RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

UGO BARBUTI

Sulla teoria della migliore approssimazione nel senso di Tchebychev. Nota I

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 30 (1960), p. 82-96

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1960__30__82_0>

SULLA TEORIA DELLA MIGLIORE APPROSSIMAZIONE NEL SENSO DI TCHEBYCHEV

Nota I (*) *di* Ugo Barbuti (*a Pisa*)

Sia S uno spazio topologico separato (o di Hausdorff) compatto [1]) e indichiamo con x un suo punto qualunque. Consideriamo lo spazio di Banach $\mathfrak{C}$ delle funzioni reali continue definite su S [2]). Sia $\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{C}$ un sottospazio di $\mathfrak{C}$ i punti del quale indicheremo con $p(x)$.

Sia $f(x) \in \mathfrak{C}$ una assegnata funzione; si definisce elemento di migliore approssimazione o di minima deviazione (nel senso di Tchebychev) di $f(x)$ in $\mathfrak{S}$ ogni funzione $\tau(x) \in \mathfrak{S}$ per la quale, posto:

$$\mu = \operatorname*{Max}_{x \in S} | f(x) - \tau(x) |,$$

riesce

$$\mu \leq \operatorname*{Max}_{x \in S} | f(x) - p(x) | \quad \text{per } p(x) \in \mathfrak{S};$$

scriveremo in questo circostanze:

$$f(x) \backsim \tau(x)$$

e chiameremo μ (migliore) scarto [3]) o deviazione.

(*) Pervenuta in Redazione il 17 gennaio 1960.

Indirizzo dell'A.: Istituto matematico, Università, Pisa.

1) Diciamo compatto S se esso soddisfa all'assioma di Heine-Pincherle-Borel, cioè se ogni ricoprimento aperto di S contiene un ricoprimento finito. (Cfr. ad es. [1] a p. 100). Alcuni autori chiamano bicompatto lo spazio S munito della detta proprietà.

2) Definiremo, come usualmente, norma di $f(x) \in \mathfrak{C}$ $\operatorname{Max} | f(x) |$ per $x \in S$. Ricordiamo che in uno spazio S di Hausdorff compatto $| f(x) |$ ammette massimo su S (Cfr., ad es., [2] a p. 43).

3) Osserviamo che è $\mu = 0$ allora e solo che $f(x) \in \mathfrak{S}$.

Denoteremo poi con $E_f(\tau)$ l'insieme dei punti di S definiti da:

$$E_f(\tau) = \{ x : | f(x) - \tau(x) | = \mu \} \text{ (4)}$$

In ordine al problema della esistenza di elementi τ di minima deviazione in $\mathfrak{S}$ e allo studio delle proprietà di queste funzioni, in queste generalità di dati, interessanti risultati sono stati conseguiti da vari autori, in notevole parte russi. Scopo di questa nota è, anche se non il solo, essenzialmente quello di mettere in luce col Teor. 2 una proprietà riguardanti i valori assunti dalla $f(x) \in \mathfrak{S}$ nell'insieme dei punti $E_f(\tau)$, relativo a qualunque elemento di migliore approssimazione in $\mathfrak{S}$.

Questo teorema e la sua estensione al Teor. 3 sono la chiave di varie e immediate proposizioni, tutte riferentesi all'insieme $E_f(\tau)$; tra esse: il Teor. 4 dà una caratterizzazione degli elementi τ in $\mathfrak{S}$ per una data $f(x)$, il Teor. 5 pone in evidenza una relazione tra il numero dei punti (e la potenza) dell'insieme $E_f(\tau)$ ed il numero dei punti (o la potenza) degli insiemi di S ove è possibile in $\mathfrak{S}$ il problema della interpolazione; il Teor. 6 dà infine un criterio d'unicità per $\tau(x)$. Con queste proposizioni si ritrovano, particolarizzando $\mathfrak{S}$ e S, risul tati noti.

Esistenza di elementi τ in $\mathfrak{S}$.

1. - Assegnata una $f(x) \in \mathcal{C}$, noi ammetteremo per il seguito che esista in $\mathfrak{S}$ almeno un elemento τ di migliore approssimazione. Se per altro le funzioni $p(x) \in \mathfrak{S}$ dipendono da un numero finito o da una infinità di parametri (reali o complessi) $\{a_n\}_{n \in N}$[5]) ed S è metrico può darsi un teorema di esistenza per $\tau(x)$, utilizzando un noto ragionamento [6]).

---

4) Considereremo anche gli insiemi:

$$E_f^+(\tau) = \{ x : f(x) - \tau(x) = \mu \}, \qquad E_f^-(\tau) = \{ x : f(x) - \tau(x) = -\mu \}.$$

5) N denota la successione dei numeri interi e positivi.

