RENDICONTI
*del*
SEMINARIO MATEMATICO
*della*
UNIVERSITÀ DI PADOVA

MARIO VOLPATO

**Sopra un problema al contorno per l'equazione differenziale** $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*, tome 22 (1953), p. 334-349

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1953__22__334_0>

# SOPRA UN PROBLEMA AL CONTORNO PER L'EQUAZIONE DIFFERENZIALE $y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$

*Nota* (*) *di* MARIO VOLPATO (*a Ferrara*)

In una Memoria S. CINQUINI [1]) ha stabilito, in ipotesi molto generali, due notevoli teoremi d'esistenza di almeno una soluzione per il problema al contorno

$$\begin{cases} y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \\ y(x_1) = c_1,\ y(x_2) = c_2,\ \ldots,\ y(x_n) = c_n . \end{cases}$$

Il primo di questi due criteri è stato successivamente esteso da G. ZWIRNER [2]); il risultato di quest'ultimo Autore, però, non comprende il secondo teorema di CINQUINI.

Mi sono proposto allora di vedere se era possibile trovare la sorgente comune dei risultati di ambedue gli Autori. Sono arrivato in tal modo a formulare (n. 1) una proposizione di carattere molto generale, particolarizzando la quale si otten-

---

(*) Pervenuta in Redazione il 6 Giugno 1953.

1) S. CINQUINI, *Problemi di valori al contorno per equazioni differenziali di ordine n*, Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, serie II, vol. IX, (1940), pagg. 61-77. Per altri criteri d'esistenza relativi allo stesso problema, contenuti, però, nei risultati di CINQUINI, si veda: R. CACCIOPPOLI, *Un teorema generale sull'esistenza di elementi uniti in una trasformazione funzionale*, Rendic. della Acc. dei Lincei, serie 6ª, vol. XI (1930), pagg. 794-799; *Sugli elementi uniti delle trasformazioni funzionali: un'osservazione sui problemi ai limiti*, ibidem, serie 6ª, vol. XII (1931), pagg. 498-502.

2) G. ZWIRNER, *Un criterio di esistenza relativo a un problema al contorno per una equazione differenziale ordinaria di ordine n*, Rendic. Acc. d'Italia, serie 7ª, vol. III (1942), fasc. VI, pagg. 217-222.

gono non solo i già citati criteri, ma anche altri nuovi teoremi d'esistenza di ampia portata, come mostrerò, a titolo di esempio, nel n. 3.

**1.** — TEOREMA I. - *Siano*: $f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$ *una funzione definita nello strato*

$$T : a \leq x \leq b \quad ; \quad |y^{(i)}| < +\infty , \ (i = 0, 1, ..., n-1; \ y^{(0)} = y) ,$$

*ivi ovunque finita, misurabile rispetto ad* $x$ *e continua rispetto a* $(y, y', ..., y^{(n-1)})$; $c_1, c_2, ..., c_n$, $n$ *numeri reali qualsiasi;* $x_1 < x_2 < ... < x_n$, $n$ *punti qualsiasi dell'intervallo* $(a, b)$ *e si consideri il problema*:

$$(1) \qquad \begin{cases} y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)}) \\ y(x_1) = c_1, \ y(x_2) = c_2, \ ..., \ y(x_n) = c_n . \end{cases}$$

*Indicato con* $G(x)$ *il polinomio di grado* $n-1$ *(al più) tale che* $G(x_i) = c_i$, $(i = 1, 2, ..., n)$, *supponiamo che*:

A) *in corrispondenza ad ogni numero reale positivo* $M$, $(M > 2|G^{(n-1)}|)$, *esistano due funzioni* $F_M(x, u)$, $\psi_M(x)$, — *la prima non negativa per* $a \leq x \leq b$, $|u| < +\infty$, *misurabile rispetto ad* $x$ *e continua rispetto ad* $u$, *la seconda non negativa e sommabile in* $(a, b)$ —, *vincolate dalla relazione*

$$(2) \qquad F_M(x, u) \leq \psi_M(x), \quad (a \leq x \leq b \ ; \ |u| < +\infty),$$

*e tali che per tutte le funzioni* $y(x)$, *assolutamente continue assieme alle loro prime* $n-1$ *derivate in* $(a, b)$, *che soddisfano alle condizioni*

$$(3) \qquad y(x_i) = G(x_i) , \qquad (i = 1, 2, ..., n),$$

$$(4) \qquad |y^{(i)}(x) - G^{(i)}(x)| \leq \frac{(b-a)^{n-i-1}}{(n-i-1)!} M ,$$

$$(i = 0, 1, ..., n-1 \ ; \ y^{(0)}(x) = y(x) ; \ G^{(0)}(x) = G(x)),$$

*e, quasi ovunque in* $(a, b)$, *alla*

$$(5) \qquad |y^{(n)}(x)| \leq |f(x, y(x), y'(x), ..., y^{(n-1)}(x))| ,$$

*si abbia*

$$(6) \qquad |f(x, y(x), y'(x), ..., y^{(n-1)}(x))| \leq F_M(x, y^{(n-1)}(x)) ;$$

