

# RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIOVANNI PRODI

## **Qualche risultato riguardo alle equazioni di Navier-Stokes nel caso bidimensionale**

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*,  
tome 30 (1960), p. 1-15

[http://www.numdam.org/item?id=RSMUP\\_1960\\_\\_30\\_\\_1\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1960__30__1_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1960, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques*  
<http://www.numdam.org/>

# QUALCHE RISULTATO RIGUARDO ALLE EQUAZIONI DI NAVIER-STOKES NEL CASO BIDIMENSIONALE

*Nota (\*) di GIOVANNI PRODI (a Trieste)*

Recentemente è stata dimostrata da O. L. Ladyzenskaia [2] l'univoca risolubilità « in grande » del problema misto (secondo Hadamard) per le equazioni di Navier-Stokes nel caso 2-dimensionale. Successivamente J. L. Lions ed io abbiamo dato [3] una nuova risoluzione in una impostazione ulteriormente generalizzata. Questi risultati aprono la via alla considerazione di numerosi problemi: esistenza di soluzioni periodiche, comportamento asintotico ecc.. Nel presente lavoro viene enunciato qualche risultato in questo senso. Nella prima parte vengono analizzate le soluzioni introdotte nel lavoro [3]; si dimostra che esse sono continue come funzioni di  $t$  nello spazio di Hilbert definito dall'integrale dell'energia. Si dimostra quindi la dipendenza continua dai valori iniziali, nella topologia debole. Questi risultati permettono di dimostrare la esistenza di una soluzione periodica, nel caso di un secondo membro periodico. Non viene qui data risposta al problema dell'unicità di questa soluzione; il problema presenta certamente notevoli difficoltà, se il secondo membro non è « piccolo » in un senso opportuno.

NOTAZIONI. Sia  $\Omega$  un insieme aperto del piano; indicheremo con  $u$  un vettore di componenti  $u_j$  ( $j = 1, 2$ ), funzioni del punto  $x \in \Omega$  ( $x \equiv (x_1, x_2)$ ). Indicheremo con  $L^p(\Omega)$  lo spazio dei vettori con componenti a  $p$ -esima potenza sommabile

---

(\*) Pervenuta in Redazione il 7 novembre 1959.

Indirizzo dell'A: Istituto matematico, Università, Trieste.

in  $\Omega$ , con la norma

$$\|u\|_{L^p} = \left( \int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

dove  $|u(x)|$  indica il modulo del vettore  $u(x)$ . Se  $p=2$ , questo spazio ha struttura hilbertiana (reale) individuabile mediante il prodotto scalare  $(f, g) = \int_{\Omega} f_i g_i dx$ . Scriveremo, per  $f \in L^2(\Omega)$ ,  $\|f\| = (f, f)^{1/2}$ .

Siano poi  $f, g$  vettori definiti in  $\Omega$ , aventi derivate prime (in senso generalizzato) a quadrato sommabile in  $\Omega$ . Scriveremo  $((f, g)) = \int_{\Omega} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \frac{\partial g_i}{\partial x_j} dx$ ,  $\|f\|^2 = ((f, f))$ .

Con  $H^1(\Omega)$  indicheremo lo spazio hilbertiano dei vettori a quadrato sommabile in  $\Omega$  con le loro derivate prime, individuato dal prodotto scalare:  $(f, g)_{H^1(\Omega)} = (f, g) + ((f, g))$ .

Sia  $\mathcal{N}(\Omega)$  la varietà dei vettori indefinitamente differenziabili, a divergenza nulla e nulli fuori di un compatto contenuto in  $\Omega$ . Sia  $N(\Omega)$  la chiusura di  $\mathcal{N}(\Omega)$  in  $L^2(\Omega)$ ,  $N^1(\Omega)$  la chiusura di  $\mathcal{N}(\Omega)$  in  $H^1(\Omega)$ . Notiamo che ai vettori di  $N^1(\Omega)$  viene imposta, in un certo senso, una condizione di annullamento sulla frontiera.

$$\text{Se } u, v, w \in N^1(\Omega), \text{ poniamo } b(u, v, w) = \int_{\Omega} u_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} w_j dx.$$

Teniamo presente che, in base ad una diseguaglianza dovuta a Ladyzenskaia [2] si ha, qualunque sia il campo piano  $\Omega$ , per ogni vettore  $u \in N^1(\Omega)$

$$(1) \quad \|u\|_{L^4(\Omega)}^2 \leq 2^{1/2} \|u\| \|u\|.$$

Poichè

$$(2) \quad |b(u, v, w)| \leq \int_{\Omega} |u(x)| \left( \sum_{ij} \left( \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)^2 \right)^{1/2} |w(x)| dx \leq \|u\|_{L^4(\Omega)} \|v\| \|w\|_{L^4(\Omega)}$$

la (1) assicura che, nel nostro caso, la forma trilineare  $b(u, v, w)$  risulta continua in  $N^1(\Omega) \times N^1(\Omega) \times N^1(\Omega)$ .

Si ha poi  $b(u, v, w) = -b(u, w, v)$ ; da cui  $b(u, v, v) = 0$ .

