Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova

Luigi Caprioli

Sul comportamento dei modi TEM nei cavi coassiali in presenza di lieve eterogeneità del dielettrico

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 22 (1953), p. 354-365

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1953__22__354_0>

SUL COMPORTAMENTO DEI MODI TEM NEI CAVI COASSIALI IN PRESENZA DI LIEVE ETEROGENEITÀ DEL DIELETTRICO

Nota (*) *di* LUIGI CAPRIOLI (*a Bologna*)

Introduzione. - In una guida d'onda cilindrica, con sezione normale σ non semplicemente connessa e con dielettrico omogeneo di costante dielettrica ε_c e permeabilità μ, può propagarsi [1]), con velocità $V_C = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_c \mu}}$ (uguale a quella delle onde libere nello stesso mezzo), un modo TEM armonico, di pulsazione ω; i vettori (complessi) del campo sono:

$$\boldsymbol{E}_c = \boldsymbol{E}_c(x, y)e^{i\beta_c z},$$
$$\boldsymbol{H}_c = \boldsymbol{H}_c(x, y)e^{i\beta_c z} \quad ^{2)},$$

dove è

$$\beta_c = \frac{\omega}{V_c} = \omega\sqrt{\varepsilon_c \mu} \tag{1}$$

ed x, y, z sono coordinate cartesiane ortogonali con asse z (di versore $\boldsymbol{k}$) parallelo alle generatrici della guida.

Essendo il campo del tipo TEM, entrambi i vettori $\boldsymbol{E}_C$, $\boldsymbol{H}_C$ sono trasversali; dalle equazioni di Maxwell segue poi che, detta U_C una funzione armonica, monodroma dei punti di σ,

---

(*) Pervenuta in Redazione il 9 luglio 1953.

1) Cfr. S. A. SCHELKUNOFF, *Electromagnetic Waves* (Van Nostrand, New York, 1944, Cap. 8.

2) È omesso qui, come di consueto, il fattore temporale $e^{i\omega t}$.

si ha

$$\boldsymbol{E}_c = -\operatorname{grad} U_c \tag{2}$$

ed anche

$$\boldsymbol{H}_c = \sqrt{\frac{\varepsilon_c}{\mu}}\, \boldsymbol{E}_c \wedge \boldsymbol{k} \;{}^{3)}, \tag{3}$$

$$\Delta \boldsymbol{H}_c = 0\,. \tag{4}$$

Ora, come è stato mostrato in un precedente lavoro [4]), i modi TEM non possono più sussistere nella guida, se il dielettrico che la occupa non è omogeneo. Può pertanto ritenersi non privo di interesse, anche dal punto di vista pratico, il proporsi di vedere se e come venga a modificarsi il modo TEM che ha sede nella guida con dielettrico omogeneo, quando si manifesti una lieve eterogeneità nel dielettrico stesso.

In ordine a ciò, in questa Nota si suppone il mezzo « lievemente » eterogeneo, e cioè che la costante dielettrica ε, ammessa uniforme su ogni retta parallela all'asse z, sia poco diversa da ε_c nei punti di una generica sezione normale della guida, mentre è ovunque uniforme la permeabilità μ; e si determina una relazione molto semplice che esprime, per una guida qualunque, l'alterazione della velocità di propagazione del campo, conseguente alla citata eterogeneità del mezzo. Si trova, inoltre, che tale velocità può esprimersi, con formola analoga a quella relativa al mezzo omogeneo, in funzione di un opportuno valore medio della ε nel dominio σ.

E si prova, infine, che la citata eterogeneità non fa sorgere alcuna frequenza critica; cioè, che possono ancora propagarsi, nella guida, onde e.m. di frequenza qualunque.

Poichè il calcolo (non semplice, invero, almeno ad un primo esame) del campo elettromagnetico modificato dalla eterogeneità del mezzo in una guida a sezione qualunque non è, molto presumibilmente, di grande interesse tecnico, ci si è

---

[3]) Cfr. S. A. SCHELKUNOFF, *op. cit.*, Cap. 10.

