ENRICO MAGENES

Problema generalizzato di Dirichlet e teoria del potenziale

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 24 (1955), p. 220-229

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1955__24__220_0>

PROBLEMA GENERALIZZATO DI DIRICHLET E TEORIA DEL POTENZIALE

Nota (*) *di* ENRICO MAGENES (*a Modena*)

Scopo della presente nota è di esporre brevemente alcune considerazioni sulle relazioni esistenti tra il problema generalizzato di DIRICHLET, quale è stato impostato e studiato da G. CIMMINO, e la teoria del potenziale (n. 1).

Queste considerazioni sono suscettibili di estensioni a numerosi problemi al contorno relativi ad equazioni e a sistemi di equazioni a derivate parziali lineari, come verrà pure indicato (n. 2).

1. - Sia D un dominio limitato dello spazio (x, y, z) che per semplicità supporremo a connessione superficiale semplice e a frontiera F dotata di piano tangente e di curvature continue e tale da ammettere una rappresentazione parametrica regolare globale del tipo

$$x = \bar{x}(r, s) \quad , \quad y = \bar{y}(r, s) \quad , \quad z = \bar{z}(r, s)$$

con dominio base T.

Assegnata su F una funzione $\mu(Q) \equiv \mu(r, s)$ appartenente

(*) Pervenuta in Redazione il 23 aprile 1955.
Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico, Università, Modena.

allo spazio $L^p(p > 1)$ [1]), i procedimenti di G. CIMMINO [2]) assicurano l'esistenza e l'unicità di una funzione $u(P) \equiv u(x, y, z)$ armonica in $D - F$ e assumente « in media di ordine p » i valori assegnati su F, la convergenza in media potendo precisarsi nel modo seguente [3]):

Considerata la superficie F_t parallela a F di equazioni parametriche

$$\begin{aligned} x &= x(r, s, t) \equiv \bar{x}(r, s) + t\xi(r, s) \\ y &= y(r, s, t) \equiv \bar{y}(r, s) + t\eta(r, s) \\ z &= z(r, s, t) \equiv \bar{z}(r, s) + t\zeta(r, s) \end{aligned}$$

dove $\xi(r, s)$, $\eta(r, s)$, $\zeta(r, s)$ sono i coseni direttori della normale n interna su F e t è un parametro variabile in un intorno destro dello zero, si ha

$$\lim_{t \to 0+} \int_T \{ u[x(r, s, t), y(r, s, t), z(r, s, t)] - \mu(r, s) \}^p \, ds dr = 0, \tag{1}$$

D'altra parte, supposto $\mu(Q)$ solamente sommabile su F, la teoria generalizzata del potenziale e delle relative equazioni integrali lineari, quale è stata sviluppata da G. C. EVANS - E. R. C. MILES [7] e da G. FICHERA [8] assicura l'esistenza e l'unicità di un potenziale di doppio strato

$$w(P) = \frac{1}{2\pi} \int_F \varphi(Q) \frac{d}{dn_Q} \frac{1}{PQ} \, d\sigma_Q \qquad P \in D - F \tag{2}$$

---

1) Indicheremo con $L^p(p > 1)$ lo spazio delle funzioni μ di potenza p-esima sommabile su F normalizzato come d'abitudine ponendo:

$$\| \mu \|_p = \left(\int_F | \mu |^p \, d\sigma \right)^{\frac{1}{p}}.$$

2) Si vedano i lavori [4] [5] e in particolare la conferenza [6] nella nella quale sono richiamati anche i notevoli contributi di B. PINI (i numeri tra [ ] si riferiscono alla bibliografia finale).

