RENDICONTI
*del*
SEMINARIO MATEMATICO
*della*
UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIORGIO TREVISAN

**A proposito di un teorema di Petersen**

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*, tome 30 (1960), p. 97-100

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1960__30__97_0>

# A PROPOSITO DI UN TEOREMA DI PETERSEN

*Nota* (*) *di* GIORGIO TREVISAN (*a Padova*)

In questa Nota si danno due semplici proposizioni geometriche, una equivalente al teorema di Petersen relativo ai grafi regolari cubici della superficie sferica ed una equivalente al problema dei quattro colori [1]).

Queste proposizioni mettono tra loro in stretta relazione le due questioni e permettono, in particolare, di rendersi conto, con evidenza, di quanto *enormemente* più complicato sia il secondo problema rispetto a quello che viene risolto dal teorema di Petersen.

**1.** - Data la superficie sferica $S$, se ne consideri una sua decomposizione simpliciale $D$.

L'insieme dei vertici, dei lati e delle faccie di $D$ costituì-

---

(*) Pervenuta in Redazione il 9 marzo 1960.

Indirizzo dell'A.: Seminario matematico, Università, Padova.

[1]) In un lavoro precedente (G. TREVISAN: *Una osservazione sul problema dei quattro colori;* Rendiconti del Seminario Matematico, Università di Padova, 1950) veniva addottato il termine di reticolo al posto dell'attuale grafo.

La sostituzione è dovuta, oltre al fatto che, grafo è la spontanea traduzione delle analoghe parole straniere (inglese: graph, tedesco: Graph, francese: graphe), all'uso che del termine reticolo, vari autori hanno fatto, in questi anni, per indicare con esso l'inglese «lattice».

Per quello che concerne la nozione di grafo regolare cubico, il teorema di Petersen ed il problema dei quattro colori si può vedere ad esempio: DÉNES KÖNIG: *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen;* Lipsia, Akademische Verlagsgbsellschaft M.B.H., 1936.

scono il modello di un *grafo* $G$ a faccie triangolari applicato sulla sfera $S$.

$G$ risulta essere il coniugato di un grafo *regolare cubico* $G'$, precisamente quello che si ottiene associando ad ogni faccia di $G$ un punto e congiungendo con un lato ogni due tali punti, se e soltanto se, essi sono associati a due faccie che hanno un lato in comune.

Il teorema di Petersen di solito viene enunciato per $G'$ ed afferma che: *I lati di $G'$ possono collocarsi in due categorie $A'$, $B'$ per modo che dei tre lati uscenti da ogni vertice di $G'$, due appartengano ad $A'$ ed uno a $B'$.*

È evidente che si ottiene una proposizione equivalente se nell'enunciato precedente si sostituisce $G$ a $G'$.

Infatti se ad ogni lato $l'$ di $G'$ si associa il lato $l$ di $G$ comune alle due faccie triangolari di $G$ che sono corrispondenti ai due vertici di $l'$ si stabilisce così una corrispondenza biunivoca tra i lati di $G$ e $G'$ e per ottenere il risultato è evidente che basterà porre i corrispondenti lati di $A'$ in una classe $A$ e quelli corrispondenti ai lati di $B'$ in una classe $B$ e viceversa.

Nel seguito si ragionerà soltanto sul *grafo* $G$.

Siano in numero di $n$ i vertici di $G$ allora, è ben noto, che il numero delle faccie e dei lati di $G$ sono rispettivamente $2n - 4$ e $3n - 6$.

Il teorema di Petersen per $G$ può essere enunciato, in una forma geometrica equivalente.

La cosa è quasi ovvia, infatti:

Si consideri una faccia di $G$, il lato $l$ di questa che appartiene alla classe $B$ risulta comune ad un'altra faccia di $G$ di cui gli altri due lati devono per forza appartenere ad $A$.

La figura (topologica) costituita da queste due faccie triangolari si potrà chiamare faccia *quadrangolare* di *diagonale* $l$.

Orbene la validità del teorema di Petersen per $G$ implica che:

*$G$ è decomponibile in faccie quadrangolari in numero di $n - 2$, per modo che ciascuna delle due faccie adiacenti costituenti ogni quadrangolo appartengano solo a tale quadrangolo.*

Una tale decomposizione di $G$ in faccie *quadrangolari* sarà detta nel seguito una *decomposizione* di Petersen di $G$.

Viceversa:

*Se $G$ ammette una decomposizione di Petersen $\Gamma$ per esso è valido il teorema di Petersen.*

Basta, per mostrare ciò, pensare di collocare nella classe $B$ tutte le *diagonali* dei *quadrangoli* di $\Gamma$ e nella classe $A$ tutti gli altri lati di $G$.

