

RENDICONTI  
*del*  
SEMINARIO MATEMATICO  
*della*  
UNIVERSITÀ DI PADOVA

G. COLOMBO

**Sul moto di due corpi rigidi pesanti collegati in  
un punto, di cui uno ha un punto fisso**

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,*  
tome 22 (1953), p. 305-312

[http://www.numdam.org/item?id=RSMUP\\_1953\\_\\_22\\_\\_305\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1953__22__305_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1953, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques*  
<http://www.numdam.org/>

# SUL MOTO DI DUE CORPI RIGIDI PESANTI COLLEGATI IN UN PUNTO, DI CUI UNO HA UN PUNTO FISSO

*Nota (\*) di G. COLOMBO (a Padova)*

Si considerano due sistemi rigidi, asimmetrici, pesanti, dei quali  $S_1$  ha un punto fisso  $O$  ed  $S_2$  è girevole intorno ad un punto  $Q$  appartenente ad  $S_1$  <sup>1)</sup>. Si caratterizzano quei movimenti del sistema in relazione ai quali il moto assoluto di ciascuno dei due corpi è rotatorio uniforme.

Dopo aver dimostrato che, esclusi due casi eccezionali, il sistema si muove come un unico corpo rigido si mettono in evidenza alcune proprietà di questi moti, dedotte facendo uso di una estensione <sup>2)</sup>, recentemente introdotta nelle questioni di stereodinamica, delle nozioni di ellisse centrale e della polarità ad essa subordinata. Infine si discute qualche caso particolare.

\* \* \*

**1.** — Si consideri il sistema  $S$  costituito da due corpi rigidi pesanti  $S_1, S_2$  asimmetrici, collegati in un punto  $Q$  e di

---

(\*) Pervenuta in Redazione il 9 Giugno 1953.

<sup>1)</sup> Un tale sistema dinamico è stato studiato da C. Agostinelli alcuni anni fa. Vedi:

C. AGOSTINELLI, *Moto di due corpi rigidi collegati etc.*, Atti R. Acc. Scienze di Torino, vol. 75, Tomo I, Dispensa II, Genn.-Marzo 1940, p. 249-263.

C. AGOSTINELLI, *Moto di due corpi rigidi pesanti etc.*, Rend. Ist. Lomb., vol. LXXIII, 4<sup>o</sup> della serie III, Fasc. 2, p. 66-679.

<sup>2)</sup> Tale estensione è dovuta ad A. Signorini. Vedi per es.:

A. SIGNORINI, *Lezioni di Meccanica Razionale con elementi di statica grafica e disegno*. Perella, Roma, 1947, vol. I, p. 322 e segg.

cui  $S_1$  abbia un punto fisso  $O$ . Volendo ricercare se sono possibili per  $S$  movimenti tali che il moto assoluto di ognuno dei due corpi sia rotatorio uniforme denotiamo con  $\omega_1, \omega_2$  le velocità angolari di  $S_1$  e rispettivamente di  $S_2$  supponendole per ora diverse.

Premetto alcune Osservazioni:

OSSERVAZIONE I. — *Se  $\omega_1$  non è parallela ad  $OQ$ , deve essere  $\omega_1 = \omega_2$ .*

Basta pensare al moto di  $Q$  per riconoscere che i due assi di moto devono coincidere nella retta normale al piano che contiene la circonferenza descritta da  $Q$  e passante per il suo centro, ed inoltre che le velocità angolari devono risultare uguali.

OSSERVAZIONE II. — *Esclusi due casi eccezionali [che specificheremo in seguito] nell'ipotesi che  $\omega_1$  sia parallelo ad  $OQ$ ,  $\omega_2$  ed  $OQ$  sono verticali ed è  $\omega_1 = \omega_2$ .*

Se  $\omega_1$  è parallelo ad  $OQ$ ,  $S_2$  si muove come un corpo rigido pesante, con un punto fisso in  $Q$ . Sarà quindi  $\omega_2$  verticale e l'asse  $a_2$  del moto rotatorio di  $S_2$  sarà una retta del cono di Staude relativa ad  $S_2$  ed al punto  $Q$ .