AA) *esistano tre numeri reali* $h$, $a_1$, $a_2$, *verificanti le limitazioni*

(7) $h > 0$ ; $-M + G^{(n-1)} < a_1 \leq G^{(n-1)} \leq a_2 < M + G^{(n-1)}$,

*e due funzioni* $\omega_1(x, u)$, $\omega_2(x, u)$, *continue per* $a \leq x \leq b$ *e* $|u| < +\infty$, *tali che detta* $\Gamma$ *la classe degli archi di curva* $\gamma$ *rettificabili, di equazione del tipo* $u = u(x)$ *contenuti o nel rettangolo*

$$R_1: \quad a \leq x \leq b \quad ; \quad -M + G^{(n-1)} \leq u \leq a_1 ,$$

*oppure nel rettangolo*

$$R_2: \quad a \leq x \leq b \quad ; \quad a_2 \leq u \leq M + G^{(n-1)},$$

*e aventi gli estremi, e solo questi, situati sui due lati opposti, paralleli all'asse* $x$, *di detti rettangoli, si abbia, almeno per* $M$ *sufficientemente grande*:

$$\left| \int_\gamma \omega_1(x, u)dx + \omega_2(x, u)du \right| \geq h \; ; \tag{8}$$

AAA) *posto*

$$\int_a^b \psi_M(x)dx = K_M ,$$

*detto* $Z$ *l'insieme delle funzioni* $z(x)$ *assolutamente continue con le loro prime* $n-1$ *derivate in* $(a, b)$, *soddisfacenti alle condizioni*

$$z(x_i) = G(x_i) , \qquad (i = 1, 2, ..., n), \tag{9}$$

$$|z^{(i)}(x) - G^{(i)}(x)| \leq \frac{(b-a)^{n-i-1}}{(n-i-1)!} K_M , \tag{10}$$

$$(i = 0, 1, ..., n-1 ; \quad z^{(0)}(x) = z(x) ; \quad G^{(0)}(x) = G(x)),$$

*e, quasi ovunque in* $(a, b)$ *le*

$$|z^{(n)}(x)| \leq \begin{cases} |f(x, z(x), z'(x), ..., z^{(n-1)}(x))| , \\ F_M(x, z^{(n-1)}(x)) , \end{cases} \tag{11}$$

*e indicata con* $\Sigma$ *la classe degli archi di curva* $\sigma$ *di equazione*

*$u = z^{(n-1)}(x)$, con $z(x)$ appartenente a $Z$, contenuti o in*

$$S_1: \quad a \leq x \leq b\,; \quad -\infty < u \leq a_1$$

*oppure in*

$$S_2: \quad a \leq x \leq b\,; \quad a_2 \leq u < +\infty\,,$$

*e aventi un solo estremo sulla retta $u = a_1$, oppure sulla retta $u = a_2$, risulti*

$$\left| \int_\sigma \omega_1(x,\ u)dx + \omega_2(x,\ u)du \right| < h\,. \tag{12}$$

*In tali ipotesi esiste almeno una funzione $y_0(x)$, assolutamente continua assieme alle sue prime $n-1$ derivate in $(a,\ b)$, soddisfacente al problema* (1).

Consideriamo la seguente funzione

$$\Phi(x,\ y,\ y',\ \ldots,\ y^{(n-1)}) =$$
$$= \begin{cases} f(x,\ y,\ y',\ \ldots,\ y^{(n-1)}) & \text{quando } |f(x,\ y,\ y',\ \ldots,\ y^{(n-1)})| \leq \\ & \leq F_M(x,\ y^{(n-1)})\,, \\ F_M(x,\ y^{(n-1)})\,, & \text{quando } f(x,\ y,\ y',\ \ldots,\ y^{(n-1)}) > \\ & > F_M(x,\ y^{(n-1)})\,, \\ -F_M(x,\ y^{(n-1)})\,, & \text{quando } f(x,\ y,\ y',\ \ldots,\ y^{(n-1)}) < - \\ & - F_M(x,\ y^{(n-1)})\,, \end{cases}$$

la quale, nello strato $T$, risulta, evidentemente, misurabile rispetto ad $x$, continua rispetto a $(y,\ y',\ \ldots,\ y^{(n-1)})$ e soddisfacente ivi alle disuguaglianze

$$|\Phi(x,\ y,\ y',\ \ldots,\ y^{(n-1)})| \leq \begin{cases} |f(x,\ y,\ y',\ \ldots,\ y^{(n-1)})| \\ F_M(x,\ y^{(n-1)})\,, \\ \psi_M(x)\,. \end{cases} \tag{13}$$