3) È questo un modo di definire la « convergenza in media » che si può del resto definire con notevole arbitrarietà attraverso altri sistemi di superficie approssimati, in modo del tutto equivalente.

con momento $\varphi(Q)$ sommabile su F, tale che per quasi tutti i punti M di F risulti

$$\lim_{P \to M(\text{su } n_M)} u(P) = \mu(M) \tag{3}$$

Si tratta dunque di due impostazioni diverse del problema generalizzato di DIRICHLET, che qui vogliamo porre tra di loro in relazione, dimostrando che se $\mu(Q)$ appartiene a $L^p (p > 1)$ le due soluzioni coincidono: più precisamente si ha il

TEOREMA: *La classe delle soluzioni del problema di* DIRICHLET *generalizzato secondo* CIMMINO, *assumenti su F «in media d'ordine p» ($p > 1$) valori appartenenti a L^p, coincide con la classe dei potenziali di doppio strato con momento appartenente a L^p.*

Sia dapprima $u(P)$ soluzione del problema generalizzato secondo CIMMINO, soddisfacente cioè alla (1). Si costruisca, ciò che è notoriamente possibile, una successione $\{\mu_n(Q)\}$ di funzioni continue su F, convergente in media d'ordine p su F alla funzione $\mu(Q)$. Per ogni n si consideri la soluzione $u_n(P)$, continua in D, del problema ordinario di DIRICHLET

$$\Delta_2 u = 0 \quad \text{in } D - F \quad , \quad u = \mu_n \quad \text{su } F .$$

Le $u_n(P)$ si possono esprimere in un sol modo come potenziali di doppio strato

$$u_n(P) = \frac{1}{2\pi} \int_F \varphi_n(Q) \frac{d}{dn_Q} \frac{1}{PQ} d\sigma_Q \tag{4}$$

dove $\varphi_n(Q)$ è la soluzione dell'equazione

$$\mu_n(M) = \varphi_n(M) + \frac{1}{2\pi} \int_F \varphi_n(Q) \frac{d}{dn_Q} \frac{1}{MQ} d\sigma_Q \tag{5}$$

e come tale è continua ed è data dalla

$$\varphi_n(M) = \mu_n(M) + \int_F \mu_n(Q) H(M, Q) d\sigma_Q \tag{6}$$

con $H(M, Q)$ nucleo risolvente di $\dfrac{1}{2\pi} \dfrac{d}{dn_Q} \dfrac{1}{MQ}$.

Per $n \to \infty$ la successione $\{\varphi_n(M)\}$ converge in media d'ordine p su F alla funzione

$$\varphi(M) = \mu(M) + \int_F \mu(Q) H(M, Q) d\sigma_Q \tag{7}$$

e $\varphi(M)$ appartiene a L^p. Basta per questo dimostrare che la trasformazione

$$\psi(M) = \int_F \mu(Q) H(M, Q) d\sigma_Q$$

è una trasformazione lineare e continua dello spazio L^p avente codominio pure in L^p. E la cosa segue facilmente con ragionamenti di tipo noto: nel caso $p > 2$ essa è infatti conseguenza immediata della formula di SCHWARZ-HÖLDER e del fatto ben noto che $H(M, Q)$ soddisfa alla disuguaglianza

$$|H(M, Q)| \leq \frac{K}{MQ} \quad (M \neq Q, \; K \text{ costante}).$$

Nel caso $1 < p < 2$ si osservi anzitutto che se $g(Q)$ è una qualunque funzione appartenente allo spazio $L^{\frac{p}{p-1}}$, essendo $\frac{p}{p-1} > 2$, la funzione $\int_F g(Q) H(Q, M) d\sigma_Q$, per quanto si è ora detto, appartiene a $L^{\frac{p}{p-1}}$; esiste dunque l'integrale $\int_F |\mu(M)| \left| \int_F g(Q) H(Q, M) d\sigma_Q \right| d\sigma_M$ ed allora per un noto teorema di TONELLI esiste l'integrale $\int_F \int_F \mu(M) g(Q) H(Q, M) \, d\sigma_Q d\sigma_M$ e per un teorema di FUBINI esso è uguale a

$$\int_F g(Q) \left[\int_F \mu(M) H(Q, M) d\sigma_M \right] d\sigma_Q = \int_F g(Q) \psi(Q) d\sigma_Q .$$

Per ogni funzione $g(Q)$ di $L^{\frac{p}{p-1}}$ la funzione $g(Q)\psi(Q)$ è dunque sommabile ed allora (v. ad es. [16, pag. 136]) $\psi(Q)$ appartiene a L^p. Inoltre se $g(Q)$ appartiene a $L^{\frac{p-1}{p}}$ e ha norma