[4]) *Onde elettromagnetiche di tipo trasversale nelle guide d'onda rettilinee con dielettrico eterogeneo.* (Atti del IV Congr. dell'U.M.I., Taormina, ottobre 1951).

limitati, qui, al caso, assai semplice e più aderente alla realtà, di un cavo coassiale nel quale la grandezza ε sia funzione (ovunque poco diversa da ε_C) della sola distanza dall'asse del cavo. Provato che il campo è, in tali ipotesi, del tipo TM, se ne determinano i vettori; i componenti trasversali dei quali risultano essere poco diversi da quelli del modo TEM che ha sede nel cavo quando è $\varepsilon \equiv \varepsilon_C$, mentre sussiste un campo elettrico longitudinale.

È poi quasi inutile far rilevare qui che, in quanto nella pratica il dielettrico non è mai omogeneo, la ipotesi della (sia pure) lieve eterogeneità rispecchia assai più da vicino la realtà che non quella del mezzo omogeneo. È ben vero, d'altra parte, che l'aver supposto la costante dielettrica uniforme su ogni retta parallela all'asse del cavo costituisce una ipotesi assai restrittiva dal punto di vista pratico [5]); e che ancor più restrittiva è la ipotesi della simmetria del cavo; ma si ritiene, comunque, che le questioni qui esposte, oltre a presentare forse un certo interesse analitico, non siano del tutto prive di aderenza alla realtà, in quanto mettono in evidenza alcune modalità, se non tutte, dei fenomeni dovuti alla eterogeneità del mezzo.

1. — Supponiamo la costante dielettrica ε indipendente dalla variabile z e variabile nei punti di ogni sezione normale σ secondo la legge

$$\varepsilon = \varepsilon_C + \eta\varepsilon_1(x,y)\,, \tag{5}$$

dove η è un numero rispetto al quale riterremo trascurabili tutte le potenze con esponente maggiore dell'unità ed ε_1 una qualunque funzione (limitata) delle variabili x, y, definita in tutti i punti del dominio σ.

---

[5]) Effettivamente, in pratica, si incontrano più spesso, nei dielettrici, disomogeneità anche relativamente forti, ma di tipo longitudinale (si pensi, ad es., ai supporti di centraggio dell'anima nei cavi coassiali); ora, potranno presumibilmente aversi, in tal caso e nella ipotesi che su ogni sezione normale le costanti del mezzo siano uniformi, ancora modi TEM. Mentre appare assai difficile lo studio del campo quando si ammetta il mezzo comunque eterogeneo.

Detti $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}$ i vettori del campo oggetto del nostro studio e seguendo i consueti procedimenti della Fisica-Matematica, porremo:

$$\boldsymbol{E} = (\boldsymbol{E}_c + \eta \boldsymbol{E}_1) e^{i\beta z}, \tag{6}$$

$$\boldsymbol{H} = (\boldsymbol{H}_c + \eta \boldsymbol{H}_1) e^{i\beta z}, \tag{7}$$

$$\beta = \beta_c + \eta \beta_1, \tag{8}$$

dove $\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{H}_1$ sono vettori funzioni delle sole variabili x, y; e β_1 una costante per ora indeterminata. I vettori $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}$, dovranno, ovviamente, verificare le equazioni di Maxwell

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = i\omega\varepsilon \boldsymbol{E}, \tag{9}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = - i\omega\mu \boldsymbol{H}; \tag{10}$$

e, quindi, anche la

$$\Delta \boldsymbol{H} = - \varepsilon\mu\omega^2 + i\omega\varepsilon \operatorname{grad} \varepsilon \wedge \boldsymbol{E}$$

che loro consegue. Tenendo conto delle (5), (6), (7), (8), quest'ultima si scrive

$$\Delta \boldsymbol{H}_c + \eta \Delta \boldsymbol{H}_1 - (\beta_c + \eta\beta_1)^2 (\boldsymbol{H}_c + \eta \boldsymbol{H}_1) =$$
$$= - (\varepsilon_c + \eta\varepsilon_1)\mu\omega^2 (\boldsymbol{H}_c + \eta \boldsymbol{H}_1) + i\omega\eta \operatorname{grad} \varepsilon_1 \wedge (\boldsymbol{E}_c + \eta \boldsymbol{E}_1),$$

od anche, a meno di termini in η^2,

$$\Delta \boldsymbol{H}_1 = (2\beta_1\beta_c - \varepsilon_1\mu\omega^2) \boldsymbol{H}_c + i\omega \operatorname{grad} \varepsilon_1 \wedge \boldsymbol{E}_c \text{ [6]}; \tag{11}$$

detti, infine $\boldsymbol{H}_{1\sigma}$, $H_{1z} \boldsymbol{k}$, rispettivamente, i componenti trasversale e longitudinale di $\boldsymbol{H}_1$, seguono dalla (11) le relazioni

$$\Delta \boldsymbol{H}_{1\sigma} = (2\beta_1\beta_c - \varepsilon_1\mu\omega^2) \boldsymbol{H}_c, \tag{12}$$

$$\Delta H_{1z} = i\omega \operatorname{grad} \varepsilon_1 \wedge \boldsymbol{E}_c \times \boldsymbol{k}. \tag{13}$$