La forza esplicita da  $S_2$  su  $S_1$  è  $m_2(\mathbf{g} - \mathbf{a}_2)$  essendo  $\mathbf{a}_2$  l'accelerazione del baricentro  $O_2$  di  $S_2$ . Il momento risultante  $M_{O,1}^{(m)}$  delle forze d'inerzia di  $S_1$  rispetto ad  $O$  è uguale ad un vettore ruotante uniformemente intorno ad  $a_1$ , asse del moto di  $S_1$ , con velocità  $\omega_1$  ed ortogonale ad  $a_1$ . Poichè il moto di  $S_1$  è uniforme e le forze esterne attive si riducono nei riguardi di  $S_1$  al peso proprio ed alle reazioni di  $S_2$  su  $S_1$  la costanza di  $\omega_1$  implica che: o l'asse  $OQ$  sia verticale oppure che  $G_1$  (baricentro di  $S_1$ ) appartenga ad  $OQ$ .

Distinguo due casi:

I. -  $OQ$  è non verticale e quindi  $G_1$  appartiene alla retta  $OQ$ . - L'equilibrio delle forze attive e di quelle d'inerzia comporta che il momento  $M_{O,1}^{(e)}$  delle forze esterne agenti su  $S_1$ , rispetto al polo  $O$  sia, esso pure, un vettore ortogonale ad  $OQ$ , ruotante intorno ad  $OQ$  con velocità  $\omega_1$  costante. Poichè  $M_{O,1}^{(e)}$  è il momento risultante rispetto ad  $O$  di  $m_1g$  applicato in  $G_1$  e di  $m_2(\mathbf{g} - \mathbf{a}_2)$  applicato in  $Q$ , ne segue che devono essere se-

paratamente nulli, il momento dei pesi, quello della forza  $m_2 \mathbf{a}_2$  applicato in  $Q$ , ed infine  $M_{O,1}^{(m)}$ .

Ciò implica: a) il baricentro dei punti  $G_1$ , con masse  $m_1$ , e  $Q$ , con masse  $m_2$ , cade in  $O$ ; b)  $G_2$  appartiene all'asse di rotazione di  $S_2$  e quindi o  $G_2Q$  è asse centrale ed allora  $\omega_2$  può essere qualunque, oppure deve essere  $\omega_2 = 0$ . In questo caso  $S_1$  si muove come un corpo rigido intorno ad un punto fisso in assenza di forze e quindi: c)  $OQ$  è asse principale d'inerzia di  $S_1$  rispetto ad  $O$ .

II. -  $OQ$  è verticale. - Ragionando analogamente si trova che deve essere  $\omega_1 = \omega_2$ , a meno che  $QG_2$  non sia asse centrale d'inerzia, nel quale caso  $OQ$  deve essere asse permanente per  $S_1$ , potendo addirittura essere asse centrale.

In base alle due Osservazioni I e II si conclude che, se si escludono i casi eccezionali esposti più sopra, i moti dei due corpi possono essere rotatori solo se  $\omega_1 = \omega_2$ . Il moto di  $S$  è cioè rigido.

2. — Il sistema  $S$  si muova dunque di moto rigido rotatorio uniforme intorno alla retta  $a$ . Pertanto  $a$  è verticale ed appartiene al cono di Staude relativo ad  $S$  ed al punto  $O$ .

L'asse  $a$  è permanente per  $S$  e la velocità angolare  $\omega$  è legata alla struttura del sistema della nota formula <sup>3)</sup>

$$(1) \quad \omega_2 = \frac{|OC|}{g}$$

ove  $C$  è il centro d'inerzia di  $a$  relativamente ad  $S$ .

Distinguiamo anche qui due casi:

a)  $\omega$  non è parallelo ad  $OQ$ . Il moto di  $S_2$  è rotatorio intorno ad  $a$ . Il sistema  $I_2^{(m)}$  delle forze d'inerzia di  $S_2$  è equivalente al vettore  $-m_2 \mathbf{a}_2$  applicato in  $A_2$  (antipolo di  $a$  relativamente ad  $S_2$ ), e ad una coppia della quale per ora basta tener presente che il suo momento  $\mu_2^{(m)}$  è parallelo ad  $\mathbf{a}_2$ .

Il sistema  $I_2^{(m)}$  è equilibrato dal peso  $m_2 \mathbf{g}_2$  e dalla reazione

---

<sup>3)</sup> Cfr. testo citato in 2) p. 328.