6) Questo ragionamento trovasi in [3]; si veda anche L. Tonelli in [4] a p. 55. L'ipotesi che S sia metrico è utilizzata solo nel n. 1.

All'uopo si consideri lo spazio delle successioni (reali o complesse), introducendo per l'elemento generico $a = \{a_n\}_{n \in N}$ la norma $\| a \| = \operatorname*{Sup}_{n \in N} | a_n |$. Tale spazio, che risulta uno spazio di Banach, lo diremo S_1.

Detti poi $z' = (x', a')$, $z'' = (x'', a'')$ due punti qualsiasi dello spazio $S \times S_1$ e introdotto ivi la funzione $\overline{z'z''} = \overline{x'x''} + \overline{a'a''}$, dove $\overline{x'x''} = \| x' - x'' \|$ e $\overline{a'a''} = \| a' - a'' \|$, si trova facilmente che per essa i noti assiomi di una metrica per $S \times S_1$ sono verificati. Si può ora dimostrare il seguente:

TEOR. 1 [7]). - *Se $p(x, a)$ è continua nello spazio $S \times S_2$ (essendo S_2 un sottospazio compatto di S_1) e se per $a \in S_2$ riesce* [8]):

$$\| a \| \leq k m(a), \tag{1}$$

ove $m(a) = \operatorname{Max} | p(x, a) |$ su S e k una costante indipendente da a, allora esiste per $f(x) \in \mathcal{C}$ [9]) *almeno un elemento di migliore approssimazione $\tau(x)$ in $\mathfrak{F}$.*

Poniamo per $a \in S_2$

$$M(a) = \operatorname*{Max}_{x \in S} | f(x) - p(x, a) | \tag{2}$$

e dimostriamo, in primo luogo, che esiste un opportuno insieme $S_2' \subseteq S_2$ chiuso (e quindi anche compatto [10])) e tale che in esso riesce:

$$\inf_{a \in S_2'} M(a) = \inf_{a \in S_2} M(a). \tag{3}$$

---

[7]) Per l'esistenza delle funzioni $\tau(x)$ sempre nel caso che S sia metrico e compatto e $\mathfrak{F}$ una varietà lineare di dimensione finita di funzioni reali continue su S, si veda S. I. Zuhovickii [5].

[8]) La (1) si realizza facilmente nel caso che $\mathfrak{F}$ sia una varietà lineare di dimensione finita $p_1(x)$, $p_2(x)$, ..., $p\ (x)$, se per essa esistono in S n punti distinti x_i $(i = 1, 2, ..., n)$ in modo che il determinante della matrice $(p_j(x_i))$ $(i, j = 1, 2, ..., n)$ sia diverso da zero. Basta allo scopo ripetere un noto ragionamento. Cfr., ad es., [4] a p. 61.

[9]) $f(x)$ può essere reale o complessa.

[10]) Cfr., ad es., [1] a pag. 102.

Posto $\mu = \inf\limits_{a \in S_2} M(a)$, poichè in $\mathfrak{S}$ esiste lo zero, si ha per la (2):

$$\mu \leq \underset{x \in S}{\mathrm{Max}} \, | f(x) | = L.$$

Si prenda l'insieme $\bar{S}_2 \subseteq S_2$ e definito da:

$$\bar{S}_2 = \{ a : M(a) \leq L \} ; \tag{4}$$

In $\bar{S}_2$ è intanto vera la (3) (sostituendo $\bar{S}_2$ a S_2'): infatti, posto: $\bar{\mu} = \inf\limits_{a \in \bar{S}_2} M(a)$, ove fosse $\bar{\mu} > \mu$, esisterebbe un $a^0 \in S_2$ almeno, tale da riuscire:

$$\mu \leq M(a^0) < \bar{\mu} ; \tag{5}$$

poichè (si veda la (4)) $\bar{\mu} \leq L$, si avrebbe $M(a^0) < L$ cioè, per la (4), a^0 apparterrebbe a $\bar{S}_2$ e ciò è assurdo per la (5), dovendo essere per ogni $a \in \bar{S}_2 : M(a) \geq \bar{\mu}$. Sia ora a un punto di $\bar{S}_2$ e consideriamo per tale a la funzione $p(x, a)$. Avremo per la (4):

$$| p(x, a) | \leq | f(x) | + | p(x, a) - f(x) | \leq L + M(a) \leq 2L$$

e quindi anche:

$$\underset{x \in S}{\mathrm{Max}} \, | p(x, a) | = m(a) \leq 2L. \qquad (a \in \bar{S}_2)$$

