrispondenza a C^* e a C_i differiscono tra loro per un fattore costante. Se ne deduce che le $X_r^{*\prime}$, X_r' minimizzanti sono identiche. Dette $(X_r')_{\min}$ tali espressioni minimizzanti ne seguono le relazioni del problema della torsione espresse da

$$X_r^* = (X_r')_{\min} M_3^* \qquad X_r = (X_r')_{\min} M_3 \qquad (r = 4, 5) \tag{25}$$

che in base a (23) verificano le (19) il che dimostra l'asserto.

4. - Flessione non uniforme.

Siano

$$R_3 = 0 \quad , \quad M_i = 0 \,, \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{26}$$

e R_1, R_2 non simultaneamente nulle.

Dalle (13) risulta evidente che se la (16) non è verificata, *non esistono cilindri isotropi che hanno la medesima flessione non uniforme di un cilindro C^*.*

Supposta verificata la (16) da (13) seguono le condizioni necessarie per l'uguaglianza delle deformazioni:

$$\frac{m_{13}}{m_{33}} = \frac{m_{13}^*}{m_{33}^*} \qquad \frac{R_1}{R_1^*} = \frac{R_2}{R_2^*} = \frac{m_{33}^*}{m_{33}}. \tag{27}$$

Con le (27) è assicurata l'eguaglianza delle ε_r^* e ε_r ($r = 1, 2, 3$), mentre quella delle ε_r e ε_r^* per $r = 4, 5$ richiede il verificarsi della (19).

Da (19), prendendo i valori medi in A e tenendo presente le (7) si deducono le

$$\begin{cases} m_{44}^* R_2^* - 2(m_{33} - m_{13})R_2 = 0 \\ m_{55}^* R_1^* - 2(m_{33} - m_{13})R_1 = 0 \end{cases} \tag{28}$$

che, se R_1^*, R_2^* sono contemporaneamente non nulle, implicano che R_1 e R_2 siano ambedue diverse da zero [vedi anche (27)] ed inoltre [vedi ancora (27)]

$$\frac{2(m_{33} - m_{13})}{m_{44}^*} = \frac{2(m_{33} - m_{13})}{m_{55}^*} = \frac{m_{13}}{m_{13}^*} = \frac{m_{33}}{m_{33}^*}. \tag{29}$$

Le (29) *non possono essere verificate se C^* non è isotropo* [vedi (10)].

Dunque: *qualunque sia C^* sollecitato a flessione non uniforme con $R_1^* \neq 0$, $R_2^* \neq 0$, non esiste un C_i avente, sotto analoga sollecitazione, la medesima deformazione.*

* * *

Suppongo ora che R_1^* e R_2^* non siano ambedue diverse da 0. Ad es., sia

$$R_2^* \neq 0. \tag{30}$$

Da (28) segue

$$R_2 = 0 \tag{31}$$

e

$$\frac{2(m_{33} - m_{13})}{m_{55}^*} = \frac{m_{13}}{m_{13}^*} = \frac{m_{33}}{m_{33}^*} \tag{32}$$

$$\frac{R_1^*}{R_1} = \frac{m_{13}}{m_{13}^*} \tag{33}$$

con $(m_{33} - m_{13}) \neq 0$ come si è già osservato [6]) (vedi nota [5]).

Posto

$$b_{\eta\tau} = -\frac{1}{A}\int_A x_1^{\eta+1} x_2^{\tau} dA \tag{34}$$

da (31) si ha [7])

$$\left\{\begin{aligned} &\eta\overline{x_1^{\eta-1}x_2^{\tau}X_5^*} + \tau\overline{x_1^{\eta}x_2^{\tau-1}X_4^*} = R_1^* b_{\eta\tau} \\ &\eta\overline{x_1^{\eta+1}x_2^{\tau}X_5} + \tau\overline{x_1^{\eta}x_2^{\tau-1}X_4} = R_1 b_{\eta\tau} \end{aligned}\right. \tag{35}$$

L'identità delle deformazioni dà per $(9)_2$ [e $(11)_2$]

$$m_{jj}^* X_j^* = 2(m_{33} - m_{13})X_j\,, \qquad (j = 4,\ 5). \tag{36}$$

Moltiplicando le $(35)_1$, per m_{55}^*, la $(35)_2$ per $2(m_{33} - m_{13})$, sottraendo e tenendo presenti le (32), (33) e le (36), si ottiene

$$\left\{\begin{aligned} &\overline{x_1^{\eta}x_2^{\tau-1}X_4}\left(\frac{1}{m_{55}^*} - \frac{1}{m_{44}^*}\right) = 0\,. \\ &\overline{x_1^{\eta}x_2^{\tau-1}X_4^*}\left(\frac{1}{m_{55}^*} - \frac{1}{m_{44}^*}\right) = 0\,. \end{aligned}\right. \qquad \eta,\ (\tau - 1) = 0,\ 1,\ 2\ \ldots \tag{37}$$

Se per qualche valore di τ è $b_{0\tau} \neq 0$ avendosi per (35)

$$\overline{x_2^{\tau-1}X_4^*} \neq 0$$

da (37) seguono ancora le (29).