È noto allora che esiste almeno una funzione $Y(x)$, assolutamente continua assieme alle sue prime $n-1$ derivate in $(a,\ b)$, per la quale si ha

$$Y(x_i) = G(x_i)\,, \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{14}$$

e, quasi ovunque in $(a, b)$,

$$Y^{(n)}(x) = \Phi(x, Y(x), Y'(x), \ldots, Y^{(n-1)}(x)). \tag{15}$$

Di qui e dalle (13) seguono allora le relazioni

$$|Y^{(n)}(x)| \leq \begin{cases} |f(x, Y(x), Y'(x), \ldots, Y^{(n-1)}(x))|, \\ F_M(x, Y^{(n-1)}(x)), \\ \psi_M(x), \end{cases} \tag{16}$$

soddisfatte, naturalmente, quasi ovunque in $(a, b)$.

Inoltre, essendovi, per le (14), almeno un punto $x_0$, interno ad $(a, b)$, ove

$$Y^{(n-1)}(x_0) = G^{(n-1)}, \tag{17}$$

ed essendo

$$\int_a^b \psi_M(x)dx = K_M,$$

integrando da $x_0$ ad $x$ $(a \leq x \leq b)$ l'ultima delle (16), segue

$$|Y^{(n-1)}(x) - G^{(n-1)}| \leq K_M$$

e quindi, per un noto lemma di analisi [3]), risulta

$$|Y^{(i)}(x) - G^{(i)}(x)| \leq \frac{(b-a)^{n-i-1}}{(n-i-1)!} \tag{18}$$

$$(i = 0, 1, \ldots, n-1; \; Y^{(0)}(x); \; G^{(0)}(x) = G(x)).$$

Dimostriamo ora che in ogni punto di $(a, b)$ sussiste la disuguaglianza

$$|Y^{(n-1)}(x) - G^{(n-1)}| \leq M. \tag{19}$$

Infatti, se vi fosse un punto $\bar{x}_0$ di $(a, b)$ in cui risulta

$$|Y^{(n-1)}(\bar{x}_0) - G^{(n-1)}| > M,$$

ricordate le (7) e (17) e il fatto che $M > 2\,|G^{(n-1)}|$, si po-

---

3) Cfr. F. SEVERI e G. SCORZA DRAGONI, *Lezioni di analisi*, Zanichelli, Bologna, $II_1$, n. 57.

trebbe determinare un sottointervallo $(\alpha, \beta)$ di $(a, b)$ per il quale si avrebbe

$$(20) \begin{cases} Y^{(n-1)}(\alpha) = a_2 \\ Y^{(n-1)}(\beta) = M + G^{(n-1)} \\ a_2 < Y^{(n-1)}(x) < M + G^{(n-1)}, \text{ per ogni } x \text{ interno ad } (\alpha, \beta), \end{cases}$$

oppure

$$(21) \begin{cases} Y^{(n-1)}(\alpha) = a_1 \\ Y^{(n-1)}(\beta) = -M + G^{(n-1)} \\ -M + G^{(n-1)} < Y^{(n-1)}(x) < a_1; \text{ per ogni } x \text{ interno ad } (\alpha, \beta), \end{cases}$$

a seconda che in $\bar{x}_0$ risulta

$$Y^{(n-1)}(\bar{x}_0) - G^{(n-1)} > M\,, \text{ oppure } Y^{(n-1)}(\bar{x}_0) - G^{(n-1)} < -M\,.$$

Allora detto $\rho$ l'arco di curva di equazione $u = Y^{(n-1)}(x)$ e di intervallo base $(\alpha, \beta)$, si avrebbe che $\rho$ appartiene alla classe $\Gamma$. Ma in virtù delle (14), (16), (18), (20) oppure (21), l'arco $\rho$ appartiene pure alla classe $\Sigma$.