Dato uno spazio di Banach  $B$ , indicheremo con  $L^p(0, \tau; B)$

lo spazio delle funzioni definite nell'intervallo  $(0 \rightarrow \tau)$ , con valori in  $B$ , a  $p$ -sima potenza sommabile.

**SOLUZIONI DEBOLI.** Sia  $f(t) \in L^1(0, \tau; L^2(\Omega))$ . Diremo che una funzione  $u(t) \in L^2(0, \tau; N^1(\Omega)) \cap L(0, \tau; N(\Omega))$  è soluzione debole delle equazioni di Navier-Stokes nell'intervallo  $(0 \rightarrow \tau)$ , ( $\tau > 0$ ) se vale la relazione:

$$(3) \quad \int_0^\tau \{ -(u(t), v(t)) + \mu((u(t), v(t))) + b(u(t), u(t), v(t)) \} dt = \\ = \int_0^\tau (f(t), v(t)) dt$$

per ogni funzione  $v(t)$  che:

(a) Sia continua come funzione definita in  $(0 \rightarrow \tau)$ , con valori in  $N^1(\Omega)$

(b) abbia derivata rispetto a  $t$   $v'(t) \in L^2(0, \tau; N(\Omega))$

(c) si annulli fuori di un intervallo interno all'intervallo  $(0 \rightarrow \tau)$ .

Qui  $\mu$  indica una costante  $> 0$  (coefficiente di viscosità). Si riconosce subito che gli integrali che figurano nella (2) hanno senso. In particolare, applicando la (2), la (1), e tenendo conto della (a) si verifica che  $b(u(t), u(t), v(t))$  è sommabile.

Vale il seguente lemma.

**LEMMA 1.** - Alla funzione  $u$ , soluzione del problema debole, si può far corrispondere un insieme  $T_u \subset (0 \rightarrow \tau)$  di misura uguale a  $\tau$  tale che, per ogni coppia di punti  $\tau', \tau'' \in T_u$ , si abbia

$$(4) \quad \left[ (u(t), v(t)) \right]_{t=\tau'}^{t=\tau''} + \int_{\tau'}^{\tau''} \{ -(u(t), v(t)) + \mu((u(t), v(t))) + \\ + b(u(t), u(t), v(t)) \} dt = \int_{\tau'}^{\tau''} (f(t), v(t)) dt,$$

per ogni funzione  $v(t)$  soddisfacente alle sole condizioni (a) e (b).

Tralasciamo la dimostrazione di questo lemma, che ricalca in modo completo quella del lemma 1 del lavoro [4] (cfr. anche [5], pag. 18). Dalla dimostrazione risulta, in particolare, che si può scegliere come  $T_u$  l'insieme dei valori di  $t$  per cui è

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} u(\xi) d\xi = u(t),$$

fortemente in  $N(\Omega)$  (insieme di Lebesgue per la  $u(t)$ ).

**LEMMA 2.** - Per ogni  $\lambda > 0$  si può definire nello spazio  $N(\Omega)$  una proiezione ortogonale  $E_\lambda$  che gode di queste proprietà, posto  $u_\lambda = E_\lambda u$ : (α)  $u_\lambda \in N^1(\Omega)$ ; (β)  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} u_\lambda = u$  in  $N(\Omega)$ ; (γ) per ogni  $u \in N^1(\Omega)$ ,  $((u, u_\lambda)) = ((u_\lambda, u_\lambda)) = \|u_\lambda\|^2$  perciò  $\|u_\lambda\|^2 \leq \|u\|^2$ ; (δ) per ogni  $u \in N^1(\Omega)$   $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} u_\lambda = u$  in  $N^1(\Omega)$ .

Sia  $\Lambda$  l'operatore definito dalla relazione  $(\Lambda u, v) = (u, v) + ((u, v))$ ; il dominio di definizione di  $\Lambda$  sia l'insieme degli elementi  $u \in N^1(\Omega)$  per cui si ha  $|(u, v) + ((u, v))| \leq k|v|$  al variare comunque di  $v$  in  $N^1(\Omega)$  essendo  $k$  una costante indipendente da  $v$ .

Si verifica che  $\Lambda$  è autoaggiunto; indicando con  $\{E_\lambda\}$  la famiglia di proiettori che interviene nella rappresentazione spettrale di  $\Lambda$ , poniamo  $u_\lambda = E_\lambda u$ . Si verifica facilmente che  $u_\lambda$  gode delle proprietà (α), (β), (γ), (δ) richieste.