Suppongo quindi $b_{0\tau} = 0$ per ogni τ e, non volendo ricadere nel caso dell' isotropia,

$$m_{55}^* \neq m_{44}^*\,. \tag{38}$$

Per una nota proprietà di completezza della successione dei monomi $x_1^{\eta}x_2^{\tau}$ segue di conseguenza da (37)

---

[6]) Se simultaneamente fosse $M_3 \neq 0$ per (24), da (32) si ricadrebbe in (29) e C^* non potrebbe essere anisotropo.

[7]) G. GRIOLI: *op. cit.* Formule (38) e (39) pag. 237.

$$X_4 \equiv 0 \qquad X_4^* \equiv 0 \quad \text{in} \quad A. \tag{39}$$

Le equazioni generali (5), (7), in base a (39) divengono, con riferimento a C^* e per $R_2^* = R_2 = M_3^* = M_3 = 0$

$$\frac{\partial X_5^*}{\partial x_1} = \frac{R_1^*}{A\rho_1^2} x_1, \tag{40}$$

$$X_5^* n_1 = 0, \tag{41}$$

$$\overline{X_4^*} = 0, \quad \overline{X_5^*} = -\frac{R_1^*}{A}, \quad \overline{x_2 X_5^*} = 0, \tag{42}$$

mentre la proprietà di minimo di (8) si traduce [8]) nelle equazioni:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 X_5^*}{\partial x_2^2} = 2\dfrac{m_{13}^*}{m_{55}^*}\dfrac{R_1^*}{A\rho_1^2}. \\[2ex] \dfrac{\partial^2 X_5^*}{\partial x_1 \partial x_2} = 0, \end{cases} \tag{43}$$

Si riconosce che le (40), (42), (43), determinano X_5^* nella forma (9)

$$X_5^* = \frac{R_1^*}{A\rho_1^2}\left\{\frac{x_1^2}{2} + \frac{m_{13}^*}{m_{55}^*}x_2^2 + \frac{1}{\rho_2^2}\left(-\frac{\overline{x_1^2 x_2}}{2} - \frac{m_{13}^*}{m_{55}^*}\overline{x_2^3}\right)x_2 - \right. \\ \left. - \frac{3}{2}\rho_1^2 - \frac{m_{13}^*}{m_{55}^*}\rho_2^2\right\}. \tag{44}$$

Analogamente per X_5. Risulta evidente, in base a (32) che la X_5 si deduce dalle espressioni (44) di X_5^* semplicemente mutando R_1^* in R_1.

Posto

$$h = \frac{m_{13}}{m_{55}} = \frac{m_{13}^*}{m_{55}^*} = \frac{m_{13}}{2(m_{33} - m_{13})},$$

---

[8]) G. GRIOLI: *op. cit.* Formula (23) e sua equivalenza alla $\partial I = 0$.

[9]) Ciò per un qualunque cilindro anisotropo C^*, non essendo intervenuta ipotesi sulle m_{rs}^* nello stabilire la (44).

si riconosce che X_5^* e X_5 si annullano sulla conica K' di equazione

$$(45) \qquad \frac{x_1^2}{2} + hx_2^2 - \frac{1}{\rho_1^2}\left(\frac{x_1 x_2}{2} + hx_2^3\right)x_2 - \left(\frac{3}{2}\rho_1^2 + h\rho_2^2\right) = 0$$

che è un'ellisse, o una parabola di asse x_2, o un'iperbole, a seconda che sia

$$(46) \qquad m_{13} \gtreqless 0$$

e per essa [se si esclude il caso della parabola conseguente a $m_{13} = 0$] si ha

$$(47) \qquad \frac{a_1'^2}{a_2'^2} = \left|\frac{2m_{13}^*}{m_{55}^*}\right| = \left|\frac{2m_{13}}{m_{55}}\right| = |2h|$$

se a_1' e a_2' sono i semiassi [10]).

Poichè n_1 si annulla solo quando la tangente al contorno di A è parallela all'asse x_1, la (41) implica che se è

$$m_{44}^* \neq m_{55}^*$$

il campo A deve essere delimitato da K' (se trattasi di ellisse) o in generale da uno o due archi di K' e da una o due rette parallele all'asse x_1.

* * *

Le considerazioni che seguono servono a dimostrare che se K' è un'ellisse o un'iperbole essa deve essere simmetricamente disposta rispetto all'asse delle x_1, e ad escludere che K_1 possa essere una parabola.