Quindi, per le ipotesi AA) e AAA), dovrebbero valere simultaneamente le disuguaglianze:

$$\left|\int_\rho \omega_1(x, u)dx + \omega_2(x, u)du\right| \geq h\,, \quad \left|\int_\rho \omega_1(x, u)dx + \omega_2(x, u)du\right| < h\,,$$

il che è assurdo. Pertanto sussiste la (19). Da questa, per il citato lemma, segue

$$|Y^{(i)}(x) - G^{(i)}| \leq \frac{(b-a)^{n-i-1}}{(n-i-1)!} M, \; (i = 0, 1, ..., n-1),$$

e allora, ricordate le (14) e la prima delle (16), per l'ipotesi A), segue che in tutto $(a, b)$ risulta

$$|f(x, Y(x), Y'(x), ..., Y^{(n-1)}(x))| \leq F_M(x, Y^{(n-1)}(x))\,.$$

Di qui, ricordato il modo col quale è stata definita la funzione $\Phi(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$, segue che $Y(x)$ è pure soluzione del problema (1). Il nostro teorema è pertanto dimostrato.

**2.** — Proviamo ora che il criterio d'esistenza di ZWIRNER e il secondo di CINQUINI rientrano nel nostro Teorema I.

Il teorema di ZWIRNER si può formulare nel seguente modo:

*Il problema* (1) *ammette almeno una soluzione assolutamente continua assieme alle sue prime* $n-1$ *derivate in* $(a, b)$ *se:*

B) *in corrispondenza ad ogni numero reale positivo* $M$, *esiste una funzione* $\varphi_M(x)$, *sommabile in* $(a, b)$, *tale che in tutto il campo* [4])

$$T_M: \quad a \leq x \leq b\,; \ |y^{(i)} - G^{(i)}(x)| \leq \frac{(b-a)^{n-i-1}}{(n-i-1)!} M$$

$$(i = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1\,;\ \ y^{(0)} = y\,;\ G^{(0)}(x) = G(x)\,,$$

*risulti*

$$|f(x,\ y,\ y',\ \ldots,\ y^{(n-1)})| \leq \varphi_M(x) M\ ; \tag{22}$$

BB) *almeno per M abbastanza grande, risulta*

$$\int_b^a \varphi_M(x) dx < 1\,. \tag{23}$$

È ovvio che l'ipotesi B) soddisfa ampiamente la nostra ipotesi A) non appena ivi si assuma

$$F_M(x,\ u) = \psi_M(x) = \varphi_M(x) M \tag{24}$$

Proviamo che sono pure soddisfatte le ipotesi AA) e AAA) assumendo ivi

$$\omega_1(x,\ u) = 0 \ \ ; \ \ \omega_2(x,\ u) = 1 \ \ ; \ \ a_1 = a_2 = G^{(n-1)} \ \ ; \ \ h = M\,.$$

Infatti, per quanto riguarda gli archi $\gamma$ della classe $\Gamma$ si ha:

$$\left| \int_\gamma \omega_1(x,\ u) dx + \omega_2(x,\ u) du \right| = \left| \int_\gamma du \right| =$$
$$= |(\pm M + G^{(n-1)}) - G^{(n-1)}| = M\,,$$

---

[4]) Con $G(x)$ in intende sempre il polinomio di grado $n-1$ al più tale che $G(x_i) = c_i$, $(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$.

cioè è soddisfatta la (8). Per quanto riguarda gli archi $\sigma$ della classe $\Sigma$, ricordando in particolare le (11) e le posizioni (24), possiamo dire che

$$\left|\int_\sigma \omega_1(x,\ u)dx + \omega_2(x,\ u)du\right| = \left|\int_\sigma du\right| \leq \int_a^b |z^{(n)}(x)|\,dx \leq$$
$$\leq \int_a^b \varphi_M'(x)dx\,.$$

Ma allora, per la (23), risulta

$$\left|\int_\sigma \omega_1(x,\ u)dx + \omega_2(x,\ u)du\right| < M\,,$$

ossia è soddisfatta la (12). Le nostre ipotesi AA) e AAA) sono dunque soddisfatte.

Passiamo al secondo teorema di CINQUINI. Tale teorema si può enunciare nel seguente modo:

*Il problema* (1) *ammette almeno una soluzione assolutamente continua assieme alle sue prime* $n-1$ *derivate in* $(a,\ b)$ *se*:

C) *in corrispondenza ad ogni numero* $\lambda^* > 0$, *esiste una funzione* $\psi_*(x)$, *sommabile in* $(a,\ b)$, *tale che in tutto il campo*

$$T^*:\ a \leq x \leq b\quad;\quad |y^{(i)}| \leq \lambda^*\quad,\quad (i = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1;\ y^{(0)} = y),$$