Utilizzando quest'ultima, dalla ipotesi (1) segue:

$$\| a \| \leq 2Lk, \qquad (a \in \bar{S}_2) \tag{6}$$

ove il secondo membro non dipende da a. Consideriamo ora l'insieme chiuso S_2' di punti a, contenuto in S_2 e soddisfacente la (6), insieme che contiene $\bar{S}_2$. Tale insieme, in quanto contiene $\bar{S}_2$, soddisfa la (3), in quanto è chiuso e contenuto nell'insieme compatto S_2, riesce compatto: dunque S_2' è chiuso e compatto e soddisfa la (3). Il prodotto combinatorio $S \times S_2'$ riesce (essendo S e S_2 compatti) per il teorema di Tychonoff [11]) compatto (e quindi anche chiuso). La restrizione della funzione continua $g(x, a) = | f(x) - p(x, a) |$ all'insieme $S \times S_2'$ è allora ivi uniformemente continua e perciò, fissato un $\varepsilon > 0$, sarà possibile trovare un $d > 0$ in modo che, se $z' = (x', a')$, $z'' = (x'', a'')$ sono due punti di $S \times S_2'$ tali che $\overline{z'z''} < d$, avremo:

$$| g(x', a') - g(x'', a'') | < \varepsilon.$$

Fissato allora un $a \in S_2'$ e preso a' in modo che $\overline{aa'} < d$, avremo:

$$| g(x, a') - g(x, a) | < \varepsilon,$$

qualunque sia $x \in S$, in quanto i due punti (x, a) e (x, a') hanno distanza minore di d. Poichè $M(a) = g(\xi, a)$, essendo ξ un punto opportuno di S, la precedente dà:

$$M(a) - \varepsilon < g(\xi, a') < M(a) + \varepsilon, \tag{7}$$

essendo $\overline{aa'} < d$.

Si noti, d'altro canto, che la funzione $M(a)$ è per sua natura semicontinua superiormente e cioè: fissato un a e scelto un $\varepsilon > 0$, si può trovare un $d' > 0$ in modo che se $\overline{aa'} < d'$, riesce:

$$M(a') < M(a) + \varepsilon. \tag{8}$$

Ove infatti esistesse una successione di punti $\{a_n\}$ di S_2 tali che $\overline{aa_n} \to 0$ e per ciascuno di essi e per un dato ε riuscisse:

$$M(a_n) \geq M(a) + \varepsilon,$$

esisterebbe una successione di punti almeno (ξ_n, a_n) il cui filtro elementare associato ammetterebbe, per essere $S \times S_2'$ compatto, un punto d'aderenza almeno (η, a). Si avrebbe allora:

$$M(a_n) = g(\xi_n, a_n) \geq M(a) + \varepsilon$$

e a motivo della continuità di $f(x, a)$, anche:

$$g(\eta, a) \geq M(a) + \varepsilon$$

contro la definizione di $M(a)$.

---

11) Cfr. N. Bourbaki [6] a p. 63.

Dalle (7) e (8) segue allora:

$$M(a) - \varepsilon < g(\xi, a') \leq M(a') < M(a) + \varepsilon,$$

essendo a' tale che $\overline{aa'} < d''$ con $d'' = \min(d, d')$. Ne segue la continuità di $M(a)$ in S_2' e poichè quest'ultimo insieme è chiuso e compatto, ne viene che $M(a)$ ammette un minimo che, per la (3), sarà il numero denotato con μ; esiste dunque almeno un punto $a^* \in S_2$ tale che per esso è $\operatorname{Max}|f(x) - p(x, a^*)| = \mu$, $x \in S$; $p(x, a^*)$ è dunque elemento τ in $\mathfrak{F}$ per $f(x)$ e il teorema è provato [12]).

Su alcune proprietà delle funzioni $\tau(x)$.

2. - Se $f(x) \backsim \tau(x)$, può accadere che $\tau(x)$ non sia l'unico elemento di migliore approssimazione per $f(x)$ *in* $\mathfrak{F}$ [13]); in questo caso $f(x)$ ammette infiniti elementi τ, come risulta dalla proposizione seguente [14]), che utilizzeremo in seguito.