$\| g \|_{\frac{p}{p-1}} \leq 1$ risulta, per quanto si è detto nel caso $p > 2$,

$$\left| \int_F g(Q)\psi(Q)d\sigma_Q \right| = \left| \int_F \mu(M) \left[\int_F g(Q)H(Q,M)d\sigma_Q \right] d\sigma_M \right| \leq$$

$$\leq \| \mu \|_p \left\| \int_F g(Q)H(Q, M)d\sigma_Q \right\|_{\frac{p}{p-1}} \leq L \| \mu \|_p \| g \|_{\frac{p}{p-1}} \leq L \| \mu \|_p$$

con L costante opportuna. Ne segue (v. ad es. [16 pag. 71]) che è $\| \psi \|_p \leq L \| \mu \|_p$.

Dimostrazione analoga, e anzi più semplice, si può dare anche nel caso $p = 2$, come è già stato fatto in sostanza da G. FICHERA (v. [8, teor. XIV]).

Resta dunque dimostrata la convergenza in media d'ordine p su F della successione $\{ \varphi_n(M) \}$ alla (7).

Per ogni P interno a D si ha allora dalla (4) che $\{ u_n(P) \}$ converge alla funzione

$$\frac{1}{2\pi} \int_F \varphi(Q) \frac{d}{dn_Q} \frac{1}{\overline{PQ}} p\sigma_Q .$$

D'altra parte per il teorema di convergenza di CIMMINO (v. l. c. in [2])) poichè $\{ \mu_n \}$ converge in media d'ordine p a μ su F, la successione $\{ u_n(P) \}$ converge in media d'ordine p in D e uniformemente in ogni insieme chiuso interno a D alla $u(P)$. Dunque vale la

$$u(P) = \frac{1}{2\pi} \int_F \varphi(Q) \frac{d}{dn_Q} \frac{1}{\overline{PQ}} d\sigma_Q \qquad p \in D - F.$$

Si ha di più dalla teoria generalizzata del potenziale che per quasi- tutti gli M di F risulta

$$\lim_{P \to M (\text{su } n_M)} u(P) = \varphi(M) + \frac{1}{2\pi} \int_F \varphi(Q) \frac{d}{dn_Q} \frac{1}{\overline{MQ}} d\sigma_Q$$

vale a dire per la (7)

$$\lim_{P \to M (\text{su } n_M)} u(P) = \mu(M)$$

e con ciò viene risposto in senso affermativo alla questione posta dallo stesso CIMMINO, di stabilire se la convergenza in media nel senso da Lui stabilito porti alla convergenza lungo la normale n_M per quasi tutti gli M di F.

Viceversa se

$$w(P) = \frac{1}{2\pi} \int_F \varphi(Q) \frac{d}{dn_Q} \frac{1}{\overline{PQ}} d\sigma_Q \qquad P \in D - F$$

con $\varphi(Q)$ appartenente a L^p, allora per quasi- tutti gli M di F si ha

$$\lim_{P \to M(\text{su } n_M)} w(P) = \varphi(M) + \frac{1}{2\pi} \int_F \varphi(Q) \frac{d}{dn_Q} \frac{1}{\overline{MQ}} d\sigma_Q .$$

Chiamata con $\mu(M)$ la funzione a secondo membro, $\mu(M)$ appartiene a L^p, come si dimostra con gli stessi ragionamenti usati poc'anzi; si può dunque risolvere il problema generalizzato di DIRICHLET secondo CIMMINO relativo alla $\mu(M)$; dettane $u(P)$ la soluzione, per quanto visto più sopra, risulta necessariamente $u(P) \equiv w(P)$ e quindi $w(P)$ « converge in media d'ordine p » a $\mu(M)$ [4]).

2. - Il risultato del n. precedente può essere completato ed esteso ad altri problemi; accenniamone rapidamente.