**LEMMA 3.** - Per le coppie di punti  $\tau'$ ,  $\tau'' \in T_u$  (cfr. lemma 1) vale la seguente relazione (dell'energia)

$$(5) \quad \frac{1}{2} |u(\tau'')|^2 - \frac{1}{2} |u(\tau')|^2 + \mu \int_{\tau'}^{\tau''} \|u(t)\|^2 dt = \int_{\tau'}^{\tau''} (f(t), u(t)) dt.$$

Indichiamo con  $J_\varepsilon$  ( $\varepsilon$  parametro reale  $> 0$ ) un operatore di regolarizzazione, operante su funzioni di  $t$ , ( $-\infty < t < +\infty$ ) con valori in uno spazio di Banach  $B$ , così definito:

$$J_\varepsilon g(t) = \varepsilon^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} K(\varepsilon^{-1}(t - \xi)) g(\xi) d\xi$$

dove  $k$  è una funzione reale non negativa, pari, indefinitamente derivabile, nulla fuori di un intervallo limitato. Se  $g(t) \in L_{loc}^p(-\infty, +\infty; B)$  ( $\infty > p \geq 1$ ), è  $J_\varepsilon g(t) \in L_{loc}^p(-\infty, +\infty; B)$  e si ha  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J_\varepsilon(g) = g(t)$ , sempre in  $L_{loc}^p(-\infty, +\infty; B)$ .

Per ogni numero reale  $\lambda$ , consideriamo l'operatore di proiezione  $E_\lambda$  introdotto nel lemma 2. Esso rappresenta una applicazione continua  $N(\Omega) \rightarrow N^1(\Omega)$ . Ponendo  $u_\lambda(t) = E_\lambda u(t)$ , se  $u(t) \in L^\infty(0, \tau; N(\Omega))$  si ha  $u_\lambda(t) \in L^\infty(0, \tau; N^1(\Omega))$ . Se  $v(t)$  è una funzione definita per  $-\infty < t < +\infty$ , con valori nello spazio  $N(\Omega)$ , localmente sommabile, si ha evidentemente  $E_\lambda J_\varepsilon v = J_\varepsilon E_\lambda v$ ; se  $v(t)$  ha derivata localmente sommabile, come funzione con valori in  $N(\Omega)$ , si ha poi  $\frac{d}{dt} E_\lambda v(t) = E_\lambda \frac{d}{dt} v(t)$ .

Consideriamo dunque la relazione (4) essendo  $\tau', \tau'' \in T_u$ . Imitando un procedimento seguito nel lavoro [4], indichiamo con  $u^*(t)$  una funzione definita per  $-\infty < t < +\infty$ , lineare rispetto a  $t$ , con valori in  $N(\Omega)$ , coincidente con  $u(t)$  agli estremi dell'intervallo  $(\tau' \dashv \vdash \tau'')$ . Indichiamo poi con  $w(t)$  una funzione definita per  $-\infty < t < +\infty$  nulla per  $t \leq \tau'$  e per  $t \geq \tau''$ , coincidente con  $u(t) - u^*(t)$  nell'intervallo  $\tau' \dashv \vdash \tau''$ .

Poniamo  $u_\varepsilon(t) = u^*(t) + J_\varepsilon^2 w(t)$ ,  $u_\lambda(t) = E_\lambda u(t)$ ,  $u_\lambda^*(t) = E_\lambda u^*(t)$ ,  $w_\lambda(t) = E_\lambda w(t)$ ,  $u_{\lambda\varepsilon}(t) = E_\lambda u_\varepsilon(t) = u_\lambda^*(t) + E_\lambda J_\varepsilon^2 w(t) = u_\lambda^*(t) + J_\varepsilon^2 w_\lambda(t)$ ,

Prendiamo ora, nella (4),  $v(t) = u_{\lambda\varepsilon}(t)$ , essendo evidente che questa funzione soddisfa alle condizioni volute dal lemma 2. Facciamo quindi tendere  $\varepsilon$  a zero; per comodità studieremo il comportamento al limite di alcuni termini separatamente. Si ha dapprima

$$\begin{aligned} & [(u(t), u_{\lambda\varepsilon}(t))]_{t=\tau'}^{t=\tau''} - \int_{\tau'}^{\tau''} (u(t), u'_{\lambda\varepsilon}(t)) dt = [(u_\lambda(t), u_{\lambda\varepsilon}(t))]_{t=\tau'}^{t=\tau''} - \\ & - \int_{\tau'}^{\tau''} (u_\lambda(t), u'_{\lambda\varepsilon}(t)) dt = [(u_\lambda(t), u_\lambda^*(t) + J_\varepsilon^2 w_\lambda(t))]_{t=\tau'}^{t=\tau''} - \\ & - \int_{\tau'}^{\tau''} (u_\lambda^*(t) + w_\lambda(t), \frac{d}{dt} u_\lambda^*(t) + \frac{d}{dt} J_\varepsilon^2 w_\lambda(t)) dt = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= |u_\lambda(\tau'')|^2 - |u_\lambda(\tau')|^2 + [(u_\lambda(t), J_\varepsilon^2 w_\lambda(t))]_{t=\tau'}^{t=\tau''} - \frac{1}{2} [ |u_\lambda^*(t)|^2 ]_{t=\tau'}^{t=\tau} - \\
&\quad - \int_{\tau'}^{\tau''} \left( w_\lambda(t) - J_\varepsilon^2 w_\lambda(t), \frac{d}{dt} u_\lambda^*(t) \right) dt - [(u_\lambda^*(t), J_\varepsilon^2 w_\lambda(t))]_{t=\tau'}^{t=\tau''} - \\
&\quad - \int_{\tau'}^{\tau''} (w_\lambda(t), \frac{d}{dt} J_\varepsilon^2 w_\lambda(t)) dt = \frac{1}{2} |u_\lambda(\tau'')|^2 - \frac{1}{2} |u_\lambda(\tau')|^2 - \\
&\quad - \int_{\tau'}^{\tau''} (w_\lambda(t) - J_\varepsilon^2 w_\lambda(t), \frac{d}{dt} u_\lambda^*(t)) dt - \int_{\tau'}^{\tau''} (w_\lambda(t), \frac{d}{dt} J_\varepsilon^2 w_\lambda(t)) dt.
\end{aligned}$$