Se in $\mathfrak{F}$ esistono due distinti elementi di migliore approssimazione per $f(x)$: $\tau(x)$, $\tau'(x)$, allora è elemento di migliore approssimazione anche la funzione:

$$\frac{\tau(x) + \tau'(x)}{2}$$

---

[12]) Va osservato che nel caso che $p(x, a)$ dipenda da un numero finito di parametri, vale a dire nel caso che S sia euclideo, l'insieme S_2'. (Cfr. la (6)) essendo chiuso e limitato, è senz'altro compatto, onde in questo caso la ipotesi di compattezza di S_2 può lasciarsi cadere. Va anche osservato che ai fini della compattezza di S_2, essendo lo spazio delle successioni (di numeri reali o complessi) completo, basterà supporre che, per ogni intero n, esista un ricoprimento, finito di S_2 costituito da insiemi di diametro minore di $1/n$; Cfr., ad es., [1] a p. 113.

[13]) Questa circostanza è stata messa in luce, per la prima volta, da L. Tonelli in [4] nel caso dello spazio euclideo a due dimensioni S e nell'insieme $\mathfrak{F}$ dei polinomi algebrici.

[14]) Cfr. [4) a p. 73.

e inoltre risulta:

$$(9)\qquad E_f^+\left(\frac{\tau+\tau'}{2}\right)=E_f^+(\tau)\cap E_f^+(\tau')\,;\quad E_f^-\left(\frac{\tau+\tau'}{2}\right)=E_f^-(\tau)\cap E_f^-(\tau')$$

La funzione $[\tau(x)+\tau'(x)]/2$ appartiene a $\mathfrak{S}$ e inoltre, denotato al solito con μ lo scarto, si ha se $x\in S$:

$$\left|f(x)-\frac{\tau(x)+\tau'(x)}{2}\right|\leq\frac{1}{2}\left|f(x)-\tau(x)\right|+\frac{1}{2}\left|f(x)-\tau'(x)\right|\leq$$
$$\leq\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2}\mu=\mu$$

e con ciò la prima parte dell'asserto è provato. Per la seconda parte si osservi in primo luogo, ragionando per fissare le idee sugli insiemi E^+, che, se x appartiene al secondo membro della prima delle (9), riesce $f(x)-\tau(x)=\mu$, $f(x)-\tau'(x)=\mu$ e conseguentemente:

$$(10)\qquad f(x)-\frac{\tau(x)+\tau'(x)}{2}=\mu,$$

vale a dire x appartiene al primo membro della prima delle (9). Viceversa sia x appartenente a quest'ultimo insieme; è allora verificata per esso la (10), e, non potendo le differenze $f(x)-\tau(x)$, $f(x)-\tau'(x)$ essere superiori a μ, saranno entrambe eguali a μ, perchè se una sola fosse minore di μ, risulterebbe falsa la (10), onde x appartiene al secondo membro della prima delle (9). In maniera analoga si ragiona per gli insiemi E^-.

Si ha pure la seguente proposizione[15]):

Se $f(x)\backsim\tau(x)$ con lo scarto μ, presa una qualunque $p(x)\in\mathfrak{S}$, si ha:

$$f(x)+p(x)\backsim\tau(x)+p(x)\qquad(\textit{con lo scarto }\mu)$$

e inoltre:

$$E_{f+p}^+(\tau+p)=E_f^+(\tau),\qquad E_{f+p}^-(\tau+p)=E_f^-(\tau),$$

---

[15]) Cfr. ad es. [4] a p. 68.

È intanto

$$\operatorname*{Max}_{x \in S} | f(x) + p(x) - (\tau(x) + p(x)) | = \mu,$$

nè può esistere un $p'(x) \in \mathcal{S}$ tale che:

$$\operatorname*{Max}_{x \in S} | f(x) + p(x) - p'(x) | = \mu' < \mu,$$

perchè in tal caso $p'(x) - p(x) \in \mathcal{S}$ avrebbe da $f(x)$ uno scarto minore di μ, onde $\tau(x)$ non sarebbe elemento di migliore approssimazione di $f(x)$ in $\mathcal{S}$ contro il supposto. La seconda parte della tesi è poi evidente.

3. - Il teorema seguente dà una limitazione ai valori che $f(x)$ può prendere in $E_f(\tau)$ ed ha conseguenze interessanti.

TEOR. 2. - *Se $f(x) \backsim \tau(x)$ in $\mathcal{S}$ e con lo scarto μ, non può accadere che sia:*

$$f(x) \leq \sigma < \mu \qquad \textit{per ogni } x \in E_f^+(x) \tag{11'}$$

e simultaneamente:

$$f(x) \geq -\sigma > -\mu \qquad \textit{per ogni } x \in E_f^-(\tau). \tag{11''}$$

In particolare non può avvenire che sia:

$$| f(x) | \leq \sigma < \mu \qquad \textit{per ogni } x \in E_f(\tau). \tag{11}$$