Moltiplichiamo ora scalarmente a. i m. della (12) per $\boldsymbol{H}_c$ e quelli della (4) per $-\boldsymbol{H}_{1\sigma}$; sommando m. a m. ed integrando su tutto il dominio σ, si ha

$$\int_\sigma (\Delta \boldsymbol{H}_{1\sigma} \times \boldsymbol{H}_c - \Delta \boldsymbol{H}_c \times \boldsymbol{H}_{1\sigma}) d\sigma = \int_\sigma (2\beta_1\beta_c - \varepsilon_1\mu\omega^2) |\boldsymbol{H}_c|^2 d\sigma;$$

---

[6]) Cfr. relazioni [4]), [1]).

ma il primo membro di questa relazione è nullo [7]); segue pertanto che è

$$\mu\omega^2 \int_\sigma \varepsilon_1 |\boldsymbol{H}_c|^2 d\sigma = 2\beta_1\beta_c \int_\sigma |\boldsymbol{H}_c|^2 d\sigma\,,$$

---

7) Detto $\boldsymbol{H}$ uno qualunque dei vettori $\boldsymbol{H}_{1\sigma}$, $\boldsymbol{H}_c$, ed H_x, H_y le sue componenti secondo le direzioni $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ degli assi x, y, si ha, infatti, in ogni punto del contorno s di σ:

$$\text{(a)} \qquad \left[\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial n}\right]_s = \frac{\partial H_x}{\partial n}\boldsymbol{i} + \frac{\partial H_y}{\partial n}\boldsymbol{j}\,.$$

Ma, d'altra parte, in ogni punto di s sono nulle le componenti tangenziali del campo elettrico e, in particolare, quella diretta secondo $\boldsymbol{k}$; dalla prima equazione di Maxwell segue quindi che è, su s:

$$\text{(b)} \qquad \frac{\partial H_x}{\partial y} = \frac{\partial H_y}{\partial x}\,.$$

Assunta ora la origine del sistema in un punto P di s e gli assi x, y diretti rispettivamente secondo la tangente $\boldsymbol{t}$ e secondo la normale $\boldsymbol{n}$ ad s in P (quest'ultima orientata verso l'esterno di σ), dalle (a), (b), che si scrivono ora, con ovvio significato dei simboli:

$$\left[\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial n}\right]_s = \frac{\partial H_x}{\partial n}\boldsymbol{t} + \frac{\partial H_y}{\partial n}\boldsymbol{n}\,, \qquad \frac{\partial H_x}{\partial n} = \frac{\partial H_y}{\partial s}$$

segue

$$\text{(c)} \qquad \left[\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial n}\right]_s = \frac{\partial H_y}{\partial s}\boldsymbol{t} + \frac{\partial H_y}{\partial n}\boldsymbol{n}\,.$$

Ma entrambi i vettori $\boldsymbol{H}_{1\sigma}$, $\boldsymbol{H}_c$, sono, nei punti di s, diretti secondo $\boldsymbol{t}$; può dunque scriversi, detto R il raggio di curvatura di s in P:

$$\left[\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial s}\right]_s = \left[\frac{\partial}{\partial s}(H(s)\cdot \boldsymbol{t}(s))\right]_s = \frac{\partial H}{\partial s}\boldsymbol{t} + H\frac{\partial \boldsymbol{t}}{\partial s} = \frac{\partial H}{\partial s}\boldsymbol{t} \pm \frac{H}{R}\boldsymbol{n} = \frac{\partial H}{\partial s}\boldsymbol{i} \pm \frac{H}{R}\boldsymbol{j}$$

