GIOVANNI ZACHER

I gruppi risolubili con duale

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 31 (1961), p. 104-113
<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1961__31__104_0>

I GRUPPI RISOLUBILI CON DUALE

Nota (*) *di* GIOVANNI ZACHER (*a Padova*)

In un ampio studio [6] sulle proprietà del reticolo dei sottogruppi di un gruppo Suzuki, fra le altre cose, ha caratterizzato i gruppi risolubili finiti $\mathfrak{G}$ forniti di duale, cioè col reticolo $\mathscr{L}(\mathfrak{G})$ dei sottogruppi dualmente isomorfo a quello di un gruppo finito $\overline{\mathfrak{G}}$.

In questa Nota mi propongo di trasportare il risultato di Suzuki dai gruppi risolubili finiti e dotati di duale a quelli risolubili e d'ordine infinito. E trovo che la condizione di finitezza si può eliminare senza alterare sostanzialmente la caratterizzazione di Suzuki. Infatti dimostro che *un gruppo risolubile G è dotato di duale se, e solo se, esso è prodotto diretto* (*non cartesiano*) *di gruppi finiti irriducibili in senso reticolare, che abbiano gli ordini a due a due primi fra di loro e che siano risolubili e dotati di duale.*

1\. - Incominciamo col premettere alcune convenzioni e col richiamare alcune proposizioni che ci saranno utili nel seguito.

Indichiamo con $\mathscr{L}(\mathfrak{G})$ il reticolo dei sottogruppi del gruppo $\mathfrak{G}$. E denotiamo con $\mathfrak{Z}(p^n)$ un p-gruppo ciclico d'ordine p^n se $n = 1$, 2, 3, ..., e un gruppo isomorfo al gruppo delle radici p-esime, p^2-esime, ..., dell'unità (p numero primo) se $n = \infty$.

Allora:

(*) Pervenuta in redazione il 20 dicembre 1960.
Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico, Università, Padova.

I) $\mathscr{L}(\mathfrak{G})$ è una catena se e solo se $\mathfrak{G}$ è uno $\mathfrak{Z}(p^n)$.

Allo scopo si vegga il corollario 78.3 di [2] ricordando che $\mathfrak{G}$ è abeliano se $\mathscr{L}(\mathfrak{G})$ è un reticolo distributivo [1]).

L'isomorfismo φ di $\mathscr{L}(\mathfrak{G})$ su $\mathscr{L}(\overline{\mathfrak{G}})$ si dice singolare rispetto al numero primo p, se esiste un tal sottogruppo ciclico $\{a\}$ di $\mathfrak{G}$, di ordine primo, che l'immagine $\varphi(\{a\})$ di $\{a\}$ mediante φ sia un gruppo ciclico d'ordine (primo) q con $q \neq p$. Invece i P-gruppi saranno i p-gruppi abeliani elementari, ed ogni gruppo unione di un p-gruppo abeliano elementare, $\mathfrak{S}$, e di un gruppo ciclico $\{b\}$ con l'ordine primo, q, diverso da p e con l'elemento generatore b soddisfacente per ogni a di $\mathfrak{S}$ alla $bab^{-1} = a^r$, r essendo un intero che non dipende da a e che verifica le $r \not\equiv 1$ mod. p., $r^q \equiv 1$ mod. p.

Ciò premesso dimostriamo che:

II) Se $\mathfrak{G}$ è un p-gruppo localmente finito e φ un isomorfismo singolare (rispetto a p) di $\mathscr{L}(\mathfrak{G})$ su $\mathscr{L}(\overline{\mathfrak{G}})$, il gruppo $\mathfrak{G}$ è un p-gruppo abeliano elementare non ciclico, oppure uno $\mathfrak{Z}(p^n)$, e $\overline{\mathfrak{G}}$, rispettivamente, un P-gruppo non abeliano, oppure uno $\mathfrak{Z}(q^n)$, q essendo un numero primo diverso da p.

Se $\overline{\mathfrak{G}}$ è uno $\mathfrak{Z}(p^n)$, il teorema segue dalla I. Escluso questo caso, sia a un elemento di $\mathfrak{G}$ di ordine p e tale che $\varphi(\{a\})$ abbia un ordine, q, diverso da p.