Se $\mu = 0$, il teorema è evidente perchè in questo caso $f(x) \in \mathcal{S}$ e, riuscendo $E_f^+(\tau) = E_f^-(\tau) = S$ le (11') e (11'') riescono contraddittorie. Supponiamo $\mu > 0$. Poichè $\tau(x)$ e $f(x) - \tau(x)$ sono continue su S, fissato un ε tale che $0 < \varepsilon < \mu - \sigma$, del resto arbitrario, esisterà per ogni x^0 di S un suo intorno aperto $I'(x^0)$ (per la topologia su S) tale che in esso $\tau(x)$ abbia una oscillazione minore di ε ed esisterà un intorno aperto $I''(x^0)$ tale che in esso $f(x) - \tau(x)$ abbia pure una oscillazione minore di ε.

Nell'intorno aperto $I(x^0) = I'(x^0) \cap I''(x^0)$ di x^0 le dette funzioni avranno entrambe una oscillazione minore di ε. Si supponga ora $x^0 \in E_f^+(\tau)$, sarà:

$$f(x^0) - \tau(x^0) = \mu, \tag{12}$$

mentre se $x \in I(x^0)$

$$\mu - \varepsilon < f(x) - \tau(x) \leq \mu; \tag{13}$$

inoltre, per gli stessi x, tenuto conto della (12), si ha:

$$f(x^0) - \mu - \varepsilon < \tau(x) < f(x^0) - \mu + \varepsilon.$$

Ammettiamo ora, per assurdo, che valgano le (11′), le precedenti disuguaglianze danno:

$$f(x^0) - \mu - \varepsilon < \tau(x) < \sigma - \mu + \varepsilon$$

e, se ω è un numero positivo, si ha

$$-\omega(-f(x^0) + \mu + \varepsilon) < \omega\tau(x) < -\omega(\mu - \sigma - \varepsilon). \tag{14}$$

Sommando membro a membro le (13) e (14), si ottiene:

$$\mu-\varepsilon-\omega(\quad f(x^0)+\mu+\varepsilon)<f(x)-(\tau(x)-\omega\tau(x))<\mu-\omega(\mu-\sigma-\varepsilon).$$

Si prenda ora ω tale che:

$$\mu - \varepsilon - \omega(-f(x^0) + \mu + \varepsilon) > 0;$$

per questo, osservato che dalle (11′) risulta $\mu - f(x^0) > 0$, basterà prendere:

$$\omega < \frac{\mu - \varepsilon}{-f(x^0) + \mu + \varepsilon}.$$

Ciò si consegue subito prendendo ω in modo che, detto L il massimo modulo di $f(x)$ su S, si abbia:

$$0 < \omega < \frac{\mu - \varepsilon}{L + \mu + \varepsilon}, \tag{15}$$

perchè riesce:

$$\frac{\mu - \varepsilon}{L + \mu + \varepsilon} \leq \frac{\mu - \varepsilon}{-f(x^0) + \mu + \varepsilon}.$$

Se dunque prendiamo ω nel modo detto, avremo per $x \in I(x^0)$ e $x^0 \in E_f^+(\tau)$:

$$(16) \qquad 0 < f(x) - (\tau(x) - \omega\tau(x)) < \mu - \omega(\mu - \sigma - \varepsilon).$$

Sia ora $x^0 \in E_f^-(\tau)$; sarà analogamente alla (12)

$$f(x^0) - \tau(x^0) = -\mu$$

e se $x \in I(x^0)$, analogamente alla (13), sarà:

$$(13') \qquad -\mu \leq f(x) - \tau(x) < -\mu + \varepsilon$$

e per gli stessi x

$$f(x^0) + \mu - \varepsilon < \tau(x) < f(x^0) + \mu + \varepsilon;$$

ed anche, ammettendo, per assurdo, che valgano le (11''):

$$-\sigma + \mu - \varepsilon < \tau(x) < f(x^0) + \mu + \varepsilon.$$

Se $\omega > 0$, analogamente alla (14) è:

$$(14') \qquad \omega(\mu - \sigma - \varepsilon) < \omega\tau(x) < \omega(f(x^0) + \mu + \varepsilon)$$

e sommando membro a membro le (13') e (14'), si ha:

$$-\mu + \omega(\mu - \sigma - \varepsilon) < f(x) - (\tau(x) - \omega\tau(x)) < - \\ -\mu + \varepsilon + \omega(f(x^0) + \mu + \varepsilon).$$

Se ω soddisfa, come supponiamo alla (15), e riuscendo per la (11'') $f(x^0) + \mu > 0$, avremo:

$$-\mu + \varepsilon + \omega(f(x^0) + \mu + \varepsilon) < 0$$

e, analogamente alla (16):

$$(16') \qquad -\mu + \omega(\mu - \sigma - \varepsilon) < f(x) - (\tau(x) - \omega\tau(x)) < 0$$

per $x \in I(x^0)$ e $x^0 \in E_f^-(\tau)$.