**2.** - Si richiamano ora, con una variante di forma, considerazioni contenute in una Nota dell'A. di anni orsono [2]).

Ad ogni lato di $G$ si associ una variabile capace di assumere i valori 0 od 1 e si denotino tali variabili con $x_1, x_2, \ldots, x_{3n-6}$.

Se $x_u, x_v, x_w$ sono le variabili corrispondenti ai lati di una stessa faccia di $G$ (e quindi $u, v, w$ sono a due a due distinte e sono tre dei numeri naturali compresi tra 1 e $3n-6$ estremi inclusi) si consideri la congruenza

$$x_u + x_v + x_w \equiv 1 \pmod 2, \tag{1}$$

Operando in tal modo per ogni faccia di $G$ si ottiene un sistema $S$ di $2n-4$ congruenze in $3n-6$ incognite, che si chiamerà il sistema *associato* a $G$.

Nella Nota, già citata, si è dimostrato che il problema dei quattro colori per $G$ è equivalente alla proposizione:

I) *Il sistema $S$, associato a $G$, ammette due soluzioni $x_i'$, $x_i''$, ($i=1, 2, \ldots, 3n-6$) verificanti le*

$$x_i' \cdot x_i'' \equiv 0 \pmod 2 \quad (i = 1, 2, \ldots, 3n-6). \tag{2}$$

Se si introduce la convenzione di chiamare *soluzione* di Petersen del sistema $S$ ogni soluzione del sistema $S$ che attribuisca alle tre variabili di ciascuna equazione del sistema $S$

---

[2]) G. TREVISAN: loc. cit. in [1]), dalla quale Nota risulta anche che dal sistema $S$, di cui qui si parla, può essere tolta una qualunque delle equazioni (1) in quanto consegnenza delle rimanenti e che anche le (2), relative a tale equazione soppressa, sono allora di conseguenza verificate.

i valori zero per due delle variabili ed 1 per l'altra si ha

TEOREMA I: *Ogni decomposizione di Petersen* $\Gamma$ *di* $G$ *da luogo per* $G$ *ad una soluzione di Petersen* $\Sigma$ *e viceversa.*

La cosa è immediata, infatti conservando il significato dei simboli stabilito in 1; data $\Gamma$, si attribuiscono alle variabili $x_i$, corrispondenti alle sue *diagonali,* il valore 1 ed a tutte le altre variabili il valore 0, è ovvio che così si realizza una *soluzione* di Petersen di $S$; viceversa data $\Sigma$ si pongano nella classe $B$ tutti i lati di $G$ corrispondenti a quelle variabili che assumono il valore 1 ed in $A$ gli altri e si ottiene così una *decomposizione* di Petersen di $G$.

**3.** - Se si ritorna alla proposizione I) si vede con facilità che le soluzioni $x_i'$, $x_i''$ $(i=1, 2, \dots, 3n-6)$ colà richieste, cioè verificanti le (2), sono necessariamente due *soluzioni* di Petersen di $S$.

Infatti considerata l'equazione generica (1) di $S$, essa è solubile solo dando alle tre variabili che vi compaiono $x_u$, $x_v$, $x_w$, soltanto il valore 1 per tutte e tre oppure per due di esse il valore 0 e per la terza il valore 1.

D'altra parte per le (2) non è possibile accettare che se $x_u' + x_v' + x_w' \equiv 1 \pmod 2$, $x_u'$, $x_v'$, $x_w'$ siano tutte e tre eguali ad 1 perchè altrimenti dovrebbe risultare $x_u'' = x_v'' = x_w'' = 0$ e per la (1) l'assurdo $x_u'' + x_v'' + x_w'' \equiv 1 \pmod 2$.

Quindi ambedue le soluzioni $x_i'$, $x_i''$ $(i=1, 2, \dots, 3n-6)$ sono due *soluzioni* di Petersen del sistema $S$.

Ma le (2) dicono ancora qualcosa di più sulle due soluzioni $x_1'$, $x_i''$ $(i=1, 2, \dots, 3n-6)$ di $S$, e cioè se ad esempio $x_u' = 1$, $x_v' = 0$, $x_w' = 0$, necessariamente poichè $x_u' x_u'' = 0$ (2) deve essere $x_u'' = 0$, questo fatto assieme a tutte le considerazioni precedenti permette di giungere alla conclusione contenuta nel

TEOREMA II: *Condizione necessaria e sufficiente perchè* $G$ *sia colorabile in quattro colori è che si possano trovare due decomposizioni di Petersen di* $G$, $\Gamma_1$ *e* $\Gamma_2$ *tali che le diagonali di* $\Gamma_1$ *non siano diagonali per* $\Gamma_2$.

Come conseguenza ne viene che le diagonali di $\Gamma_2$ non lo sono per $\Gamma_1$.