Poichè $\mathfrak{G}$ è localmente finito senza essere uno $\mathfrak{Z}(p^n)$, in $\mathfrak{G}$ esiste un elemento, b, tale che il gruppo $\{a, b\}$ generato da a e b sia un p-gruppo finito non ciclico. Allora se a_1 è un elemento di $\mathfrak{G}$ che non appartenga ad $\{a, b\}$, non è ciclico nemmeno il p-gruppo finito $\{a, b, a_1\}$. Ma l'ordine di $\varphi(\{a, b, a_1\})$ non è una potenza di p, quindi [2]) il gruppo $\{a, b, a_1\}$ è abeliano elementare d'ordine p^3 e $\varphi(\{a, b, a_1\})$ è un P-gruppo d'ordine qp^2. Pertanto $\mathfrak{G}$ è un p-gruppo abeliano elementare e $\varphi(\mathfrak{G})$ contiene un sistema locale $\{H_\alpha\}$ di P-gruppi non abeliani d'ordine qp^2 contenenti ciascuno $\varphi(\{a\})$. Quindi $\varphi(\mathfrak{G})$ è un P-gruppo non abeliano.

Si riconosce facilmente anche che:

---

[1]) Vedasi pag. 2 in [1].

[2]) Vedasi pag. 12 in [1]

III) Un P-gruppo è strutturalmente isomorfo ad un p-gruppo abeliano elementare.

E non è nemmeno difficile riconoscere che:

IV) Se il reticolo $\mathscr{L}(\mathfrak{G})$ è un prodotto cardinale, $\mathscr{L}(\mathfrak{G}) = \prod_{\lambda} \mathscr{L}(\mathfrak{G}_\lambda)$, il gruppo $\mathfrak{G}$ è dotato di duale se e soltanto se $\mathfrak{G}_\lambda$ è tale per ogni λ.

2. - In questo numero ci proponiamo di dimostrare il seguente

LEMMA: *Un p-gruppo risolubile dotato di duale è finito.*

Il teorema è vero se il p-gruppo $\mathfrak{G}$ è per di più abeliano [3]). Quindi possiamo procedere per induzione completa rispetto alla lunghezza n della serie derivata del p-gruppo.

Il gruppo $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}^{n-1}$ è un p-gruppo risolubile con duale, e la lunghezza della serie derivata è minore di n; pertanto esso è finito [4]). E quindi, se a è un elemento del gruppo abeliano $\mathfrak{G}$, il normalizzante $\mathfrak{N}(a)$ di a in $\mathfrak{G}$ ha indice finito in $\mathfrak{G}$; epperò la classe completa $[a]$ dei coniugati di a genera un gruppo finito, normale in $\mathfrak{G}$. Si conclude che il centro $\mathfrak{C}(\mathfrak{G})$ di $\mathfrak{G}$ non è identico Ma $\mathfrak{G}/\mathfrak{C}(\mathfrak{G})$ soddisfa alle stesse ipotesi poste per $\mathfrak{G}$; pertanto $\mathfrak{G}$ è dotato di serie centrale ascendente, vale a dire è uno ZA-gruppo. Indi $\mathfrak{G}$ è anche un N-gruppo [5]) cioè i sottogruppi propri di $\mathfrak{G}$ sono contenuti propriamente nei rispettivi normalizzanti. Ne segue che i sottogruppi massimi di $\mathfrak{G}$ sono normali in $\mathfrak{G}$ e quindi d'indice p in $\mathfrak{G}$.

Sia ora $\overline{\mathfrak{G}}$ uno dei duali di $\mathfrak{G}$, e φ un isomorfismo duale di $\mathscr{L}(\mathfrak{G})$ su $\mathscr{L}(\overline{\mathfrak{G}})$. E sia $\Phi_1(\mathfrak{G})$ il gruppo di Frattini di $\mathfrak{G}$. Allora $\mathfrak{G}/\Phi_1(\mathfrak{G})$ è un p-gruppo abeliano elementare con duale, e quindi è finito. Pertanto è finito anche il gruppo $\varphi(\Phi_1(\mathfrak{G}))$ che coincide con l'unione $\mathfrak{F}_1(\overline{\mathfrak{G}})$ dei sottogruppi minimi di $\overline{\mathfrak{G}}$. Il gruppo $\Phi_1(\mathfrak{G})$ è un N-gruppo in quanto sottogruppo di $\mathfrak{G}$, ed è un p-gruppo

---

[3]) Vedasi pag. 87 in [1].

[4]) E da qui si potrebbe dedurre che n non può superare 3.