Anzitutto si osservi che le ipotesi fatte sul dominio D possono essere ampliate, come risulta sia dalla teoria di CIMMINO che dalla teoria del potenziale e delle relative equazioni integrali [4']). Si può inoltre osservare che il confronto delle ipotesi su D di validità delle due teorie può permettere di stabilire volta per volta quale delle due impostazioni è più opportuna e anche di giovarsi dell'una impostazione per allargare le condizioni di validità finora conosciute dell'altra.

---

[4]) Del fatto che $w(P)$ « converga in media d'ordine p » si può dare anche una dimostrazione diretta approssimando $\varphi(Q)$ con una successione di funzioni continue su F.

[4']) Se il dominio D non è semplicemente connesso, è noto che occorrerà aggiungere al potenziale di doppio strato certe opportune funzioni.

Considerazioni analoghe al risultato del n. 1 si possono poi fare per il probema di DIRICHLET relativo all'equazione completa

$$\Delta_2 u = f;$$

naturalmente in questo caso si dovrà aggiungere al potenziale di doppio strato un potenziale newtoniano di volume.

È immediata anche l'estensione ad uno spazio euclideo a un numero m qualunque di dimensioni.

Dalla caratterizzazione data delle soluzioni del problema generalizzato secondo CIMMINO, segue inoltre facilmente che se in un punto M_0 di F la funzione $\mu(M)$ è continua, allora la soluzione $u(P)$, verificante la (1), assume nel senso del problema di DIRICHLET ordinario, cioè con continuità, il valore $\mu(M_0)$ [5]).

Varie estensioni sono poi possibili del risultato del n. precedente ad altre equazioni: anzitutto al problema di DIRICHLET per le equazioni del secondo ordine del tipo ellittico

$$\sum_{h,k}^{1,m} a_{hk} \frac{\partial^2 u}{\partial x_h \partial x_k} + \sum_{h=1}^{m} b_h \frac{\partial u}{\partial x_h} + cu = f \tag{8}$$

per le quali vale sia la teoria del CIMMINO che la teoria generalizzata del potenziale e delle relative equazioni integrali; circa quest'ultima si tengano presenti i lavori di G. GIRAUD (per i quali rinvio alla monografia [1]) e i ragionamenti che L. AMERIO ha svolto per il Suo *teorema di inversione della formula di* GREEN [2] [6]).

L'estensione è possibile anche a certi sistemi di equazioni lineari del secondo ordine di tipo ellittico, quale per es. il sistema dell'equilibrio di un corpo elastico

$$\Delta_2 \vec{u} + k \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{u} = \vec{f} \tag{9}$$

---

[5]) Si veda per questo anche la recente nota [3] di L. CATTABRIGA.

[6]) Una esposizione esauriente della teoria generalizzata del potenziale connessa alla (8) trovasi nel volume [17] di C. MIRANDA, pubblicato a compilazione avvenuta di questa Nota; rinvio in particolare ai cap. II e III (n. 21).

($\vec{u}$ vettore degli spostamenti) e ciò in virtù dei risultati di G. FICHERA, contenuti nei cap. II e IV (n. 1) di [9], e dell'estensione che B. PINI ha fatto del procedimento del CIMMINO allo studio dei sistemi suddetti [13]. Viene così completato un risultato dello stesso PINI [14], nel caso del sistema (9).

Anche per le equazioni di tipo parabolico, e in particolare per l'equazione del calore

$$\sum_{h=1}^{m} \frac{\partial^2 u}{\partial x_h^2} - \frac{\partial u}{\partial y} = f$$

si possono facilmente svolgere considerazioni analoghe a quelle del n. precedente, usufruendo di risultati di B. PINI [15], nei quali il primo problema al contorno tipico per l'equazione stessa viene studiato nel senso generalizzato del CIMMINO, e della teoria generalizzata degli integrali analoghi ai potenziali di superficie che vi compaiono [10].