(valendo nelle ultime espressioni il segno $+$ o il segno $-$ a seconda che s rivolge la sua concavità all'esterno o all'interno di σ); e si ha inoltre, moltiplicando scalarmente per $\boldsymbol{j}$:

$$\left[\frac{\partial H_y}{\partial s}\right]_s = \pm\frac{H}{R}\,,$$

tenendo conto di che ed osservando che è $\dfrac{\partial H_y}{\partial n} = \dfrac{\partial H_n}{\partial n}$ la (c) si scrive

$$\left[\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial n}\right]_s = \left[\pm\frac{H}{R}\boldsymbol{t} + \frac{\partial H_n}{\partial n}\boldsymbol{n}\right]_s.$$

quindi

$$\beta_1 = \frac{\mu\omega^2}{2\beta_c} \frac{\int_\sigma \varepsilon_1 |\boldsymbol{H}_c|^2 d\sigma}{\int_\sigma |\boldsymbol{H}_c|^2 d\sigma} = \frac{\mu\omega^2}{2\beta_c} \frac{\int_\sigma \varepsilon_1 |\boldsymbol{E}_c|^2 d\sigma}{\int_\sigma |\boldsymbol{E}_c|^2 d\sigma} \quad (14)$$

[8]).

Risulta così determinato l'incremento $\eta\beta_1$ che la eterogeneità del mezzo, caratterizzata dal termine $\eta\varepsilon_1$, determina sulla quantità ε relativa al caso di costante dielettrica uniforme. La velocità di propagazione del campo diventa perciò, a meno di quantità dell'ordine di η^2:

$$V = V_c\left(1 - \eta\frac{\beta_1}{\beta_c}\right)$$ [9]).

2. — Possono ora determinarsi, sempre nei limiti della nostra approssimazione, i vettori $\boldsymbol{E}_1$, $\boldsymbol{H}_1$ del campo che si propaga, con la velocità V or ora calcolata, in un cavo cilindrico

---

Dette H_{cn}, $H_{1\sigma n}$ le componenti normali dei vettori $\boldsymbol{H}_c$, $\boldsymbol{H}_{1\sigma}$, sussistono quindi le identità

$$\left[\boldsymbol{H}_{1\sigma}\times\frac{\partial \boldsymbol{H}_c}{\partial n} - \boldsymbol{H}_c\times\frac{\partial \boldsymbol{H}_{1\sigma}}{\partial n}\right]_s = \left[\pm(\boldsymbol{H}_{1\sigma}\times\boldsymbol{t})\frac{\boldsymbol{H}_c}{R} + (\boldsymbol{H}_{1\sigma}\times\boldsymbol{n})\frac{\partial H_{cn}}{\partial n} \mp \right.$$

$$\left. \mp(\boldsymbol{H}_c\times\boldsymbol{t})\frac{\boldsymbol{H}_{1\sigma}}{R} - (\boldsymbol{H}_c\times\boldsymbol{n})\frac{\partial H_{1\sigma n}}{\partial n}\right]_s \equiv 0\,;$$

per il teorema di Green segue pertanto che, come è asserito nel testo, è nullo l'integrale

$$\int_\sigma \left[\Delta\boldsymbol{H}_{1\sigma}\times\boldsymbol{H}_c - \Delta\boldsymbol{H}_c\times\boldsymbol{H}_{1\sigma}\right] d\sigma.$$

[8]) Cfr. relazione (3).

[9]) Si può osservare che, detta $\bar{\varepsilon}_1$ una opportuna quantità compresa fra l'estremo superiore ε_1' della ε in σ e quello inferiore ε_1'', è:

$$\beta_1 = \frac{\bar{\varepsilon}_1\omega}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_c}},$$

cioè che la velocità di propagazione delle onde e.m. è, con dielettrico eterogeneo secondo la legge (5), compresa fra i valori che competerebbero a due mezzi omogenei le cui costanti dielettriche fossero rispettivamente uguali a $\varepsilon_c + \eta\varepsilon_1'$, $\varepsilon_c + \eta\varepsilon_1''$.

coassiale la cui sezione normale sia una corona circolare (che riferiremo a coordinate polari ρ, θ con polo nel centro) di raggi a, b $(a < b)$ e nel quale la grandezza ε_1 sia una funzione derivabile della sola ρ in tutto l'intervallo (a, b).