[5]) Vedasi pag. 219 in [3].

con quale in quanto φ subordina un isomorfismo duale di $\mathscr{L}(\Phi_1(\mathfrak{G}))$ su $\mathscr{L}(\overline{\mathfrak{G}}/\mathfrak{F}_1(\overline{\mathfrak{G}}))$. In conclusione $\Phi_1(\mathfrak{G})$ soddisfa a tutte le condizioni imposte a $\mathfrak{G}$. Epperò se si definisce $\Phi_{n+1}(\mathfrak{G})$ per $n = 1$, 2, 3, ... il sottogruppo di Frattini di $\Phi_n(\mathfrak{G})$, la catena

$$\Phi_0(\mathfrak{G}) = \mathfrak{G} \supset \Phi_1(\mathfrak{G}) \supset \Phi_2(\mathfrak{G}) \supset \ldots \tag{1}$$

è una catena discendente di sottogruppi di $\mathfrak{G}$; i gruppi $\Phi_1(\mathfrak{G})$, $\Phi_2(\mathfrak{G})$, ... sono mutati ciascuno in sè stesso da ogni automorfismo di $\mathscr{L}(\mathfrak{G})$, vale a dire sono $\mathscr{L}(\mathfrak{G})$-invarianti; ed i gruppi $\Phi_1(\mathfrak{G})/\Phi_2(\mathfrak{G})$, $\Phi_2(\mathfrak{G})/\Phi_3(\mathfrak{G})$, ... sono abeliani elementari finiti.

Alla (1) corrisponde, attraverso φ, una catena ascendente di sottogruppi $\mathscr{L}(\overline{\mathfrak{G}})$-invarianti di $\overline{\mathfrak{G}}$.

$$F_0(\overline{\mathfrak{G}}) = 1 \subset F_2(\overline{\mathfrak{G}}) \subset F_2(\overline{\mathfrak{G}}) \subset \ldots \tag{2}$$

il gruppo $F_n(\overline{\mathfrak{G}})/F_{n-2}(\overline{\mathfrak{G}})$ essendo, in quanto duale di $\Phi_{n-1}(\mathfrak{G})/\Phi(\mathfrak{G})$ l'unione di sottogruppi minimi di $\overline{\mathfrak{G}}/F_{n-2}(\overline{\mathfrak{G}})$, ed avendo per lo stesso motivo, un ordine finito. Consideriamo ora il gruppo $\overline{\mathfrak{F}} = \bigcup\limits_k \overline{\mathfrak{F}}_k$, ove k percorre l'insieme dei numeri naturali. Faremo vedere che $\overline{\mathfrak{F}}$ è ancora un p-gruppo se si esclude il caso che $\mathfrak{G}$ sia un p-gruppo ciclico o un p-gruppo abeliano elementare, dimostrando che $F_n(\overline{\mathfrak{G}})$ è tale quando $n \geqslant 2$. Allo scopo si osservi che per $n \geqslant 2$, il gruppo $\mathfrak{G}/\Phi_n(\mathfrak{G})$ non è ciclico e non è abeliano elementare, mentre è autoduale in quanto p-gruppo finito con duale [6]). Quest'ultima circostanza implica che $\mathfrak{G}/\Phi_n(\mathfrak{G})$ e $F_n(\overline{\mathfrak{G}})$ sono strutturalmente isomorfi. E da qui e dal fatto che il p-gruppo $\mathfrak{G}/\Phi_n(\mathfrak{G})$ non è ciclico e non è abeliano elementare si trae appunto che $F_n(\overline{\mathfrak{G}})$ è un p-gruppo [7]).

Oramai siamo in grado di far vedere che l'ordine di $\mathfrak{G}$ è finito. Ragioniamo per assurdo, e supponiamo che l'ordine di $\mathfrak{G}$ sia infinito. Allora il gruppo $F_n(\overline{\mathfrak{G}})$ si può caratterizzare, per $n=1, 2, \ldots$ come il sottogruppo di $\overline{\mathfrak{G}}$ generato dagli elementi d'ordine p^n. Se ne trae subito che tanto $\overline{\mathfrak{F}}$ quanto $\overline{\mathfrak{G}}$ sono d'ordine infinito.

---

[6]) Vedasi pag. 89 in [1].

[7]) Vedasi pag. 12 in [1].