*sia*

$$|f(x,\ y,\ y',\ \ldots,\ y^{(n-1)})| \leq \psi_*(x)\ ; \tag{25}$$

CC) *esistono* $n+2$ *funzioni non negative* $\gamma_1(u),\ \gamma_2(u),\ \ldots,\ \gamma_{(n-1)}(u),\ \psi_1(x),\ \varphi(v),\ \varphi_1(v)$ *di cui le prime* $n-1$ *siano sommabili nell'intervallo* $(-\infty,\ +\infty)$, $\psi_1(x)$ *sommabile sull'intervallo* $(a,\ b)$, $\varphi(v)$ e $\varphi_1(v)$ *continue in* $(-\infty, +\infty)$, *con* $\varphi(v) > 0$ *e tali che esista un numero* $k_1 > 0$, *per il quale si abbia*

$$|\,v\,|\,\varphi_1(v) \leq k_1\varphi(v)\,, \tag{26}$$

*e che sia*

$$\int_0^{+\infty} \frac{v}{\varphi(v)}\,v = +\infty\,,\quad \int_{-\infty}^0 \frac{v}{\varphi(v)}\,dv = -\infty\,, \tag{27}$$

*in modo che in tutto il campo*

$T: a \leq x \leq b \quad ; \quad |y^{(i)}| < +\infty, \quad (i = 0, 1, \ldots, n-1;\ y^{(o)} = y),$

*risulti*

$$(28) \qquad |f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})| \leq \gamma_1(y^{(n-2)})\varphi(y^{(n-1)}) + \\ + [\gamma_2(y^{(n-3)})|y^{(n-2)}| + \ldots + \gamma_1(y)|y'| + \psi_1(x)]\varphi_1(y^{(n-1)}).$$

Osservato che ad ogni numero $M > 0$ si può associare un conveniente $\lambda^* > 0$ tale che il campo

$$T_M: \quad a < x \leq b; \quad |y^{(i)} - G^{(i)}(x)| \leq \frac{(b-a)^{n-i-1}}{(n-i-1)!} M,$$

$$(i = 0, 1, \ldots, n-1; \quad y^{(0)} = y; \quad G^{(0)}(x) = G(x)),$$

sia contenuto nel campo $T^*$, è ovvio che l'ipotesi C) soddisfa ampiamente la nostra ipotesi A) non appena ivi si assuma

$$F_M(x, u) = \psi_M(x) = \psi_*(x).$$

Proviamo allora che sono pure soddisfatte le nostre ipotesi AA) e AAA) qualora si assuma:

$$\omega_1(x, u) = 0; \quad \omega_2(x, u) = \frac{u}{\varphi(u)}; \quad a_1 = -|G^{(n-1)}|; \quad a_2 = |G^{(n-1)}|;$$

e

$$(29) \qquad h > \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma_1(u)du + k_1\Big[\int_{-\infty}^{+\infty} \Big\{ 2\gamma_2(u) + 3\gamma_3(u) + \ldots + \\ + (n-1)\gamma_{n-1}(u) \Big\} du + \int_a^b |\psi_1(x)|\, dx\Big].$$

Infatti, per quanto riguarda gli archi $\gamma$ della classe $\Gamma$, nel caso attuale, si ha:

$$\left|\int_\gamma \omega_1(x, u)dx + \omega_2(x, u)du\right| = \left|\int_\gamma \frac{u}{\varphi(u)}\, du\right| = \left|\int_{\pm|G^{(n-1)}|}^{\pm M + G^{(n-1)}} \frac{u}{\varphi(u)}\, du\right|,$$

ove valgono contemporaneamente i segni $+$ o i segni $-$.

Allora, ricordate le (27), è evidente che, per $M$ sufficientemente grande, risulta, in ogni caso, soddisfatta la (8).

Per quanto riguarda gli archi $\sigma$ della classe $\Sigma$, osserviamo intanto che l'ipotesi CC), in particolare la (28) e la (26), porge la disuguaglianza:

$$\frac{z^{(n)}(x)z^{(n-1)}(x)}{\varphi(z^{(n-1)}(x))} \leq \gamma_1(z^{(n-2)}(x))|z^{(n-1)}(x)| +$$
$$+ k_1[\gamma_2(z^{(n-3)}(x))|z^{(n-2)}(x)| + \ldots + \gamma_{n-1}(z(x))|z'(x)| + \psi_1(x)]\,,$$

quasi ovunque in $(a, b)$; quindi, detto $(\alpha, \beta)$ l'intervallo base di un arco $\sigma$, risulta

$$(30)\qquad \left|\int_\sigma \omega_1(x, u)dx + \omega_2(x, u)du\right| = \left|\int_\sigma \frac{u}{\varphi(u)}du\right| =$$
$$= \left|\int_\alpha^\beta \frac{z^{(n)}(x)z^{(n-1)}(x)}{\varphi(z^{(n-1)}(x))}dx\right| \leq \left|\int_\alpha^\beta \gamma_1(z^{(n-2)}(x))|z^{(n-1)}(x)|dx\right| +$$
$$+ k_1\left|\int_\alpha^\beta \left\{ \gamma_2(z^{(n-3)}(x))|z^{(n-2)}(x)| + \ldots + \gamma_{n-1}(z(x))|z'(x)| + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \psi_1(x) \right\} dx\right|.$$