A tale scopo, ricordiamo, anzitutto, che, a meno di una costante additiva arbitraria (che si riduce a zero assumendo nullo il valore di U_C nei punti della circonferenza di raggio a) è, in questo caso (c indica una costante):

$$U_C = - C \log \frac{\rho}{a} \; ; \tag{15}$$

si ha quindi, per la (2),

$$\boldsymbol{E}_c = \frac{C}{\rho} \operatorname{grad} \rho \; ; \tag{16}$$

e, in quanto è qui ovviamente

$$\operatorname{grad} \varepsilon_1 = \frac{d\varepsilon_1}{d\rho} \operatorname{grad} \rho \, ,$$

la (13) assume la forma assai semplice

$$\Delta H_{1z} = 0 \, . \tag{17}$$

Da questa e dalle condizioni al contorno

$$\left[\frac{\partial H_{1z}}{\partial n}\right]_s = \left[\frac{\partial H_{1z}}{\partial n}\right]_{\rho=a} = \left[\frac{\partial H_{1z}}{\partial n}\right]_{\rho=b} = 0$$

risulta subito che H_{1z} è, in tutto il dominio σ, uguale ad una costante. E poichè può provarsi che tale costante è nulla [10]), si conclude che il campo in esame è del tipo TM.

3. — Indicati ora con $\boldsymbol{E}_{1\sigma}$, $E_{1z}\boldsymbol{k}$ i componenti trasversale e longitudinale del vettore $\boldsymbol{E}_1$ e con U_1 uno scalare funzione monodroma delle variabili ρ, θ segue intanto, dalla (17), che

---

10) Cfr. D. GRAFFI, *Sulla propagazione delle onde elettromagnetiche entro tubi conduttori* (Memorie dell'Acc. delle Scienze di Bologna, S. X, T. II, 1944, 45).

può porsi:

$$(18) \qquad \boldsymbol{E}_{1\sigma} = -\operatorname{grad} U_1 \text{ [11]} ;$$

la (10) può dunque scriversi, sempre a meno di termini in η^2 (cfr. relazioni (6), (7)), nella forma

$$(\operatorname{grad} E_{1z} + i\beta_C \operatorname{grad} U_1 - i\beta_1 \boldsymbol{E}_C) \wedge \boldsymbol{k} = -i\omega\mu \boldsymbol{H}_{1\sigma},$$

dalla quale si deduce, per il vettore $\boldsymbol{H}_{1\sigma}$, la espressione:

$$(19) \qquad \boldsymbol{H}_{1\sigma} = \frac{1}{i\omega\mu} \boldsymbol{k} \wedge (\operatorname{grad} E_{1z} + i\beta_C \operatorname{grad} U_1 - i\beta_1 \boldsymbol{E}_C) .$$

Dalla (9) segue poi, ancora nei limiti della nostra approssimazione, la relazione:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H}_{1\sigma} + i\beta_c \boldsymbol{k} \wedge \boldsymbol{H}_{1\sigma} + i \frac{\beta_1\beta_c}{\mu\omega} \boldsymbol{E}_c = -i\omega\varepsilon_c \operatorname{grad} U_1 + \\ + i\omega\varepsilon_c E_{1z} \boldsymbol{k} + i\omega\varepsilon_1 \boldsymbol{E}_c \text{ [12]},$$

ed anche, sostituendo ad $\boldsymbol{H}_{1\sigma}$ la espressione fornita dalla (19),

---

[11]) Essendo, infatti, H_{1z} identicamente nullo in σ, tale è anche il flusso di $\boldsymbol{H}_1$ attraverso qualunque porzione di σ. Risulta quindi, per la seconda equazione di Maxwell (in forma integrale), che la circuitazione del vettore elettrico $\boldsymbol{E}_1$ è nulla lungo una qualunque linea chiusa di σ che non abbracci il contorno interno, s_1, di σ; ed ha lo stesso valore, non necessariamente nullo, lungo tutte le linee chiuse (regolari) di σ che abbracciano s_1. Ma, d'altra parte, è facile mostrare che tale valore non può essere diverso da zero: basta, a tale scopo, osservare che in tutti i punti di s_1 è nulla la componente tangenziale di $\boldsymbol{E}_1$ e che è quindi nulla la circuitazione di $\boldsymbol{E}_1$ lungo la s_1 stessa. Risulta così provata l'esistenza del potenziale monodromo U_1.