In questa espressione il primo dei due integrali è infinitesimo al tendere di  $\varepsilon$  a zero. Infatti è  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J_\varepsilon^2 w_\lambda(t) = w_\lambda(t)$  in  $L^2(0, \tau; N(\Omega))$ . Consideriamo ora l'ultimo integrale; esso è nullo per ogni valore di  $\varepsilon$ . Infatti

$$\begin{aligned}
\int_{\tau'}^{\tau''} (w_\lambda(t), \frac{d}{dt} J_\varepsilon^2 w_\lambda(t)) dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} (w_\lambda(\cdot), \frac{d}{dt} J_\varepsilon^2 w_\lambda(t)) dt = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} (J_\varepsilon w_\lambda(t), \frac{d}{dt} J_\varepsilon w_\lambda(t)) dt = 0.
\end{aligned}$$

Pertanto, al tendere di  $\varepsilon$  a zero, il gruppo di termini considerato converge verso  $\frac{1}{2} |u_\lambda(\tau'')|^2 - \frac{1}{2} |u_\lambda(\tau')|^2$ . Per il termine successivo abbiamo

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mu \int_{\tau'}^{\tau''} ((u(t), u_{\lambda\varepsilon}(t))) dt = \mu \int_{\tau'}^{\tau''} ((u(t), u_\lambda(t))) dt.$$

Infatti è  $u_{\lambda\varepsilon} = u_\lambda^*(t) + J_\varepsilon^2 w_\lambda(t)$ ; ora, come si verifica facilmente,  $J_\varepsilon^2 w_\lambda(t)$  converge verso  $w_\lambda(t)$  in  $L^2(\tau', \tau''; N^1(\Omega))$ . Si ha poi, applicando la proprietà ( $\gamma$ ) dell'operatore di proiezione  $E_\lambda$  (cfr. lemma 2),

$$\mu \int_{\tau'}^{\tau''} ((u(t), u_\lambda(t))) dt = \mu \int_{\tau'}^{\tau''} \|u_\lambda(t)\|^2 dt.$$

Passando all'ultimo termine a primo membro, abbiamo

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\tau'}^{\tau''} b(u(t), u(t), u_{\lambda\varepsilon}(t)) dt = \int_{\tau'}^{\tau''} b(u(t), u(t), u_{\lambda}(t)) dt.$$

Infatti si ottiene, per la (2)

$$\begin{aligned} \left| \int_{\tau'}^{\tau''} b(u(t), u(t), u_{\lambda\varepsilon}(t) - u_{\lambda}(t)) dt \right| &\leq \int_{\tau'}^{\tau''} |u(t)|_{L^4(\Omega)} \|u(t)\| |u_{\lambda\varepsilon}(t) - \\ &- u_{\lambda}(t)|_{L^4(\Omega)} dt \leq \left\{ \int_{\tau'}^{\tau''} |u(t)|_{L^4(\Omega)}^4 dt \right\}^{\frac{1}{4}} \left\{ \int_{\tau'}^{\tau''} \|u(t)\|^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \left\{ \int_{\tau'}^{\tau''} |u_{\lambda\varepsilon}(t) - u_{\lambda}(t)|_{L^4(\Omega)}^4 dt \right\}^{\frac{1}{4}}. \end{aligned}$$

Applicando la (1) all'ultimo fattore, si trova facilmente che esso è infinitesimo al tendere di  $\varepsilon$  a zero.

Si constata poi immediatamente che

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\tau'}^{\tau''} (f(t), u_{\lambda\varepsilon}(t)) dt = \int_{\tau'}^{\tau''} (f(t), u_{\lambda}(t)) dt.$$

Dai risultati ottenuti si ricava la relazione

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} |u_{\lambda}(\tau'')|^2 - \frac{1}{2} |u_{\lambda}(\tau')|^2 + \mu \int_{\tau'}^{\tau''} \|u_{\lambda}(t)\|^2 dt + \\ + \int_{\tau'}^{\tau''} b(u(t), u(t), u_{\lambda}(t)) dt = \int_{\tau'}^{\tau''} (f(t), u_{\lambda}(t)) dt. \end{aligned}$$

Facciamo ora tendere  $\lambda$  a  $+\infty$ . Per la proprietà ( $\beta$ ) (lemma 2) si ha  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} |u_{\lambda}(t)|^2 = |u(t)|^2$ . Inoltre è, per la ( $\gamma$ ) e ( $\delta$ ),  $\|u_{\lambda}(t)\|^2 \leq \|u(t)\|^2$ ,  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \|u_{\lambda}(t)\|^2 = \|u(t)\|^2$ . Si può dunque applicare all'integrale  $\int_{\tau'}^{\tau''} \|u_{\lambda}(t)\|^2 dt$  il teorema di Lebesgue. In base a considerazioni analoghe a quella fatte per



il limite (6) si vede che anche nell'integrale  $\int_{\tau'}^{\tau''} b(u(t), u(t), u_\lambda(t)) dt$  si può passare al limite sotto il segno. Poichè è identicamente  $b(u(t), u(t), u(t)) = 0$ , tale limite è nullo. Per l'integrale a secondo membro, il passaggio al limite è banale.