Ma se si tiene presente che $\overline{\mathfrak{G}}$ è un gruppo periodico se ne trae anche che $\overline{\mathfrak{F}} = \overline{\mathfrak{G}}$. Si conclude che l'insieme A_n degli elementi di $\overline{\mathfrak{G}}$ con l'ordine uguale a p^n è finito, e non è vuoto [8]). Gli insiemi $A_1, A_2, A_3, \ldots$ sono per di più disgiunti a due a due, e per un teorema di König [9]) esiste una successione $a_1, a_2, a_3, \ldots$ di elementi di $\overline{\mathfrak{G}}$ rispettivamente contenuti in $A_1, A_2, A_3, \ldots$ siffatti da aversi $a_2^p = a_1$, $a_3^p = a_2$, $a_4^p = a_3, \ldots$; e il gruppo generato da $a_1, a_2, \ldots$ diciamolo $\overline{\mathfrak{H}}$ è uno $\mathfrak{Z}(p^\infty)$ contenuto in $\overline{\mathfrak{G}}$. Detta $\mathfrak{H}$ la controimmagine, $\varphi^{-1}(\overline{\mathfrak{H}})$, di $\overline{\mathfrak{H}}$, il gruppo $\mathfrak{H}$ è contenuto propriamente in $\mathfrak{G}$ e quindi il normalizzante $\mathfrak{N}(\mathfrak{H})$ di $\mathfrak{H}$ contiene propriamente $\mathfrak{H}$. Sia $\mathfrak{M}/\mathfrak{N}$ un sottogruppo minimo di $\mathfrak{N}(\mathfrak{H})/\mathfrak{H}$. Allora $\varphi(\mathfrak{M})$ è massimo in $\varphi(\mathfrak{H})$ cioè in $\overline{\mathfrak{H}}$. Cosa assurda perchè $\overline{\mathfrak{H}}$ è sprovvisto di sottogruppi massimi in quanto è uno $\mathfrak{Z}(p^\infty)$.

E la dimostrazione del lemma è terminata.

3. - Siamo ora in grado di dimostrare il seguente

TEOREMA: *Se $\mathfrak{G}$ è un gruppo risolubile con duale, esso è il prodotto diretto di gruppi finiti, irriducibili in senso reticolare, che hanno ordini a due a due primi tra loro e che sono (risolubili e) dotati di duale.*

Potremo, in virtù del lemma al n. 2, supporre senz'altro $\mathfrak{G}$ diverso da un p-gruppo.

Il teorema è noto per i gruppi abeliani, quindi per la dimostrazione procediamo per induzione completa rispetto alla lunghezza della serie derivata. Supponiamo dunque che la lunghezza n della serie derivata di $\mathfrak{G}$ sia maggiore di 1.

Il gruppo $\mathfrak{G}$ è periodico [10]) e quindi localmente finito, in quanto esso è anche risolubile [11]).

Supponiamo in un primo momento che $\mathfrak{G}$ sia un p-gruppo.

Allo scopo si osservi che $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}^{(n-1)}$, per l'ipotesi induttiva si presenta quale prodotto diretto (non cartesiano) di sottogruppi

---

[8]) E questo basta, poichè $\overline{\mathfrak{G}}$ è un p-gruppo, per concludere che $\overline{\mathfrak{G}}$ è un gruppo a « strati finiti » secondo Černikov [4].

[9]) Vedasi pag. 17 Corollario 2 in [5].

[10]) Vedasi pag. 86 in [1].

[11]) Vedasi ad es. [3].

finiti, irriducibili in senso reticolare, risolubili e dotati di duale e con gli ordini a due a due primi fra di loro.

Si consideri un sottogruppo di Sylow, $\mathfrak{S}$, di $\mathfrak{G}$ contenente $\mathfrak{G}^{(n-1)}$, e si supponga che i periodi degli elementi di $\mathfrak{S}$ siano potenze del numero primo p.

A questo punto si presentano come possibili due sottocasi:

a) Almeno uno degli automorfismi di $\mathscr{L}(\mathfrak{G})$ su sè stesso subordina un isomorfismo strutturale singolare rispetto al numero primo p su $\mathfrak{S}$.

b) Nessun automorfismo di $\mathscr{L}(\mathfrak{G})$ su sè stesso subordina un isomorfismo singolare rispetto al numero primo p su $\mathfrak{S}$.

Consideriamo il primo sottocaso. E sia φ un automorfismo di $\mathscr{L}(\mathfrak{G})$ su sè stesso il quale subordini un isomorfismo singolare rispetto a p su $\mathfrak{S}$.