È dunque per ogni $x^0 \in E_f(\tau)$ ed ogni $x \in I(x^0)$ in virtù delle (16) e (16'):

$$(17) \qquad | f(x) - (\tau(x) - \omega\tau(x)) | < \mu - \omega(\mu - \sigma - \varepsilon).$$

Si ponga ora $I = \bigcup_{x^0 \in E_f(\tau)} I\ (x^0)$; essendo gli insiemi $I(x^0)$ aperti, tale sarà I, mentre l'insieme $S - I$ sarà chiuso, e, poichè quest'ultimo insieme è contenuto in S, supposto compatto, sarà esso pure compatto. Su $S - I$ la funzione continua $| f(x) - \tau(x) |$ ammette allora un massimo $\mu' < \mu$. Supposto da prima $\tau(x)$ non nulla su S, posto $M = \underset{x \in S}{\operatorname{Max}} | \tau(x) |$, sarà $M \neq 0$ e, scelto ω in modo che, oltre la (15), soddisfi la:

$$(18) \qquad \omega < \frac{\mu - \mu'}{2M},$$

si avrà per $x \in S - I$:

$$(19) \qquad | f(x) - (\tau(x) - \omega\tau(x)) | \leq | f(x) - \tau(x) | + \omega | \tau(x) | <$$
$$< \mu' + \frac{\mu - \mu'}{2M} M = \frac{\mu' + \mu}{2} < \mu.$$

Poichè la funzione $\tau(x) - \omega\tau(x) \in \mathcal{S}$ e dalle (17) e (19) risulta che essa ha da $f(x)$, su S, uno scarto inferiore a μ, ne viene che τ non è elemento di migliore approssimazione contro il supposto. Se poi $\tau(x) \equiv 0$, riesce $\underset{x \in S}{\operatorname{Max}} | f(x) - \tau(x) | = \underset{x \in S}{\operatorname{Max}} | f(x) | = \mu$ e gli insiemi $E_f^+ (\tau)$ e $E_f^- (\tau)$ coincidono con gli insiemi di punti di S ove $f(x) = \mu$ e rispettivamente ove $f(x) = -\mu$ e perciò anche in questo caso le (11′) e (11″) non possono valere. Il teorema è così completamente provato.

Il teor. 2 ammette la seguente estensione:

TEOR. 3. - *Se $f(x) \backsim \tau(x)$ in $\mathcal{S}$ e con lo scarto μ, non esiste in $\mathcal{S}$ una $p(x)$ tale che:*

$$(20') \qquad f(x) - p(x) \leq \sigma < \mu \qquad \textit{per ogni } x \in E_f^+(\tau)$$

e simultaneamente:

$$(20'') \qquad f(x) - p(x) \geq -\sigma > -\mu \qquad \textit{per ogni } x \in E_f^-(\tau).$$

In particolare non può avvenire che sia:

$$(20) \qquad | f(x) - p(x) | \leq \sigma < \mu \qquad \textit{per ogni } x \in E_f(\tau).$$

La funzione $f(x) - p(x)$ ha per elemento di migliore approssimazione $\tau(x) - p(x)$ con $E_f^+(\tau) = E_{f-p}^+(\tau - p)$, $E_f^-(\tau) = E_{f-p}^-(\tau - p)$ e lo scarto μ (si veda il n.° 2); onde dal teorema precedente ne viene la tesi. Si ha subito il seguente:

COROLLARIO 1. - *Se $\mu \neq 0$, $f(x)$ non può avere restrizione ad $E_f(\tau)$ uguale a quella di una funzione $p(x) \in \mathfrak{S}$: in particolare non può essere nulla in ogni punto di $E_f(\tau)$.*

Nel caso che dello spazio $\mathfrak{S}$ facciano parte le costanti [16]) su S, segue anche:

COROLLARIO 2. - *Se $\mu \neq 0$, i due insiemi $E_f^+(\tau)$ e $E_f^-(\tau)$ sono entrambi non vuoti.*

Ove infatti fosse, ad es., vuoto $E_f^-(\tau)$, avremmo in $E_f(\tau)$: $f(x) - \tau(x) = \mu$. La funzione $\tau(x) + \mu$ appartiene a $\mathfrak{S}$ (contenendo $\mathfrak{S}$ le costanti) e assumerebbe in $E_f(\tau)$ i valori di $f(x)$, il che contradice il corollario 1.