La (5) risulta dunque dimostrata.

Dalla (5) possiamo ora trarre alcune importanti conseguenze.

Anzitutto, fissata una funzione  $u(t)$ , soluzione debole nell'intervallo  $(0 \mid \tau)$ , sull'insieme  $T_u$  la funzione  $|u(t)|^2$  risulta limitata. Ritorniamo ora alla (4), valida per ogni  $\tau', \tau'' \in T_u$  e prendiamo  $v(t) = w \in N^1(\Omega)$ , costante rispetto a  $t$ . Si ha immediatamente, per ogni  $\tau^* \in (0 \mid \tau)$ ,

$$\lim_{\substack{\tau', \tau'' \rightarrow \tau^* \\ (\tau', \tau'' \in T_u)}} [(u(\tau''), w) - (w(\tau'), w)] = 0.$$

Poichè  $N^1(\Omega)$  è denso in  $N(\Omega)$ , questa relazione, unita con la limitatezza di  $|u(t)|^2$  ci dice che  $u(t)$  risulta debolmente continua nell'insieme  $T_u$  e che la sua definizione può essere modificata nei restanti punti, in modo che essa risulti debolmente continua in tutto l'intervallo  $(0 \mid \tau)$ .

Con questa premessa si può allora evidentemente affermare la validità della (4) ogni coppia di punti  $\tau', \tau'' \in (0 \mid \tau)$ , per funzioni  $v(t)$  soddisfacenti sempre alle condizioni (a) e (b). Osserviamo ora che nella dimostrazione del lemma 3 abbiamo utilizzato esclusivamente la (4), senza far ricorso direttamente ad alcuna proprietà di limite della  $u(t)$  per  $t \rightarrow \tau', \tau''$ . Se dunque la (4) vale senza alcuna restrizione, ripetendo letteralmente la dimostrazione del lemma 3 possiamo concludere che anche la (5) vale per ogni coppia di punti  $\tau', \tau''$  compresi nell'intervallo  $(0 \mid \tau)$  perciò  $|u(t)|$  è continua. D'altra parte, per noti risultati sugli spazi di Hilbert, la continuità debole unita alla continuità della norma implica la continuità forte. Possiamo riassumere quanto detto nel seguente enunciato.

**TEOREMA 1.** - *Le soluzioni deboli definite nell'intervallo  $(0 \mid \tau)$ , modificate eventualmente in un sottoinsieme di misura nulla, risultano (fortemente) continue come funzioni di*

$t$  con valori in  $N(\Omega)$ . Inoltre per ogni coppia di punti  $\tau', \tau''$  contenuti in detto intervallo vale la (5).

D'ora in poi, parlando di soluzioni deboli, intenderemo che esse siano definite in modo da risultare continue in  $N(\Omega)$ .

**OSSERVAZIONE.** Il risultato espresso in questo teorema si può estendere al caso 3-dimensionale a patto di aggiungere l'ipotesi:  $u(t) \in L^4(0, \tau; L^4(\Omega))$ . Nel caso 2-dimensionale questa relazione, in virtù della (1), è conseguenza delle ipotesi ammesse per la  $u(t)$ .

**PROBLEMA MISTO.** *Il problema misto (secondo Hadamard) consiste ora nel trovare la soluzione debole definita per  $0 \leq t \leq \tau$  che per  $t = 0$  assume un valore prescritto in  $N(\Omega)$ . Nella nota [3] è dimostrato che questo problema ha una ed una sola soluzione<sup>1)</sup>. La dimostrazione si può facilmente adattare a mettere in evidenza anche la dipendenza continua della soluzione dai valori iniziali in  $N(\Omega)$ . Oltre a ciò noi dimostreremo il seguente*

**TEOREMA 2.** - *Nell'ipotesi che il campo  $\Omega$  sia limitato, la soluzione del problema misto, per un fissato  $t \geq 0$ , dipende con continuità dai valori iniziali, nella topologia debole di  $N(\Omega)$ .*

Premettiamo un importante lemma di E. Hopf, che enunceremo nella forma più adatta per il nostro scopo

**LEMMA 4.** - *Sia  $\{u_n(t)\}$  una successione di funzioni con  $u_n(t) \in L^\infty(0, \tau; N(\Omega)) \cap L^2(0, \tau; N^1(\Omega))$ , dove  $\Omega$  è un campo limitato. Si supponga inoltre che le norme, in entrambi questi*