Allora in $\mathfrak{S}$ esiste un sottogruppo $\{a\}$ d'ordine p siffatto che $\varphi(\{a\})$ abbia ordine un numero primo, q, diverso da p; ed $\mathfrak{S}$ a norma della prop. II, o è un gruppo abeliano oppure uno $\mathfrak{Z}(p^m)$.

Incominciamo col far vedere che nelle ipotesi attuali si può escludere che $\mathfrak{S}$ sia uno $\mathfrak{Z}(p^m)$ con $m > 1$. Ragioniamo per assurdo, ed ammettiamo quindi che $\mathfrak{S}$ sia uno $\mathfrak{Z}(p^m)$ con $m > 1$. Allora $\varphi(\mathfrak{S})$ è uno $\mathfrak{Z}(q^m)$, con $q \neq p$ (prop. I). Ne segue per l'ipotesi induttiva che $\varphi(\mathfrak{S})$ è finito, perchè finiti sono i gruppi di Sylow di $\mathfrak{G}$ relativi a numeri primi diversi da p. Pertanto m è finito ed $\mathfrak{S}$ è un gruppo ciclico finito. Sia ora $\mathfrak{H}$ un sottogruppo finito di $\mathfrak{G}$ che contenga propriamente $\mathfrak{S}$. L'automorfismo φ subordina su $\mathfrak{H}$ un isomorfismo strutturale singolare di prima specie rispetto al numero primo p [12]). Quindi, come è noto [13]), $\mathfrak{H}$ è l'unione di $\mathfrak{S}$ e di un sottogruppo normale $\mathfrak{N}$ tale che $\mathfrak{S} \cap \mathfrak{N} = 1$. Ma $\mathfrak{S}$ contiene il gruppo $\mathfrak{G}^{(n-1)}$ normale in $\mathfrak{G}$, pertanto è $\mathfrak{G}^{(n-1)} \cup \mathfrak{N} = \mathfrak{G}^{(n-1)} \times \mathfrak{N}$. E questo è assurdo atteso il significato di $\mathfrak{G}^{(n-1)}$ e l'arbitrarietà di $\mathfrak{H}$. Osserviamo incidentalmente che quest'ultimo ragionamento ci permette anche di riconoscere che se $\mathfrak{S}$ è uno $\mathfrak{Z}(p)$ l'automorfismo φ subordina su $\mathfrak{S}$ un isomorfismo singolare di seconda specie.

---

[12]) Vedasi pag. 42-45 in [1].

[13]) Vedasi loc. c. [12]).

Ci siamo quindi ricondotti a poter supporre che $\mathfrak{S}$ sia un gruppo abeliano elementare. In tal caso consideriamo in $\mathfrak{S}$ un sottogruppo finito, $\mathfrak{K}$, che contenga $\{a\}$ ed in $\mathfrak{G}$ un sottogruppo finito $\mathfrak{T}$. Il gruppo $\mathfrak{L} = \mathfrak{T} \cup \mathfrak{K}$ è finito. Dico che φ subordina su $\mathfrak{L}$ un isomorfismo singolare $\overline{\varphi}$ di seconda specie rispetto al numero primo p. Nel fatto la cosa segue dall'osservazione precedente se $\mathfrak{S}$ è ciclico d'ordine p, e segue dall'ipotesi poste se $\mathfrak{S}$ non è ciclico [14]). Pertanto $\mathfrak{K} \cup \varphi(\{a\})$ è un P-gruppo (non abeliano) ed $\mathfrak{L}$ si spezza nel prodotto diretto di $\mathfrak{K} \cup \varphi(\{a\})$ e di un altro sottogruppo il cui ordine è primo con quello di $\mathfrak{K} \cup \varphi(\{a\})$. Ne segue che il gruppo $\varphi(\{a\}) \cup \mathfrak{S}$, diciamolo $\mathfrak{M}$ è un P-gruppo non abeliano e che ogni elemento di $\mathfrak{G}$ di ordine primo con pq è permutabile con ogni elemento di $\mathfrak{M}$. A questo punto è facile vedere che $\mathfrak{G}$ si può pensare come il prodotto diretto di un P-gruppo $\mathfrak{M}$ e di un gruppo $\mathfrak{N}$, i cui elementi hanno gli ordini primi con pq: nel fatto basta osservare che se c e d sono due elementi di $\mathfrak{G}$ con gli ordini primi con pq, ogni elemento del gruppo (finito) generato da c e d ha l'ordine primo con pq. Mostriamo adesso che $\mathfrak{M}$ è finito: nel fatto, $\mathfrak{M}$ è dotato di duale; quindi è dotato di duale, epperò è finito, anche il gruppo abeliano elementare a cui esso è strutturalmente isomorfo (prop. III).