$\Phi_{12}$  che  $S_1$  esplica su  $S_2$  in  $Q$ . Si ha ovviamente

$$(2) \quad \Phi_{12} = m_2(\mathbf{a}_2 - \mathbf{g}).$$

Si consideri il sistema di riferimento solidale  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  con l'origine in  $Q$ , l'asse 2 orientato verso il basso, l'asse  $x$  incidente ad  $a$  e tale che il suo semiasse positivo non abbia punti in comune con  $a$ .

Siano  $x_{G_2}, y_{G_2}, z_{G_2}$ , ed  $x_{A_2}, y_{A_2}, z_{A_2}$  le coordinate di  $G_2$  ed  $A_2$  rispetto a questa terna.

La seconda equazione cardinale della dinamica porge

$$(3) \quad -QA_2 \wedge m_2\mathbf{a}_2 + QG_2 \wedge m_2\mathbf{g} + \mu_2^{(m)} = 0,$$

donde si ha

$$QA_2 \wedge m\mathbf{a}_2 \times \mathbf{k} = 0$$

e quindi  $QA_2, \mathbf{a}_2, \mathbf{k}$  sono complanari. Siccome  $\mathbf{a}_2$  è parallelo al vettore  $G_2G'_2$  ( $G'_2$  proiezione di  $G_2$  su  $a$ ) possiamo intanto concludere che  $QA_2, G_2G'_2, \mathbf{k}$  sono complanari. Essendo poi la retta  $G_2A_2$  incidente ad  $a$  ne segue che il piano  $xz$  contiene  $A_2, G_2, \mathbf{a}_2$  e risulta per la (3)

$$(4) \quad \mu_2^{(m)} = 0.$$

Ciò implica che l'asse  $a$  è permanente per  $S_2$  <sup>4)</sup>.

Si considerino il punto  $A_2'$  proiezione ortogonale di  $A_2$  sulla verticale per  $G_2$ , la retta  $r$  passante per  $A_2'$  e  $Q_1$  ed il punto  $O'$  che  $r$  ha in comune con  $a$ .

*Il sistema  $S_2$  si muove dello stesso moto rotatorio di cui potrebbe muoversi se se ne fosse fissato il punto  $O'$ . Le sue velocità angolare  $\omega$  dovrà quindi soddisfare alla relazione.*

$$(5) \quad \omega_2 = \frac{g}{|C_2O'|}$$

essendo  $C_2$  il centro d'inerzia di  $a$  relativamente ad  $S_2$ .

b)  $\omega$  sia parallelo ad  $OQ$ . Il moto di  $S_2$  è un moto intorno al punto fisso  $Q$ ,  $a$  risulta permanente per  $S_2$  come lo è per  $S$ .

---

<sup>4)</sup> Cfr. testo citato in <sup>2)</sup> p. 329.

Inoltre per l'uguaglianza delle velocità angolari dovrà risultare  $|CO| = |C_2Q|$ .

\* \* \*

In base alle considerazioni svolte qui sopra si può dire che *i due corpi possono muoversi rigidamente di moto rotatorio uniforme intorno ad un asse passante per  $O$ , allora e solo allora che siano soddisfatte le seguenti condizioni:*

- 1) *Esista una retta  $a$  per  $O$  che sia asse permanente per  $S$  e per  $S_2$ ;*
- 2) *I due punti  $G_2$ ,  $Q$  sono complanari con  $a$ ;*
- 3) *Vale l'uguaglianza  $|CO| = |C_2O'|$  ovvero l'altra  $|CO| = |C_2Q|$  a seconda che  $a$  non è, oppure è, parallelo ad  $OQ$ .*

OSSERVAZIONE III. — Con un ragionamento analogo a quello seguito sopra, si dimostra che *se  $\omega$  non è parallelo ad  $OQ$ , e  $G_1$  appartiene alla retta  $OQ$ , allora l'asse  $a$  è permanente anche per  $S_1$ .*

**3.** — Possono ora porsi varie questioni. La prima è la seguente. Prefissata la mutua posizione dei due corpi, prefissati  $O$  e  $Q$  esiste una retta  $a$  soddisfacente alle condizioni 1), 2), 3) del n. precedente?