---

(1) La formulazione del problema in [3] presenta qualche differenza rispetto a quella qui adottata, nella definizione delle varietà corrispondenti alla  $N(\Omega)$  e  $N^1(\Omega)$ . Comunque, anche prescindendo dal fatto che, almeno per campi sufficientemente regolari, le due definizioni coincidono, si vede immediatamente che la dimostrazione ivi svolta si adatta, negli stessi termini, alla formulazione presente.

spazi, siano limitate e che  $u_n(t)$  converga debolmente in  $N(\Omega)$ , per ogni  $t \in (0, \tau)$ , verso una funzione  $u(t)$ . Allora la successione  $\{u_n(t)\}$  converge verso  $u(t)$  fortemente in  $L^2(0, \tau; N(\Omega))$ .

Per la dimostrazione, rimandiamo al lavoro [1]<sup>2)</sup>.

Sia dunque  $\{a_n\}$  una successione di elementi di  $N(\Omega)$ , convergente debolmente verso  $a$ . Indichiamo con  $\{u_n(t)\}$  la successione delle soluzioni tali che  $u_n(0) = a_n$ , con  $u(t)$  la soluzione tale che  $u(0) = a$ . Per dimostrare che, fissato  $t \geq 0$ ,  $\{u_n(t)\}$  converge debolmente verso  $u(t)$ , procederemo in questo modo: dimostreremo che da una qualsiasi successione parziale estratta da  $\{u_n(t)\}$  si può estrarre una nuova successione parziale convergente debolmente verso  $u(t)$ .

Indicata, per semplicità, ancora con  $\{u_n(t)\}$  una successione parziale, cominciamo col dimostrare che da essa si può estrarre una ulteriore successione parziale debolmente convergente in  $N(\Omega)$  per ogni fissato  $t$ , fortemente convergente in  $L^2(0, \tau; N(\Omega))$  e debolmente convergente in  $L^2(0, \tau; N^1(\Omega))$ . Applicando la (5) si vede facilmente che  $|u_n(t)|$  è limitata al variare di  $n$  e di  $t$ . Prendiamo dunque un elemento  $w \in N^1(\Omega)$  (fisso al variare di  $t$ ). In virtù della (5), abbiamo, per ogni coppia di punti  $t', t'' \in (0, \tau)$ , ( $t' \leq t''$ ):

$$\begin{aligned} (u_n(t''), w) - (u_n(t'), w) &= - \int_{t'}^{t''} \{ \mu(u_n(t), w) + \\ &+ b(u_n(t), u_n(t), w) \} dt + \int_{t'}^{t''} (f(t), w) dt. \end{aligned}$$

Da questa, tenendo presenti le diseguaglianze (1), (2) e la

(2) La dimostrazione, del resto, si ottiene facilmente notando che: I) preso un  $\varepsilon > 0$  si può trovare un  $\lambda > 0$  tale che (con le notazioni del lemma 2) si abbia per ogni  $u \in N(\Omega)$ :  $u^2 \leq \lambda E_\lambda u^2 + \varepsilon \|u\|^2$  II) essendo  $\Omega$  limitato, il proiettore  $E_\lambda$  è completamente continuo.

relazione  $b(u, v, w) = -b(u, w, v)$ , si ottiene:

$$\begin{aligned} |(u_n(t''), w) - (u_n(t'), w)| &\leq \int_{t'}^{t''} (\mu \|u_n(t)\| \|w\| + \\ &+ \|u_n(t)\|_{L^4(\Omega)}^2 \|w\|) dt + |w| \int_{t'}^{t''} |f(t)| dt \leq \\ &\leq \|w\| \int_{t'}^{t''} (\mu + \|u_n(t)\|) \|u_n(t)\| dt + |w| \int_{t'}^{t''} |f(t)| dt. \end{aligned}$$

Indicando con  $M$  l'estremo superiore di  $\mu + |u_n(t)|$  per  $n = 1, 2, 3, \dots; t \in (0, \tau)$  si ha

$$\begin{aligned} |(u_n(t''), w) - (u_n(t'), w)| &\leq \\ &\leq \|w\| M \left\{ \int_0^\tau \|u_n(t)\|^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}} (t'' - t')^{\frac{1}{2}} + |w| \int_{t'}^{t''} |f(t)| dt. \end{aligned}$$

Da questa maggiorazione risulta che la successione  $\{(u_n(t), w)\}$  è costituita di funzioni egualmente continue; da essa si può estrarre una successione parzialmente uniformemente convergente. Preso ora un insieme numerabile  $\{w_j\}$  di elementi di  $N^1(\Omega)$ , denso in  $N^1(\Omega)$ , utilizzando il consueto procedimento diagonale, si può trovare una successione parzialmente  $\{u_n(t)\}$  tale che  $\{(u_n(t), w_j)\}$  converga, uniformemente rispetto a  $t$ , per ogni  $j$ . Tenendo conto del fatto che  $|u_n(t)|$  è limitato al variare di  $t$  ed  $n$ , si ha subito la convergenza di  $\{u_n(t)\}$  nella topologia debole di  $N(\Omega)$ , uniformemente al variare di  $t$ . Sia  $u^*(t)$  la funzione limite.