4. - Il teor. 3 fornisce anche una proprietà caratteristica [17]) affinchè una assegnata funzione $p'(x) \in \mathfrak{S}$ sia elemento τ per $f(x)$; vale infatti il seguente:

TEOR. 4 [18]). - *Condizione necessaria e sufficiente perchè $p'(x) \in \mathfrak{S}$ sia elemento di minima deviazione per $f(x)$ è che,*

---

16) Come, ad es., nel caso che S sia euclideo e $\mathfrak{S}$ l'insieme dei polinomi algebrici (o trigonometrici) di grado non superiore ad n.

17) Una caratterizzazione, che include un classico teorema di Tchebychev-Bernstein, si deve ad E. Ya. Remèz nel caso che $\mathfrak{S}$ sia una varietà di dimensione finita immersa in $\mathfrak{C}$ formante un sistema Tchebychev. Questo teorema è stato ritrovato da J. Singer [7], il quale, ponendosi in uno spazio di Banach reale e astratto, ha caratterizzato, utilizzando un risultato di Banach, i punti di un sottospazio aventi migliore scarto da un punto assegnato.

18) Una caratterizzazione del tipo del Teor. 4 trovasi, nel caso che S sia euclideo a due dimensioni (oppure nel piano complesso) e $\mathfrak{S}$ l'insieme dei polinomi algebrici (reali o complessi), in [4] a pag. 69 e risale a P. Kirchberger [8].

posto: $\mu' = \operatorname*{Max}_{x \in S} | f(x) - p'(x) |$, *per nessuna funzione* $p(x) \in \mathcal{S}$ *debba aversi*:

$$|f(x) - p(x)| \leq \sigma < \mu' \tag{21}$$

per ogni $x \in E_f(p')$.

La condizione è necessaria perchè se $p'(x)$ è elemento τ con lo scarto μ' la (21) non può valere per il Teor. 3.

La condizione è sufficiente: ove infatti $p'(x)$ non fosse elemento di minima deviazione, si supponga esserlo $\tau(x)$ con lo scarto μ; si avrebbe allora per ogni $x \in E_f(p)$ $| f(x) - \tau(x) | \leq$ $\leq \mu < \mu'$, il che contradice la ipotesi fatta.

Relazioni col problema della interpolazione in $\mathcal{S}$.

5. - Consideriamo lo spazio $\mathcal{S}$. Diremo problema della interpolazione in $\mathcal{S}$ il seguente: Assegnato un sottoinsieme A di S finito o numerabile, ricercare quelle funzioni $p(x) \in \mathcal{S}$ aventi restrizione ad A eguale ad una assegnata funzione $\varphi(x)$ definita in A, la quale, nella ipotesi che A sia infinito, sia la restrizione ad A di una funzione di $\mathcal{C}$. In relazione con questo problema valgono i seguenti teoremi.

TEOR. 5. - *Se* $f(x) \notin \mathcal{S}$, *se in* $\mathcal{S}$, *e relativamente ad un qualunque insieme* A *costituito da* n *punti (risp. numerabile), è risolubile, qualunque sia* $\varphi(x)$, *il problema della interpolazione, allora l'insieme* $E_f(\tau)$, *relativo a qualunque elemento di migliore approssimazione per* $f(x) \in \mathcal{C}$ *in* $\mathcal{S}$, *contiene* $n+1$ *punti almeno (risp. ha potenza superiore al numerabile)* [19]).

Suppongasi che $E_f(\tau)$ contenga meno di $n+1$ punti(od abbia la potenza del numerabile), esiste allora, per la ipotesi fatta una $p(x) \in \mathcal{S}$ almeno, tale che per essa è:

$$p(x) = f(x) \quad \text{per} \quad x \in E_f(\tau);$$

---

[19]) Se lo spazio S è euclideo e ad una dimensione e $\mathcal{S}$ l'insieme dei polinomi algebrici o trigonometrici (o, più in generale, un sistema Tchebychev), di grado non superiore ad n, le proposizioni 5 e 6 danno classici teoremi (Cfr., ad es., [10]).

Ciò contradice il Cor. 1, valevole in questo caso, perchè essendo $f(x) \notin \mathfrak{S}$ è certo $\mu \neq 0$.

Conseguenza di quest'ultima proposizione è il seguente criterio d'unicità per $\tau(x)$.

TEOR. 6. - *Nelle ipotesi del teorema precedente (relativamente al caso che A sia finito) se il problema della interpolazione in* $\mathfrak{S}$ *ha una sola soluzione, allora è unico in* $\mathfrak{S}$ *l'elemento* τ *di migliore approssimazione per* $f(x) \in \mathfrak{C}$.