Sia $h \neq 0$ e A delimitato da una conica K (ellisse o iperbole) di assi ξ e η, di semiassi a_1 e a_2 ed, eventualmente, da una o due rette perpendicolari a η, asse di simmetria per A.

---

[10]) Per i corpi isotropici ad es. è

$$m_{13} = -\frac{\chi}{E} \qquad E > 0 \qquad -1 < \chi < \frac{1}{2}$$

ed è noto che per la quasi totalità dei corpi elastici isotropi è $\chi > 0$; ne segue che il caso che K' sia un'iperbole presenta maggiore concretezza rispetto agli altri.

Siano x_1 e $x_2 \equiv \eta$ gli assi centrali di inerzia per A nel piano (ξ, η).

Le equazioni parametriche della parte di K situata nel semipiano $\xi > 0$ sono

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi = a_1 \cos\theta\,, \\ \eta = a_2 \operatorname{sen}\theta\,, \end{array} \right. \quad \text{con} \quad -\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \theta \leq \beta \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{se è} \quad h > 0, \tag{48}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi = a_1 \operatorname{ch}\theta \\ \eta = a_2 \operatorname{sh}\theta \end{array} \right. \quad \text{con} \quad \alpha \leq \theta \leq \beta \quad \text{se è} \quad h < 0\,. \tag{49}$$

Nelle (48), (49) α e β sono determinate dalle basi del segmento che si considera.

Da (45) si ha che i semiassi di K' sono

$$\left\{ \begin{array}{l} a'^2_1 = 3\rho_1^2 + 2h\rho_2^2\,. \\ a'^2_2 = \dfrac{1}{|h|}\left(\dfrac{3}{2}\,\rho_1^2 + h\rho_2^2\right). \end{array} \right. \tag{50}$$

La coincidenza di K e K' di centri O e O' equivale a

$$a'^2_1 = a_1^2 \qquad a'^2_2 = a_2^2 \quad \text{e} \quad O \equiv O' \tag{51}$$

È

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_1^2 = \overline{x_1^2} = \overline{\xi^2} \\ \rho_2^2 = \overline{x_2^2} = \overline{\eta^2} - \eta_G^2 \end{array} \right. \tag{52}$$

ove η_G è l'ordinata del baricentro di A in (ξ, η).

Determinati $\overline{\xi^2}$, $\overline{\eta^2}$, e η_G si può dimostrare che da (50) e (52) comunque si scelgano α, β soddisfacenti alle (48), si ha se $h \neq 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} a'^2_1 = a_1^2 - 2h\eta_G^2 \\ a'^2_2 = a_2^2 - \dfrac{h}{|h|}\,\eta_G^2 \end{array} \right. \tag{53}$$

Dunque A *deve* essere simmetrica anche rispetto a x_1, e ciò equivale alla coincidenza di K e K'

In tal caso dunque la terna $(X_3^*, X_4^* \equiv 0, X_5)$ con X_3^* e X_5^* date da (4) e (44), risolve tutte le equazioni del problema [e ciò anche senza le restrizioni (32) per le m^*_{rs}] e risulta

$$(54)\qquad \begin{cases} X_5^* = \dfrac{R_1^*}{A\rho_1^2}\left\{ \dfrac{x_1^2}{2} + hx_2^2 - \dfrac{3}{2}\rho_1^2 - h \right\}, \\ X_5 = \dfrac{R_1^1}{R_1^*}\, X_5^*. \end{cases}$$

* * *

Sia ora $h = 0$. Da (44) risulta che K' è la parabola:

$$(55)\qquad x_1^2 = \frac{\overline{x_1^2 x_2}}{\rho_2^2}\, x_2 + 3\rho_1^2 .$$

Sia K una parabola di parametro p, asse η e di tangente ξ nel vertice V, e x_1, x_2 la coppia di assi centrali di inerzia per A (delimitata da K e da due rette parallele a ξ)
E'

$$p' = \frac{\overline{x_1^2 x_2}}{2\rho_2^2} \qquad x'_{2(V)} = -\frac{3\rho^2\rho_2^2}{\overline{x_1^2 x_2}}$$

La coincidenza di K con K' equivale a

$$p = p' \qquad - x_{2_{(V)}} = \eta_G .$$

Tenendo conto della (55) e della

$$\overline{x_1^2 x_2} = \overline{\xi^2 \eta} - \overline{\xi^2}\eta_G$$

le 56 danno

$$p' = \frac{1}{3}\,p \qquad - x_{2_{(V)}} = 3\eta_G$$

che escludono la coincidenza di K e K'.

E' da rigettarsi quindi in questo caso *l'ipotesi*

$$m^*_{44} \neq m^*_{55}$$

e C^* non può che essere isotropo.