Ora, avendo assunto nel caso attuale $a_1 = -|G^{(n-1)}|$ e $a_2 = |G^{(n-1)}|$, segue che ogni arco $\sigma$ è tale per cui valgono le relazioni:

$$-\infty < z^{(n-1)}(x) \leq -|G^{(n-1)}|,$$

oppure

$$|G^{(n-1)}| \leq z^{(n-1)}(x) < +\infty.$$

Pertanto, in $(\alpha, \beta)$, $z^{(n-2)}(x)$ cambia segno al più una volta, $z^{(n-3)}(x)$ al più due volte, ..., $z'(x)$ al più $n-2$ volte e quindi, in virtù di un noto teorema sul cambiamento di variabile in un integrale definito, si vede che l'ultimo membro della (30) è maggiorato, in senso stretto, da un qualsiasi numero $h$ che soddisfa la (29). È quindi verificata la (12) e pertanto le nostre ipotesi AA) e AAA) sono ancora soddisfatte.

**3.** — Come abbiamo fatto cenno nell'introduzione, indichiamo ora un nuovo criterio d'esistenza, deducibile, anche questo, dal Teorema I. Eccone il testo:

*Il problema* (1) *ammette almeno una soluzione assolutamente continua assieme alle sue prime* $(n-1)$ *derivate in* $(a, b)$ *se:*

D) *in corrispondenza ad ogni numero reale e positivo* $M$, $(M > 2\,|\,G^{(n-1)}|)$, $G(x)$ *essendo il polinomio di grado* $n-1$ *al più tale* $G(x_i) = c_i$, $(i = 1, 2, ..., n)$, *esistono due funzioni* $F_M(x, u)$, $\psi_M(x)$, *la prima non negativa per ogni* $x$ *di* $(a, b)$ *e* $|u| < +\infty$, *misurabile rispetto ad* $x$ *e continua rispetto ad* $u$, *la seconda non negativa e sommabile in* $(a, b)$, *vincolate dalla relazione*

$$F_M(x, u) \leq \psi_M(x)\,, \qquad (a \leq x \leq b\,;\ |u| < +\infty), \tag{31}$$

*e tali che in tutto il campo*

$$T_M:\quad a \leq x \leq b\,,\quad |y^{(i)} - G^{(i)}(x)| \leq \frac{(b-a)^{n-i-1}}{(n-i-1)\,!}\,M\,,$$

$$(i = 0, 1, ..., n-1;\ y^{(o)} = y;\ G^{(o)}(x) = G(x)),$$

*si abbia*

$$|\,f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})\,| \leq F_M(x, y^{(n-1)})\,; \tag{32}$$

DD) *detto* $\xi$ *un punto qualsiasi interno ad* $(a, b)$, *gli integrali delle equazioni*

$$u(x) = G^{(n-1)} \pm \int_\xi^x F_M(t, u(t))dt\,, \tag{33}$$

*soddisfano, per ogni* $x$ *di* $(a, b)$, *la disuguaglianza:*

$$|u(x) - G^{(n-1)}| < M\,. \tag{34}$$

Poichè è evidente che l'ipotesi D) è più restrittiva della ipotesi A), proviamo senz'altro che anche le ipotesi AA) e AAA) sono soddisfatte assumendo ivi

$$\omega_1(x, u) = 0\ ;\ \omega_2(x, u) = 1\ ;\ a_1 = a_2 = G^{(n-1)}\ ;\ h = M\,.$$

Per quanto riguarda gli archi $\gamma$ della classe $\Gamma$, nel caso attuale, si ha:

$$\left|\int_\gamma \omega_1(x,\ u)dx + \omega_2(x,\ u)du\right| = \left|\int_\gamma du\right| = \left|(\pm M + G^{(n-1)}) - \right.$$
$$\left. - G^{(n-1)}\right| = M\,,$$

quindi è soddisfatta la (8). Per quanto riguarda gli archi $\sigma$ della classe $\Sigma$, osserviamo che, detto $(\alpha,\ \beta)$ $(\alpha < \beta)$ l'intervallo base di un tale arco, si possono presentare, nel caso attuale (in cui $a_1 = a_2 = G^{(n-1)}$) i seguenti quattro casi:

I) $z^{(n-1)}(\alpha) = G^{(n-1)}$ e $z^{(n-1)}(x) > G^{(n-1)}$ per $\alpha < x \leq \beta$ ;
II) $z^{(n-1)}(\beta) = G^{(n-1)}$ e $z^{(n-1)}(x) > G^{(n-1)}$ per $\alpha \leq x < \beta$ ;
III) $z^{(n-1)}(\alpha) = G^{(n-1)}$ e $z^{(n-1)}(x) < G^{(n-1)}$ per $\alpha < x \leq \beta$ ;
IV) $z^{(n-1)}(\beta) = G^{(n-1)}$ e $z^{(n-1)}(x) < G^{(n-1)}$ per $\alpha \leq x < \beta$ ;

Ebbene, ricordato che, per la (11), è

$$|z^{(n)}(x)| \leq F_M(x,\ z^{(n-1)}(x))\,, \tag{35}$$

dimostriamo che in ogni caso l'ipotesi DD) consente di verificare che è soddisfatta la (12). Nel I) caso, consideriamo l'equazione

$$u(x) = G^{(n-1)} + \int_\alpha^x F_M(t,\ u(t))dt\,, \qquad \alpha \leq x \leq \beta\,,$$

e, indicato con $\bar{u}_d(x)$ il suo integrale superiore destro, osserviamo che per la (34) risulta

$$\bar{u}_d(x) < M + G^{(n-1)}\,. \tag{36}$$

Ora, essendo $z^{(n)}(x) \leq F_M(x,\ z^{(n-1)})(x))$ e $z^{(n-1)}(\alpha) =$ $= G^{(n-1)}$, per un noto criterio di confronto [5]) si ha

$$z^{(n-1)}(x) \leq \bar{u}_d(x)\,, \qquad (\alpha \leq x \leq \beta)\,.$$

Di qui e dalla (36) segue:

$$\left|\int_\sigma \omega_1(x,\ u)dx + \omega_2(x,\ u)du\right| = \left|\int_\sigma du\right| = \left|\int_\alpha^\beta z^{(n)}(x)dx\right| =$$
$$= z^{(n-1)}(\beta) - G^{(n-1)} < M\,,$$

---

[5]) Cfr. F. CAFIERO, *Sui teoremi di unicità relativi ad un'equazione differenziale ordinaria del primo ordine*, Giornale di Matematiche di Battaglini, vol. 78 (1948-49), pagg. 10-41, § 1, n. 3.

cioè è soddisfatta la (12). Nel II) caso basta considerare la equazione

$$u(x) = G^{(n-1)} - \int_{\beta}^{x} F_M(t,\ u(t))dt\,, \qquad \alpha \leq x \leq \beta\,,$$

col suo integrale superiore sinistro, nel III) caso l'equazione

$$u(x) = G^{(n-1)} - \int_{\alpha}^{x} F_M(t,\ u(t))dt\,, \qquad \alpha \leq x \leq \beta\,,$$

col suo integrale inferiore destro, nel IV) caso l'equazione

$$u(x) = G^{(n-1)} + \int_{\beta}^{x} F_M(t,\ u(t))dt\,, \qquad \alpha \leq x \leq \beta\,,$$

col suo integrale superiore sinistro e ripetere un ragionamento analogo a quello del I) caso.

OSSERVAZIONE. — Ponendo, nel criterio ora dimostrato, $F_M(x, u) = \varphi_M(x)M$, l'ipotesi DD) richiede che sia $\int_b^a \varphi_M(x)dx <$ $< 1$. Si ottiene così il teorema di ZWIRNER.

ESEMPIO: Applichiamo il nostro criterio a un esempio concreto già preso in considerazione da CINQUINI e ZWIRNER e avremo una riprova della sua generalità.