Si abbiano, per assurdo, due distinti elementi $\tau(x)$, $\tau'(x)$; l'insieme $E_f(\tau) \cap E_f(\tau')$ non è vuoto perchè esiste un elemento di migliore approssimazione in $\mathfrak{S}$: $\bar{\tau}(x) = (\tau(x) + \tau'(x))/2$ (si veda il n. 2) per cui valgono le (9). L'insieme $E_f(\bar{\tau})$ contiene certamente n punti (si ricordi il teor. precedente) sui quali il problema della interpolazione è risolubile in $\mathfrak{S}$. In tale insieme le due funzioni $\tau(x)$ e $\tau'(x)$ assumerebbero gli stessi valori (cfr. n. 2) e risolverebbero nel detto insieme, entrambe, il problema della interpolazione per una stessa $\varphi(x)$: dunque per la ipotesi fatta sarebbe $\tau(x) = \tau'(x)$ su S, ciò che è assurdo e il teorema è provato [20]).

6. - Si supponga essere $\mathfrak{S}$ una varietà lineare di dimensione finita contenuta in $\mathfrak{C}$:

$$p(x) = a_1p_1(x) + a_2p_2(x) + \dots + a_np_n(x) \tag{22}$$

e si supponga che ogni $p(x)$ abbia in S $n-1$ radici al più, cioè le funzioni $p_i(x)$, $i=1, 2, \dots, n$ diano un sistema Tchebychev; questo fatto porta come conseguenza che, presi comunque in S n punti distinti $x_1, x_2, \dots, x_n$, il determinante della matrice quadrata $(p_j(x_i))$ $(j, i = 1, 2, \dots, n)$ è sempre diverso da zero, da ciò segue allora che, fissati comunque n punti distinti di S, su essi è possibile (e con risultato unico) il problema della interpolazione per ogni $\varphi(x)$ nella varietà lineare (22).

---

20) Il tipo di ragionamento fatto qui trovasi in L. Tonelli, loc. cit. in [4] a pag. 53 e a p. 11.

Il teor. 6 assicura allora che l'elemento di migliore appros simazione per $f(x)$ nella varietà (22) è unico. Si ha dunque facilmente che:

Se ogni funzione (22) *ammette al più* $n-1$ *radici distinte in* S, *l'elemento di migliore approssimazione per* $f(x)$ *nella varietà* (22) *è per ogni* $f(x) \in \mathcal{C}$ *unico* [21]).

---

[21]) Questa proposizione dà, supponendo S euclideo, un teorema di Haar. Haar ha provato anche, supponendo sempre S euclideo, che: se nell'insieme (22) esiste per *ogni* $f(x) \in \mathcal{C}$ sempre *un solo* elemento di migliore approssimazione, allora ogni funzione (22) ha al più $n-1$ radici in S. Si veda, ed es., [10] a p. 58 e 69.

NOTA BIBLIOGRAFICA

[1] F. CAFIERO, *Misura e integrazione*, Collezione « Monografie Matematiche » a cura del C.N.R., Ed. Cremonese, Roma, (1959).

[2] G. FICHERA, *Lezioni sulle trasformazioni lineari*, vol. I, Ist. Mat. della Università di Trieste, (1954).

[3] E. BOREL, *Leçons sur les fonctions de variables réelles et les développements en séries de polynomes*, Gauthier Villars, Paris, (1928).

[4] L. TONELLI, *I polinomi d'approssimazione di Tchebychev*, Ann. di Mat., S. III, T. XV, pp. 47-119, (1908).

[5] S. I. ZUHOVICKII, *Sulla approssimazione delle funzioni reali nel senso di Tchebychev*, Uspehi Mat. Nauk (N S) 11, n. 2 (68), pp. 125-159, (1956) (in russo).

[6] N. BOURBAKI, *Topologie générale*, Actualités Scientifiques et industrielles, 858, Hermann & Cie Éditeurs, Paris, (1940).

[7] J. SINGER, *Caractérisation des éléments de meilleur approximation dans un espace de Banach quelconque*, Acta Sci. Math., T. XVIII, p. 181-189, (1956).

[8] P. KIRCHBERGER, *Inaugural-Dissertation*: *Ueber Tchebychefsche Annäherungs-methoden*, Gottingen, (1902).

[9] A. HAAR, *Die Minkowskische Geometrie und die Annäherung an stetige Funktionen*, Math. Ann. 78, pp. 294-311, (1918).

[10] N. I. ACHIESER, *Vorlesungen über Approximationstheorie*, Akademie-Verlag-Berlin, (1953).