È ovvio che in generale non si può dare risposta affermativa a tale quesito, almeno se la struttura di  $S$  non è del tutto particolare giacchè le 4 rette, che (in generale) hanno in comune i due coni di Staude relativi ad  $O$  di  $S$  e di  $S_2$ , non soddisferanno alle condizioni 2) e 3).

La seconda questione è la seguente. Prefissati  $O$  e  $Q$  si può orientare  $S_2$  rispetto ad  $S_1$  in maniera che esiste una almeno di tali rette  $a$ ?

Questo secondo problema ammette (in generale) ovviamente soluzioni, anzi (sempre in generale) ne ammette  $\infty^1$  giacchè i parametri a disposizione sono 3 (per esempio i 3 angoli di Eulero di una terna solidale con  $S_2$  rispetto ad una terna solidale con  $S_1$ ) e le condizioni cui deve soddisfare la retta  $a$  comune ai due coni di Staude sono solo due (le 2) e 3)).

Una discussione generale di tale problema è certamente

malagevole e forse è conveniente la via diretta attraverso le equazioni dinamiche del problema.

Nel prossimo numero ci poniamo un problema un po' più particolare che permette una discussione abbastanza semplice.

**4.** — Vogliamo ora vedere se prefissati  $O$  e  $Q$  sia possibile orientare  $S_2$  rispetto ad  $S_1$  in maniera tale che disposta la retta  $OQ$  verticalmente, sia possibile un moto rotatorio uniforme di insieme intorno alla retta  $OQ$ .

Siano  $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3$  i versori di una terna  $\mathcal{T}$  solidale con  $S_1$ , con l'origine in  $O$ ,  $\mathbf{c}_3$  sia il versore di  $OQ$  ed il piano  $O\mathbf{c}_2\mathbf{c}_3$  contenga  $O_1$ , se  $G_1$  non appartiene ad  $OQ$ , o sia qualunque, se  $G_1$  appartiene alla retta  $OQ$ .

Indicando com'è d'uso con  $A_1', B_1'$  due dei tre prodotti d'inerzia e con  $C_1$  il momento d'inerzia rispetto all'asse  $OQ$ , il momento della quantità di moto di  $S_1$  è dato da:

$$(6) \quad K_O^{(1)} = -(B_1'\mathbf{c}_1 + A_1'\mathbf{c}_2 - C_1\mathbf{c}_3)\omega,$$

e quindi si ha

$$(7) \quad \dot{K}_O^{(1)} = (A_1'\dot{\mathbf{c}}_1 - B_1'\dot{\mathbf{c}}_2)\omega^2.$$

Se si denota con  $y_{O_1}$  la seconda coordinata di  $G_1$  rispetto a  $\mathcal{T}$ , dalla seconda equazione cardinale della dinamica, applicata ad  $S_1$ , si ha

$$(8) \quad |(A_1'\dot{\mathbf{c}}_1 - B_1'\dot{\mathbf{c}}_2)\omega^2 + m_1gy_{G_1}\dot{\mathbf{c}}_1| = |lm_2\mathbf{a}_2|$$

dove abbiamo posto  $l = |OQ|$ .

Indicando con  $\delta_2$  la distanza di  $Q_2$  dall'asse  $a$  di rotazione, si ha da (8)

$$(9) \quad (A_1'^2 + B_1'^2 - l^2m_2^2\delta_2^2)\omega^4 + 2m_1gy_{G_1}A_1'\omega^2 + m_1g^2x_{G_1}^2 = 0.$$

Dalla (9) seguono intanto alcune condizioni necessarie affinché il problema abbia soluzioni. Intanto occorre che sia

$$(10) \quad B_1'^2 \leq l^2m_2^2\delta_2^2,$$

e quindi a maggior ragione

$$(11) \quad B_1'^2 \leq l_2^2|QO_2|^2,$$

ed inoltre che si verifichi una delle seguenti circostanze:

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{I. } y_{G_2} A_1' < 0 \\ \text{II. } y_{G_2} A_1' > 0, A_1'^2 + B_1'^2 - l^2 m_2^2 \delta_2^2 > 0. \end{array} \right.$$