[12]) Sostituendo nella (10) ad $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{E}$, le espressioni fornite dalle (6), (7) e ricordando che è ora $\boldsymbol{H}_1 = \boldsymbol{H}_{1\sigma}$, si ha:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H}_c + i\beta_c \boldsymbol{k} \wedge \boldsymbol{H}_c + \eta \operatorname{rot} \boldsymbol{H}_{1\sigma} + i\eta\beta_c \boldsymbol{k} \wedge \boldsymbol{H}_{1\sigma} + i\eta\beta_1 \boldsymbol{k} \wedge \boldsymbol{H}_c + \\ + i\eta^2\beta_1 \boldsymbol{k} \wedge \boldsymbol{H}_{1\sigma} = i\omega\varepsilon_c \boldsymbol{E}_c + i\omega\eta\varepsilon_c \boldsymbol{E}_1 + i\omega\eta\varepsilon_1 \boldsymbol{E}_c + i\omega\eta^2\varepsilon_1 \boldsymbol{E}_1 ;$$

ma questa equazione deve essere evidentemente verificata per $\eta = 0$; tenendo conto di ciò, oltre che della (3), segue subito, a meno di potenze di η con esponente maggiore di uno, la relazione del testo.

l'altra

$$\Delta(E_{1z} + i\beta_c U_1)\boldsymbol{k} - i\beta_c \operatorname{grad} E_{1z} - 2\beta_1\beta_c \boldsymbol{E}_c = \tag{20}$$
$$= -\varepsilon_c\mu\omega^2 E_{1z}\boldsymbol{k} - \varepsilon_1\mu\omega^2 \boldsymbol{E}_c \quad ^{13)},$$

cui equivalgono le equazioni

$$\operatorname{grad} E_{1z} = \frac{i}{\beta_c}(2\beta_1\beta_c - \mu\omega^2\varepsilon_1)E_c, \tag{21}$$
$$\Delta(E_{1z} + i\beta_c U_1) = -\omega^2\mu\varepsilon_c E_{1z};$$

dall'ultima delle quali può dedursi, infine, osservando che per la (21) (e per essere anche div $\boldsymbol{E}_c \equiv 0$), si ha

$$\Delta E_{1z} = -i\frac{\beta_c}{\varepsilon_c}\operatorname{grad}\varepsilon_1 \times \boldsymbol{E}_c,$$

l'altra relazione:

$$\Delta U_1 = i\beta_c E_{1z} + \frac{1}{\varepsilon_c}\operatorname{grad}\varepsilon_1 \times \boldsymbol{E}_c. \tag{22}$$

Le (21), (22), cui si associno rispettivamente le condizioni al contorno

$$[E_{1z}]_{\rho=a} = 0, \quad [E_{1z}]_{\rho=b} = 0, \tag{23}$$

$$[U_c + \eta U_1]_{\rho=a} = 0, \quad [U_c + \eta U_1]_{\rho=b} = U_0, \tag{24}$$

---

13) Sussistono, infatti, detto P un punto generico della sezione σ ed indicando con φ uno qualunque degli scalari E_{1z}, U_1 (funzioni delle sole variabili ρ, θ), le identità

$$\operatorname{rot}[\boldsymbol{k} \wedge \operatorname{grad}\varphi] = \left[\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi - \frac{d\operatorname{grad}\varphi}{dP}\right]\boldsymbol{k} = \Delta\varphi \cdot \boldsymbol{k};$$

e si ha poi, in quanto è, conforme alla (3) ed in ogni punto di σ, div $\boldsymbol{E}_c = 0$:

$$\operatorname{rot}[\boldsymbol{k} \wedge \boldsymbol{E}_c] = 0.$$

Segue quindi, dalla (19), la relazione

$$\operatorname{rot}\dot{\boldsymbol{H}}_{1\sigma} = \frac{1}{i\omega\mu}[\Delta E_{1z} + i\beta_c \Delta U_1] \cdot \boldsymbol{k}$$

tenuto conto della quale, oltre che della (1), si ottiene, dopo facili sostituzioni, la (20) del testo.

definiscono in tutto il dominio σ le funzioni E_{1z}, U_1; e, quindi, anche le $\boldsymbol{E}_{1\sigma}$, $\boldsymbol{H}_{1\sigma}$ da quelle deducibili, per derivazione, mediante le (18), (19).