Di qui e dalla struttura di $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}^{(n-1)}$, segue il teorema nel sottocaso a). Passiamo al sottocaso b). Basta dimostrare che $\mathfrak{S}$ è finito e che $\mathfrak{G}$ si spezza nel prodotto diretto di $\mathfrak{S}$ e di un altro sottogruppo; perchè allora la conclusione si raggiunge di nuovo ricordando la struttura di $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}^{(n-1)}$. Incominciamo col far vedere che $\mathfrak{S}$ è normale in $\mathfrak{G}$. Ragioniamo per assurdo. Dalla struttura di $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}^{(n-1)}$ segue che il normalizzante di $\mathfrak{S}$ in $\mathfrak{G}$ ha indice finito in $\mathfrak{G}$. Pertanto tutti i sottogruppi di Sylow di $\mathfrak{G}$ relativi al numero primo p sono coniugati tra di loro [15]). E se si aggiunge l'ipotesi che $\mathfrak{S}$ non sia normale in $\mathfrak{G}$ e si tien conto di nuovo della struttura di $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}^{(n-1)}$, si riconosce che in $\mathfrak{G}$ esiste almeno un sottogruppo $\mathfrak{F}$ che contenga $\mathfrak{G}$ e siffatto che $\mathfrak{F}/\mathfrak{G}^{(n-1)}$ sia un P-gruppo d'ordine pr, col numero primo r maggiore di p. Ne

[14]) Vedasi loc. c. [12]).

[15]) Vedasi ad es. [3].

segue che l'indice di $\mathfrak{G}^{(n-1)}$ in $\mathfrak{S}$ è p, e che $\mathfrak{G}^{(n-1)}$ è l'intersezione di $\mathfrak{S}_1$ ed $\mathfrak{S}_2$ per poco che $\mathfrak{S}_1$ ed $\mathfrak{S}_2$ siano due sottogruppi coniugati ad $\mathfrak{S}$ e distinti fra di loro. D'altra parte se φ è un qualunque automorfismo di $\mathscr{L}(\mathfrak{G})$ su sè stesso, risulta $\varphi(\mathfrak{G}^{n-1}) = \varphi(\mathfrak{S}_1) \cap \cap\, \varphi(\mathfrak{S}_2)$, epperò $\varphi(\mathfrak{G}^{n-1}) = \mathfrak{G}^{(n-1)}$, perchè $\varphi(\mathfrak{S}_1)$ e $\varphi(\mathfrak{S}_2)$ sono ancora per $\mathfrak{G}$ due sottogruppi di Sylow relativi al numero primo p. Vale a dire $\mathfrak{G}$ è $\mathscr{L}(\mathfrak{G})$-invariante. Ma allora $\mathfrak{G}^{(n-1)}$ è un p-gruppo risolubile con duale. Quindi è finito per il lemma del n. 2; pertanto è finito anche $\mathfrak{S}$. Pertanto $\mathfrak{F}$ è $\mathscr{L}(\mathfrak{G})$-invariante. Si conclude che $\mathfrak{F}$ è dotato di duale, epperò è un P-gruppo. Ma ciò implica che $\mathfrak{G}^{(n-1)}$ sia identico, contro l'ipotesi fatta su n. Dunque $\mathfrak{S}$, come si voleva, è normale in $\mathfrak{G}$.

Mostriamo ora che $\mathfrak{S}$ è finito. Infatti $\mathfrak{S}$ è $\mathscr{L}(\mathfrak{G})$-invariante, perchè esso è normale, e perchè nessuno degli automorfismi di $\mathscr{L}(\mathfrak{G})$ su sè stesso è singolare rispetto al numero primo p; quindi $\mathfrak{S}$ è dotato di duale. Ma $\mathfrak{S}$ è anche un p-gruppo risolubile; pertanto esso è finito, come si voleva, sempre in virtù del lemma del n. 2.

Poichè $\mathfrak{G}$ è localmente finito, per completare lo studio del sottocaso *b*), basta dimostrare che l'unione di $\mathfrak{S}$ con un qualunque sottogruppo di Sylow di $\mathfrak{G}$ relativo ad un numero primo diverso da p coincide col prodotto diretto di $\mathfrak{S}$ per il sottogruppo.