Possiamo poi imporre, evidentemente, alla successione  $\{u_{n_k}(t)\}$  di convergere debolmente (verso  $u^*(t)$ ) in  $L^2(0, \tau; N^1(\Omega))$ .

Per ogni  $t \in (0, \tau)$  e per ogni indice  $n_k$ , presa comunque una funzione  $v(t)$  soddisfacente alle condizioni (a) e (b), vale l'eguaglianza:

$$\begin{aligned} (u_{n_k}(t), v(t)) - (u_{n_k}, v(0)) + \int_0^t \{ - (u_{n_k}(\eta), v(\eta)) + \\ + \mu(u_{n_k}(\eta), v(\eta)) + b(u_{n_k}(\eta), u_{n_k}(\eta), v(\eta)) \} d\eta = \int_0^t (f(\eta), v(\eta)) d\eta. \end{aligned}$$

Si ha ora, per le proprietà della successione  $\{u_{n_k}(t)\}$

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} (u_{n_k}(t), v(t)) &= (u^*(t), v(t)) \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^t (u_{n_k}(\eta), v'(\eta)) d\eta &= \int_0^t (u^*(\eta), v'(\eta)) d\eta \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^t ((u_{n_k}(\eta), v(\eta))) d\eta &= \int_0^t ((u^*(\eta), v(\eta))) d\eta. \end{aligned}$$

Dimostriamo che

$$(7) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^t b(u_{n_k}(\eta), u_{n_k}(\eta), v(\eta)) d\eta = \int_0^t b(u^*(\eta), u^*(\eta), v(\eta)) d\eta.$$

Si può scrivere:

$$\begin{aligned} & \int_0^t b(u_{n_k}(\eta), u_{n_k}(\eta), v(\eta)) d\eta - \int_0^t b(u^*(\eta), u^*(\eta), v(\eta)) d\eta = \\ &= \int_0^t b(u_{n_k}(\eta) - u^*(\eta), u_{n_k}(\eta), v(\eta)) d\eta + \\ &+ \int_0^t b(u^*(\eta), u_{n_k}(\eta) - u^*(\eta), v(\eta)) d\eta. \end{aligned}$$

L'ultimo integrale è infinitesimo perchè  $\{u_{n_k}(t)\}$  converge debolmente verso  $u^*(\eta)$  in  $L^2(0, \tau; N^1(\Omega))$ ; consideriamo il primo integrale. Si ha:

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^t b(u_{n_k}(\eta) - u^*(\eta), u_{n_k}(\eta), v(\eta)) d\eta \right| \leq \\ & \leq \int_0^t |u_{n_k}(\eta) - u^*(\eta)|_{L^4(\Omega)} \|u_{n_k}(\eta)\| |v(\eta)|_{L^4(\Omega)} d\eta. \end{aligned}$$

Poichè  $|v(\eta)|_{L^4(\Omega)}$  si mantiene limitato, applicando la disuguaglianza di Schwarz basterà dimostrare che

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^t |u_{n_k}(\eta) - u^*(\eta)|_{L^4(\Omega)}^2 d\eta = 0.$$

Per la (1) abbiamo

$$\begin{aligned} \int_0^t |u_{n_k}(\eta) - u^*(\eta)|_{L^4(\Omega)}^2 d\eta &\leq 2^{1/2} \int_0^t |u_{n_k}(\eta) - u^*(\eta)| \|u_{n_k}(\eta) - \\ &- u^*(\eta)\| d\eta \leq 2^{1/2} \left\{ \int_0^t |u_{n_k}(\eta) - u^*(\eta)|^2 d\eta \right\}^{1/2} \\ &\left\{ \int_0^t \|u_{n_k}(\eta) - u^*(\eta)\|^2 d\eta \right\}^{1/2} \end{aligned}$$

Poichè il lemma 4 ci assicura la convergenza di  $u_{n_k}(t)$  in  $L^2(0, \tau; N(\Omega))$  questa ultima espressione è infinitesima. Resta pertanto dimostrata la (7).

La funzione limite  $u^*(t)$  soddisfa allora all'equazione

$$\begin{aligned} (u^*(t), v(t)) - (a, v(0)) + \int_0^t \{ - (u^*(\eta), v'(\eta)) + \mu((u^*(\eta), v(\eta))) + \\ + b(u^*(\eta), u^*(\eta), v(\eta)) \} d\eta = \int_0^t (f(\eta), v(\eta)) d\eta. \end{aligned}$$

Quindi  $u^*(t)$  è soluzione del problema misto corrispondente al valore iniziale  $a$ . Poichè questa è unica si ha  $u^*(t) = u(t)$ . Resta perciò dimostrata la convergenza della successione estratta verso  $u(t)$ .

Il teorema 2 è utile nella risoluzione del seguente problema.