Ricordiamo ora che la verticale per  $Q$  deve essere asse permanente per  $S_2$ , onde se denotiamo con  $A_2, B_2, C_2$  i momenti principali d'inerzia relativi a  $Q$  di  $S_2$  ed assumiamo come terna di riferimento,  $\mathcal{C}'$ , la terna principale relativa a  $Q$ , l'equazione del cono di Stande che fornisce tutti gli assi, di coseni  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ , passanti per  $Q$  che sono assi permanenti per  $S_2$  è

$$(13) \quad \begin{aligned} (B_2 - G_2)x_{G_2}\gamma_2\gamma_3 + (C_2 - A_2)y_{G_2}\gamma_3\gamma_1 + \\ + (A_2 - B_2)z_{G_2}\gamma_1\gamma_2 = 0 \end{aligned}$$

ove con  $x_{G_2}$  etc. abbiamo denotato le coordinate di  $G_2$  rispetto a  $\mathcal{C}'$ .

Inoltre è noto che ogni retta di coseni  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  rispetto a  $\mathcal{C}'$ , è asse di rotazione uniforme con velocità  $\omega$  espressa da

$$(14) \quad \omega^2 = \frac{P(\gamma_2 z_{G_2} - \gamma_3 y_{G_2})}{(B_2 - C_2)\gamma_2\gamma_3} = \frac{P(\gamma_3 x_{G_2} - \gamma_1 z_{G_2})}{(C_2 - A_2)\gamma_3\gamma_1} = \frac{P(\gamma_1 y_{G_2} - \gamma_1 x_{G_2})}{(A_2 - B_2)\gamma_1\gamma_2}$$

mentre si ha pure

$$(15) \quad \delta_2^2 = \gamma_1^2(y_{G_2}^2 + z_{G_2}^2) + \gamma_2^2(x_{G_2}^2 + z_{G_2}^2) + \gamma_3^2(x_{G_2}^2 + y_{G_2}^2).$$

Il problema è ricondotto quindi a determinare i coseni direttori  $\gamma_1\gamma_2\gamma_3$  in maniera da soddisfare alle (13) ed alle (9), tenuto conto di (14) e (15).

Una discussione dettagliata sarebbe lunga e laboriosa. Ci limitiamo ad osservare che le rette di  $S_2$  che godono di questa proprietà non possono superare il numero di 16, come intersezioni del cono quadrico (13) col cono dell'ottavo ordine quale risulta da (9), tenuto conto di (14) e (15), e della ovvia relazione  $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1$ .

Una volta determinata una di tali rette e la relativa velocità angolare si può sempre orientare  $S_2$  intorno ad essa, disposta verticalmente, in maniera da soddisfare non soltanto alla (8), ma all'equazione vettoriale da cui deriva, così che ri-



sultino quindi soddisfatte le equazioni dinamiche in relazione al moto rigido rotatorio.

La discussione precedente si semplifica notevolmente se  $G_1$  appartiene alla retta  $OQ$ .

In questo caso le equazioni cui devono soddisfare  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  sono la (13) e la seguente

$$(16) \quad \begin{aligned} & \gamma_1^2[A_1'^2 + B_1'^2 - m_2^2(y_{G_2}^2 + z_{G_2}^2)] + \\ & + \gamma_2^2[A_1'^2 + B_1'^2 - m_2^2(z_{G_2}^2 + x_{G_2}^2)] + \\ & + \gamma_3^2[A_1'^2 + B_1'^2 - m_2^2(x_{G_2}^2 + y_{G_2}^2)] = 0, \end{aligned}$$

oltre beninteso alla relazione  $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1$ .

Ci si riduce così a trovare l'intersezione di due coni quadrici (13 e (16)). Questi due coni quadrici hanno certamente qualche retta reale in comune, se il cono (16) è reale, cioè se i coefficienti di  $\gamma_1^2, \gamma_2^2, \gamma_3^2$  non hanno tutti lo stesso segno. Se ciò succede avremo sempre almeno due rette di  $S_2$  che possono essere assi permanenti tali da soddisfare alle condizioni imposte e ne potremo avere al più quattro. Disponendo  $S_2$  in maniera che una di queste 4 rette risulti verticale, orientando  $S_2$  intorno a tale retta in maniera opportuna rispetto ad  $S_1$ , ed imprimendo ad  $S$  una velocità data da (14),  $S$  si muove come un unico corpo rigido e di moto rotatorio uniforme.