Supponiamo per assurda ipotesi che in $\mathfrak{G}$ esistono sottogruppi di Sylow che non siano direttamente permutabili con $\mathfrak{S}$ e che siano relativi a numeri primi, q, diversi da p. I valori possibili per q sono in numero finito, perchè il centralizzante di $\mathfrak{S}$ in $\mathfrak{G}$ ha indice finito, in quanto $\mathfrak{S}$ è un sottogruppo finito normale. Siano $q_1, q_2, \ldots, q_t$ i valori possibili per q. Siano $\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2, \ldots, \mathfrak{Q}_t$ sottogruppi di Sylow di $\mathfrak{G}$ non permutabili direttamente con $\mathfrak{S}$, e rispettivamente relativi ai numeri primi $q_1, q_2, \ldots, q_t$. Essi sono ciclici perchè altrimenti le unioni $\mathfrak{Q}_1 \cup \mathfrak{S}, \ldots, \mathfrak{Q}_t \cup \mathfrak{S}$ sarebbero contenute in gruppi contenuti in gruppi finiti $\mathscr{L}(\mathfrak{G})$-invarianti e quindi con duale; ma allora in virtù di risultati noti, i gruppi $\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2, \ldots, \mathfrak{Q}_t$ sarebbero direttamente permutabili con $\mathfrak{S}$, contro l'ipotesi. Siano ora $q_1^{\alpha_1}, \ldots, q_t^{\alpha_t}$ gli ordini rispettivi dei sottogruppi $\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2, \ldots, \mathfrak{Q}_t$. In virtù dell'ipotesi induttiva e del fatto che $\mathfrak{S}$ contiene $\mathfrak{G}^{(n-1)}$, il gruppo $\mathfrak{G}^{(n-1)}$ contiene un sottogruppo $\mathfrak{M}$ d'ordine $q_1^{\alpha_1} \dots q_i^{\alpha_i} p^{\alpha}$, se p^{α} è l'ordine di $\mathfrak{S}$. Il gruppo $\mathfrak{M}$ è $\mathscr{L}(\mathfrak{G})$-invariante; epperò è dotato di duale. Indi $\mathfrak{M}$ è un P-gruppo non abeliano e $\mathfrak{G}$ si spezza in un prodotto diretto del tipo $\mathfrak{M} \times \mathfrak{L}$, cosa assurda perchè $\mathfrak{S}$ è $\mathscr{L}(\mathfrak{G})$-invariante. E il sottocaso b) è esaurito.

Per completare la dimostrazione del teorema, resta da esaminare il caso che $\mathfrak{G}^{(n-1)}$ non sia un p-gruppo.

Mostriamo anzitutto che gli ordini dei sottogruppi di Sylow di $\mathfrak{G}$ sono finiti. Infatti, ammettiamo che la circostanza non sia vera per il numero primo p, e supponiamo $\mathfrak{G}_p^{(n-1)}$ sia, per $\mathfrak{G}^{(n-1)}$ un sottogruppo di Sylow relativo al numero primo p. Allora $\mathfrak{G}_p^{(n-1)}$ non è identico e posto $\mathfrak{G}^{(n-1)} = \mathfrak{G}_p^{(n-1)} \times {}_p\mathfrak{G}^{(n-1)}$, il sottogruppo $\mathfrak{G}/{}_p\mathfrak{G}^{(n-1)}$ conterrebbe dei gruppi di Sylow di ordine infinito. Cosa assurda in virtù dei risultati precedenti, perchè $\mathfrak{G}/{}_p\mathfrak{G}^{n-1}$ ha duale, ha come lunghezza della serie derivata n ed ha come derivato $(n-1)$ -esimo un p-gruppo.

Sia di nuovo $\mathfrak{G}_p^{(n-1)}$ un sottogruppo di Sylow (non identico) di $\mathfrak{G}^{(n-1)}$ relativo ad un certo numero primo p, e si ponga di nuovo $\mathfrak{G}^{(n-1)} = \mathfrak{G}_p^{n-1} \times {}_p\mathfrak{G}^{(n-1)}$. Allora $\mathfrak{G}/{}_p\mathfrak{G}^{(n-1)}$ è metabeliano, sempre in virtù dei risultati precedenti; quindi $n - 1 = 1$, epperò anche $\mathfrak{G}$ è metabeliano.