**PROBLEMA DELLE SOLUZIONI PERIODICHE.** *Supponiamo che  $f(t) \in L^2_{loc}(-\infty, +\infty; L^2(\Omega))$  e che sia periodica con periodo 1. Si domanda se esiste una funzione  $u(t) \in L^\infty(-\infty, +\infty; N(\Omega))$ ,*

$\in L^2_{loc}(-\infty, +\infty; N^1(\Omega))$ , periodica con periodo 1 che soddisfi alla

$$(8) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \{ - (u(t), v'(t)) + \mu((u(t), v(t))) + b(u(t), u(t), v(t)) \} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} (f(t), v(t)) dt$$

per ogni  $v(t)$  che sia: (a\*) continua come funzione con valori in  $N_1(\Omega)$ , (b\*) derivabile con derivata  $v'(t) \in L^2(-\infty, +\infty; N(\Omega))$ , (c\*) nulla fuori di un intervallo finito.

Cominciamo col dimostrare il

**LEMMA 5.** - *Condizione necessaria e sufficiente affinché una funzione continua con valori in  $N(\Omega)$ ,  $\in L^2_{loc}(-\infty, +\infty; N^1(\Omega))$ , periodica di periodo 1, sia soluzione del problema posto è che essa sia una soluzione debole nell'intervallo  $(0-1)$ .*

La necessità è ovvia; per dimostrare la sufficienza, consideriamo una qualunque funzione  $v(t)$  soddisfacente alle (a\*) (b\*) (c\*).

La  $u(t)$  soddisfa, per ipotesi, alla (5) nell'intervallo  $(0-1)$ ; prendiamo  $\tau' = 0$ ,  $\tau'' = 1$ . Per la periodicità di  $u(t)$  e di  $f(t)$  si avrà, preso un intero  $k$  qualsiasi,

$$\begin{aligned} (u(k), v(k)) - (u(k-1), v(k-1)) + \int_{k-1}^k \{ - (u(t), v'(t)) + \\ + \mu((u(t), v(t))) + b(u(t), u(t), v(t)) \} dt = \int_{k-1}^k (f(t), v(t)) dt. \end{aligned}$$

Sommando membro a membro rispetto a  $k$  (i termini diversi da zero saranno solo in numero finito), si ottiene la (8).

Indichiamo con  $T$  la trasformazione di  $N(\Omega)$  in sè così definita:  $T(a) = u(1)$ , dove  $u(t)$  è soluzione del problema misto individuata dalla condizione  $u(0) = a$ .

**LEMMA 6.** - *Se  $\Omega$  è limitato la trasformazione  $T$  muta in sè ogni sfera di raggio sufficientemente grande e centro nell'origine di  $N(\Omega)$ .*

Indicando con  $c$  la costante dell'immersione  $N^1(\Omega) \rightarrow N(\Omega)$ , applicando la (5), (valida come abbiamo visto, per ogni coppia  $\tau', \tau'' \in (0 \rightarrow 1)$ ) si ottiene facilmente

$$|u(1)| = |T(a)| \leq |a| e^{-c\mu} + \int_0^t e^{-c\mu(1-\tau)} |f(\tau)| d\tau \leq |a| e^{-c\mu} + \int_0^1 |f(\tau)| d\tau.$$

Basterà allora considerare in  $N(\Omega)$  una sfera chiusa  $\Sigma_R$  con centro nell'origine e raggio  $R \geq (1 - e^{-c\mu})^{-1} \int_0^1 |f(\tau)| d\tau$  per ottenere che la trasformazione  $T$  la muti in sè.

Siamo ora in grado di dare una risposta al problema delle soluzioni periodiche almeno per quanto riguarda l'esistenza.

Per il lemma 5 il problema è ricondotto a quello della ricerca dei punti uniti della trasformazione  $T$  in  $N(\Omega)$ . La sfera  $\Sigma_R$ , che viene mutata in sè dalla  $T$ , è compatta nella topologia debole ed è, evidentemente, un insieme convesso. Il teorema 2 assicura che  $T$  è continua nella topologia debole. Applicando il noto teorema di Tychonov, si conclude:

**TEOREMA 3.** - *Nell'ipotesi che  $\Omega$  sia limitato, esiste almeno una soluzione periodica.*

#### BIBLIOGRAFIA

- [1] E. HOPF: *Über die Anfangswertaufgabe für die hydrodynamischen Grundgleichungen*. Math. Nachr. 4, 213-231 (1951).
- [2] O. A. LADYZENSKAJA: *Soluzione «in grande» del problema al contorno per l'equazione di Navier-Stokes in due variabili spaziali*. Dokl. Akad. Nauk. S.S.S.R. 123, 427-429 (1958).
- [3] J. L. LIONS e G. PRODI: *Un théorème d'existence et unicité dans les équations de Navier-Stokes en dimension 2*. C.R.A.S. 248, 3519-3521 (1959).
- [4] G. PRODI: *Un teorema di unicITÀ per le equazioni di Navier-Stokes*. Annali di Matematica, 48, 173-182 (1959).
- [5] G. PRODI: *Rassegna di ricerche intorno alle equazioni di Navier-Stokes*. Istituto di Matematica della Università di Trieste. Quaderno n. 2 (1959).