Posto

$$f(x,\ y,\ y',\ y'') = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} \sqrt{y^2 + y'^2 + y''^2} & , \quad \text{per } x \neq 0\,, \\ 0 & , \quad \text{per } x = 0\,, \end{cases}$$

il problema

$$y''' = f(x,\ y,\ y',\ y'')$$

$$y(o) = c_1 \quad , \quad y(x_1) = c_2 \quad , \quad y(x_2) = c_3,$$

a norma del criterio di CINQUINI, ammette almeno una soluzione se

$$0 < x_1 < x_2 < K_1,$$

ove $K_1$ è un numero positivo definito dall'equazione:

$$\left(\frac{K_1^2}{2}+K_1+1\right)\int_0^{K_1}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}=1,$$

invece, a norma del criterio di ZWIRNER, il problema è risolubile se

$$0<x_1<x_2<K_2,$$

ove $K_2$ è definito dall'equazione:

$$\sqrt{\frac{K_2^4}{4}+K_2^2+1}\int_0^{K_2}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}=1.$$

Applicando invece il nostro criterio, si può affermare la risolubilità del problema se

$$0<x_1<x_2<K_3,$$

ove $K_3$ è definito dall'equazione:

$$\sqrt{\frac{K_3^4}{4}+K_3^2}\,\operatorname{sen}h\left(\frac{3}{2}K_3^{\frac{2}{3}}\right)=1. \tag{37}$$

Infatti se $0<K<K_3$, nella regione:

$$0\leq x\leq K;\ |y-G(x)|\leq\frac{K^2}{2}M;\ |y'-G'(x)|\leq KM;\ |y''-G''|\leq M,$$

ove è evidente il significato di $G(x)$, risulta:

$$|f(x,\ y,\ y',\ y'')|\leq\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\sqrt{\left(\frac{K^4}{4}+K^2+N\right)M^2+y''^2},$$

con

$$N=\frac{G^2(x)+G'^2(x)}{M^2}+\frac{K^2|G(x)|}{M}+\frac{2K|G'(x)|}{M},$$

piccolo quanto si vuole per $M$ sufficientemente grande.

In questo caso si può allora assumere:

$$F_M(x,\ u)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\sqrt{\left(\dfrac{K^4}{4}+K^2+N\right)M^2+u^2}, & \text{per } |u|\leq M,\\[2ex] \dfrac{M}{\sqrt[3]{x}}\sqrt{\dfrac{K^4}{4}+K^2+N+1}, & \text{per } |u|\geq M,\end{cases}$$

e

$$\psi_M(x) = \frac{M}{\sqrt[3]{x}} \sqrt{\frac{K^4}{4} + K^2 + N + 1}\,.$$

Ora, detto $\xi$ un punto qualsiasi interno a $(0, K)$ e posto, per brevità,

$$R = \sqrt{\left(\frac{K^4}{4} + K^2 + N\right) M^2}\,,$$

con calcoli elementari, si trova che le soluzioni dell'equazione

$$u(x) = G'' + \int_{\xi}^{x} \frac{1}{\sqrt[3]{t}} \sqrt{R^2 + u^2(t)}\,dt$$

sono:

$$u(x) = R\left\{\left(\frac{C}{2R} - \frac{R}{2C}\right) e^{\frac{3}{2}(x^{\frac{2}{3}} - \xi^{\frac{2}{3}})} + \frac{1}{\frac{C}{R}} \operatorname{sen} h\left[\frac{3}{2}(x^{\frac{2}{3}} - \xi^{\frac{2}{3}}\right]\right\},$$

con

$$\frac{C}{R} = \frac{G''}{R} \mp \sqrt{\left(\frac{G''}{R}\right)^2 + 1}\,,$$

e che le soluzioni dell'equazione

$$u(x) = G'' - \int_{\xi}^{x} \frac{1}{\sqrt[3]{t}} \sqrt{R^2 + u^2(t)}\,dt$$

si ottengono da quelle della precedente mutando segno al binomio $(x^{\frac{2}{3}} - \xi^{\frac{2}{3}})$.

Ora osserviamo che l'ipotesi DD) è soddisfatta non appena sia $|u(x)| < M - |G''|$, cioè quando

$$(38) \qquad \sqrt{\frac{K^4}{4} + K^2 + N}\left|\left(\frac{C}{2R} - \frac{R}{2C}\right) e^{\frac{3}{2}(x^{\frac{2}{3}} - \xi^{\frac{2}{3}})} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\frac{C}{R}} \operatorname{sen} h\left[\frac{3}{2}(x^{\frac{2}{3}} - \xi^{\frac{2}{3}})\right]\right| < 1 - \frac{|G''|}{M}\,.$$

Ciò nel fatto è vero per $M$ sufficientemente grande, perchè per $M \to \infty$ segue che $R \to \infty$, $\frac{C}{R} \to \pm 1$, $\left(\frac{C}{2R} - \frac{R}{2C}\right) \to 0$ e quindi, i due membri della (38) tendono a delle espressioni che, in grazia della (37), soddisfano la disuguglianza indicata in (38).

È facile provare che $K_1 < K_2 < K_3$. Per esempio si verifica subito che $K_2 < \frac{1}{2}$ e che $K_3 > \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}} > \frac{1}{2}$.