Sia ora $\mathfrak{G}_q$ un sottogruppo di Sylow non normale in $\mathfrak{G}$ e relativo al numero primo p. Il gruppo $\mathfrak{G}_q$ non è contenuto in $\mathfrak{G}'$. Inoltre, sempre a norma dei risultati precedenti, $\mathfrak{G}'$ contiene almeno un sottogruppo di Sylow siffatto che $\mathfrak{G}_q \cup \mathfrak{G}_p$ sia un P-gruppo non abeliano d'ordine qp, il numero primo p riuscendo maggiore di q. Mostriamo ora che il numero primo p è individuato. Ragioniamo di nuovo per assurdo e supponiamo che $\mathfrak{G}_r$ sia un sottogruppo di Sylow relativo ad un numero primo r diverso da p e dotato di proprietà analoghe di $\mathfrak{G}_p$. Dalla struttura di $\mathfrak{G}/{}_p\mathfrak{G}'$ segue che l'unione $\mathfrak{G}_q \cup \mathfrak{G}_p$ ha un complemento, ${}^p\mathfrak{N}$, normale in $\mathfrak{G}$ [16]). Analogamente dalla struttura di $\mathfrak{G}/{}_r\mathfrak{G}'$ segue che $\mathfrak{G}_q \cup \mathfrak{G}_r$ ha un complemento, ${}^r\mathfrak{N}$, normale in $\mathfrak{G}$. Ma allora $\mathfrak{G} = (\mathfrak{G}_p \cup \mathfrak{G}_q \cup \mathfrak{G}_r) \cup ({}^p\mathfrak{N} \cap {}^r\mathfrak{N})$, $(\mathfrak{G}_p \cup \mathfrak{G}_q \cup \mathfrak{G}_r) \cup$

---

[16]) Rammentiamo che ${}^p\mathfrak{N}$ è un complemento di $\mathfrak{G}_p \cup \mathfrak{G}_q$, se ${}^p\mathfrak{N} \cup (\mathfrak{G}_p \cup \mathfrak{G}_q) = \mathfrak{G}$ e se ${}^p\mathfrak{N} \cap (\mathfrak{G}_p \cap \mathfrak{G}_q) = 1$.

$\cap\ ({}^{p}\mathfrak{N} \cap {}^{r}\mathfrak{N}) = 1$. Di qui segue che il gruppo $\mathfrak{G}_p \cup \mathfrak{G}_q \cup \mathfrak{G}_r$ è isomorfo al gruppo $\mathfrak{G}/{}^{p}\mathfrak{N} \cap {}^{r}\mathfrak{N}$, dotato di duale. Quindi anche il gruppo $\mathfrak{G}_p \cup \mathfrak{G}_q \cup \mathfrak{G}_r$ è dotato di duale; cosa assurda perchè $\mathfrak{G}_r$ non è direttamente permutabile con $\mathfrak{G}_q$. In modo del tutto analogo si dimostra che anche il numero primo q è individuato, facendo vedere che se il numero primo s è diverso da q, mancano in $\mathfrak{G}$ sottogruppi di Sylow relativi ad s i quali diano con $\mathfrak{G}_p$ unioni che siano P-gruppi. Nelle considerazioni precedenti è implicito poi che $\mathfrak{G}_p \cup \mathfrak{G}_q$ è normale in $\mathfrak{G}$. Se ne deduce che $\mathfrak{G}$ è il prodotto diretto di gruppi risolubili finiti irriducibili in senso reticolare e con gli ordini a due a due primi tra loro. In virtù della prop. IV i fattori di questo prodotto diretto sono dotati di duale.

Donde il teorema enunciato all'inizio del numero.

Ma il teorema stesso si inverte in virtù della prop. IV e quindi la condizioni trovata non è soltanto necessaria ma anche sufficiente. Donde il teorema enunciato nella prefazione.

BIBLIOGRAFIA

[1] Suzuki M.: *Structure of a group and the structure of its lattice of subgroups,* Springer Verlag, Berlin, 1956.

[2] Fuchs A.: *Abelian groups,* Pergamon Press, London, 1960.

[3] Kurosh K. A.: *The theory of groups,* vol. II, Chelsea Publ. Co. New York 1956.

[4] Cernikov S. N.: *Infinite groups with finite layers,* Mat. Sbornik, vol. 22, 1948.

[5] Berge Cl.: *Theorie des graphes et ses applications,* Dunod, Paris, 1958.

[6] Suzuki M.: *On the lattice of subgroups of finite groups,* Trans. Amer. Math. Soc. 70, 1951.