Oltre che a problemi del tipo di DIRICHLET il risultato del n. 1 e le sue estensioni ammettono applicazioni interessanti anche ad altri tipi di problemi al contorno come i cosidetti problemi misti. Più precisamente per l'equazione (8) è stato recentemente [11] impostato e studiato il *problema misto* consistente nell'assegnare su una parte F_2 della frontiera di D la derivata « conormale » $\frac{du}{d\nu}$ e sulla rimanente F_1 la funzione stessa, intendendo quest'ultima condizione in un senso generalizzato di « convergenza in media », analogo a quello introdotto dal CIMMINO per il problema di DIRICHLET. Orbene, applicando opportunamente i risultati della presente nota e considerazioni analoghe a quelle del n. 6 di [11], si potrebbe dimostrare che la soluzione del problema suddetto trovata nel n. 5 di [11] converge anche lungo la conormale per quasi tutti i punti M di F_1 al valore assegnato.

Un analogo risultato può ottenersi anche per il problema misto relativo all'equazione del calore, quale è stato studiato in [12].

BIBLIOGRAFIA

[1] G. ASCOLI - P. BURGATTI - G. GIRAUD: *Equazioni delle derivate parziali dei tipi ellittico e parabolico* (Firenze, 1936).

[2] L. AMERIO: *Sul calcolo delle soluzioni dei problemi al contorno per le equazioni lineari del secondo ordine di tipo ellittico* (Amer. Journ. of Math., t. 69, 1947, pp. 447-489).

[3] L. CATTABRIGA: *Osservazioni sul problema generalizzato di Dirichlet*, (Rend. Sem. Mat. di Padova, vol. XXIV, 1955, pp. 45-52).

[4] G. CIMMINO: *Nuovo tipo di condizioni al contorno e nuovo metodo di trattazione del problema generalizzato di Dirichlet*, (Rend. Cir. Mat. Palermo, t. LXI, 1937, pp. 177-221).

[5] G. CIMMINO: *Sul problema generalizzato di Dirichlet per l'equazione di Poisson* (Rend. Sem. Mat. di Padova, vol XI, 1940, pp. 28-89).

[6] G. CIMMINO: *Sulle equazioni lineari alle derivate parziali di tipo ellittico*, (Rend. Sem. Mat. Fis. Milano, vol. XXIII, 1952, pp. 255-286).

[7] G. C. EVANS - E. R. C. MILES: *Potential of general masses in single and double layers. The relative boundary value problems*, (Amer. Journ. of Math., t. LIII, 1931, pp. 493-516).

[8] G. FICHERA: *Teoremi di completezza sulla frontiera di un dominio per taluni sistemi di funzioni*, (Ann. Mat. Pura e Applicata, s. IV, t. XXVII, 1948 pp. 1-28).

[9] G. FICHERA: *Sull'esistenza e sul calcolo delle soluzioni dei problemi al contorno relativi all'equilibrio di un corpo elastico*, (Ann. Scuole Norm. Sup. Pisa, s. III, vol. IV, 1950, pp. 1-80).

[10] E. MAGENES: *Sull'equazione del calore: teoremi di unicità e teoremi di completezza connessi col metodo di integrazione di M. Picone*, (Rend. Sem. Mat. Padova, vol, XXI, 19522, pp. 99-123, 136-170).

[11] E. MAGENES: *Sui problemi al contorno misti per le equazioni lineari del secondo ordine di tipo ellittico* (Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, s. III, vol. VIII, 1952, pp. 93-120).

[12] E. MAGENES: *Problemi al contorno misti per l'equazione del calore* (Rend. Sem. Mat. Padova, vol. XXIV, 1955, pp. 1-28)

[13] B. PINI: *Sul primo problema di valori al contorno della teoria dell'elasticità* (Rend. Sem. Mat. Padova, vol. XXI, 1952, pp. 345-369).

[14] B. PINI :*Osservazioni sulle soluzioni dei sistemi di equazioni a derivate parziali lineari di tipo ellittico*, (Rend. Sem. Mat. Padova, vol. XXII, 1953, pp. 366-379).

[15] B. PINI :*Un problema di valori al contorno, generalizzato, per l'equazione a derivate parziali lineare parabolica del secondo ordine*, (Rivista di Mat. di Parma, Vol 3, 1953, pp. 153-187).

[16] A. C. ZAANEN : *Linear Analysis*, (Nordhoff, Gromingen, 1953).

[17] C. MIRANDA : *Equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico*, (Springer, Berlin, 1955).