Infatti, tenuto conto della (2), segue dalle (21), (23) che lo scalare E_1 è indipendente dalla variabile θ; la (21) si scrive pertanto:

$$\frac{dE_{1z}}{d\rho}=\frac{iC}{\beta_c}[2\beta_1\beta_c-\varepsilon_1\mu\omega^2]\frac{1}{\rho}; \tag{25}$$

e, poichè deve aversi (cfr. la prima delle (23))

$$E_{1z}(a)=0$$

segue dalla (25) che è

$$E_{1z}(\rho)=\frac{iC}{\beta_c}\int_a^\rho(2\beta_1\beta_c-\varepsilon_1\mu\omega^2)\frac{1}{\rho}\,d\rho\,. \tag{26}$$

Osserviamo, qui, che la seconda delle condizioni (23) è soddisfatta soltanto se si assume un determinato valore per il parametro che figura nella (21); e può rapidamente verificarsi che tale valore coincide con quello fornito dalla (14) e relativo ad una guida di sezione qualsiasi: segue, infatti, dalla seconda delle (23), che è

$$0=\int_a^b(2\beta_1\beta_c-\varepsilon_1\mu\omega^2)\frac{d\rho}{\rho}\,,$$

cioè

$$\beta_1=\frac{\mu\omega^2}{2\beta_c}\,\frac{\int_a^b\frac{\varepsilon_1}{\rho}\,d\rho}{\int_a^b\frac{d\rho}{\rho}}\,,$$

in accordo con la (14) [14].

---

[14]) Sussistono, infatti, le ovvie relazioni:

$$\frac{\int_\sigma\varepsilon_1\frac{1}{\rho^2}\,d\sigma}{\int_\sigma\frac{1}{\rho^2}\,d\sigma}=\frac{\int_a^b\varepsilon_1\frac{1}{\rho^2}\,2\pi\rho\,d\rho}{\int_a^b\frac{1}{\rho^2}\,2\pi\rho\,d\rho}=\frac{\int_a^b\frac{\varepsilon_1}{\rho}\,d\rho}{\int_a^b\frac{1}{\rho}\,d\rho}\,.$$

Quanto allo scalare U_1 rileviamo, anzitutto, che la (22) e le condizioni (24) sono verificate assumendo U_1 funzione della sola variabile ρ; il potenziale U_1 è quindi quell'integrale della

$$\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dU_1}{d\rho}\right) = C\left[-\rho\int_a^\rho \frac{1}{\rho}(2\beta_1\beta_c - \varepsilon_1\mu\omega^2)d\rho + \frac{1}{\varepsilon_c}\frac{d\varepsilon_1}{d\rho}\right] \tag{27}$$

che soddisfa le condizioni (24).

Posto ora

$$\Phi(\rho) = \frac{1}{\rho}\int_a^\rho\left[-\rho\int_a^\rho(2\beta_1\beta_c - \varepsilon_1\mu\omega^2)\frac{1}{\rho}d\rho + \frac{1}{\varepsilon_c}\frac{d\varepsilon_1}{d\rho}\right]d\rho$$

e detta D una costante, segue dalla (27) e dalla prima della (24) (si ricordi la (15), valida, come si è detto, se si assume $U_C(a) = 0$);

$$U_1(\rho) = C\int_a^\rho \Phi(\rho)d\rho + D\log\frac{\rho}{a};$$

la seconda delle (24) si scrive pertanto:

$$(-C + \eta D)\log\frac{b}{a} + \eta C\int_a^b \Phi(\rho)d\rho = U_0,$$

od anche, nei limiti dell'approssimazione adottata,

$$(-C + \eta D)\left[\log\frac{b}{a} - \eta\int_a^b \Phi(\rho)d\rho\right] = U_0. \tag{28}$$

Risulta così, per il potenziale $U = U_C + \eta U_1$ da cui deriva (cfr. relazioni (2), (18)) il campo elettrico trasversale totale $\boldsymbol{E}_C + \eta\boldsymbol{E}_{1\sigma}$, la espressione

$$U = U_0\,\frac{\log\frac{\rho}{a} - \eta\int_a^\rho \Phi(\rho)d\rho}{\log\frac{b}{a} - \eta\int_a^b \Phi(\rho)d\rho}$$

valida, si intende, a meno di quantità dell'ordine di η^2.

Sempre in quest'ordine di approssimazione, segue infine, dalle (26), (28), la espressione

$$\eta \frac{iU_0}{\beta_c} \frac{1}{\log b - \log a} \int_a^\rho (2\beta_1\beta_c - \varepsilon_1\mu\omega^2) \frac{1}{\rho} d\rho$$

della componente longitudinale ηE_{1z} del campo elettrico.