

# RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

RENATO ZANOVELLO

## **Un'estensione di un teorema di Milloux**

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*,  
tome 31 (1961), p. 165-170

[http://www.numdam.org/item?id=RSMUP\\_1961\\_\\_31\\_\\_165\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1961__31__165_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1961, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques*  
<http://www.numdam.org/>

## UN'ESTENSIONE DI UN TEOREMA DI MILLOUX

*Nota (\*) di RENATO ZANOVELLO (a Padova)*

In questa Nota indico un teorema per l'esistenza d'un integrale non identicamente nullo, infinitesimo al tendere di  $x$  all'infinito positivo, dell'equazione differenziale ordinaria:

$$(1) \quad y''(x) + Q(x)y'(x) + \beta(x)y(x) = 0;$$

quando  $Q(x) \equiv 0$ , il mio teorema si riduce ad una proposizione di Milloux <sup>1)</sup>.

Nel corso di questa Nota, supporrò sempre che:

I) *le funzioni  $Q(x)$  e  $\beta(x)$  siano continue per  $x \geq x_0$ , dove  $x_0$  è un numero reale fisso.*

Se a quest'ipotesi si aggiungono quella che

II) *la funzione  $\beta(x)$  sia positiva per  $x \geq x_0$ .*  
e che

III) *la funzione*

$$\beta(x)e^{\int_{x_0}^x 2Q(t)dt}$$

*non decresca per  $x \geq x_0$ .*

---

(\*) Pervenuta in redazione il 19 marzo 1961.

Indirizzo dell'A.: Seminario matematico, Università, Padova.

<sup>1)</sup> MILLOUX H., *Sur l'equation differentielle  $\ddot{x} + A(t)x = 0$* , Prace

allora, qualunque sia l'integrale  $y(x)$  della (1), la funzione

$$y^2(x) + \frac{y'^2(x)}{\beta(x)}$$

non cresce per  $x \geq x_0$ . La cosa è nota <sup>2)</sup> ed implica che ogni soluzione della (1) è limitata per  $x \geq x_0$ . Posto

$$\Phi_\nu(x) = y^2(x) + \frac{y'^2(x)}{\beta(x)}$$

chiamo  $\lambda_\nu^2$ , supponendo  $\lambda_\nu \geq 0$ , il limite finito e non negativo, verso il quale  $\Phi_\nu(x)$  tende quando  $x$  tende a  $+\infty$ . Si noti che da  $\lambda_\nu = 0$ , segue subito  $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = 0$ .

Premesso ciò, voglio dimostrare il seguente teorema:

*Se alle ipotesi I), II), III) si aggiungono quella che*

IV) *la funzione*

$$-\int_{x_0}^x Q(t)dt$$

*sia superiormente limitata,  
e che*

V) *la funzione  $\beta(x)$  tenda a  $+\infty$  quando  $x$  tende a  $+\infty$ , allora la (1) ammette almeno una soluzione non identicamente nulla, infinitesima al tendere di  $x$  a  $+\infty$ .*

Innanzitutto considero il caso che la (1) ammetta due soluzioni monotone da un certo punto in poi e linearmente indipendenti  $f(x)$  e  $g(x)$ . Poichè  $f(x)$  e  $g(x)$  sono monotone e limitate, esse

Mathematyczno. Fizyczne, 41 (1934). Un'altra dimostrazione del teorema di Milloux si può trovare in: G. PRODI, *Un'osservazione sugli integrali dell'equazione  $y'' + A(x)y = 0$  nel caso  $A(x) \rightarrow +\infty$  per  $x \rightarrow \infty$* , Rend. Acc. Naz. Lincei (1950).

<sup>2)</sup> TREVISAN G., *Un teorema di stabilità per le equazioni differenziali lineari del secondo ordine*, Rend. Acc. Naz. Lincei, Roma (1960).

convergono quando  $x$  tende a  $+\infty$ ; e posto:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \gamma, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \delta,$$

è lecito supporre altresì che i numeri  $\gamma$  e  $\delta$  non siano nulli, perchè altrimenti il teorema sarebbe senz'altro verificato. Allora la funzione  $\gamma g(x) - \delta f(x)$  è un integrale non identicamente nullo della (1), infinitesimo quando  $x$  tende a  $+\infty$ . Donde di nuovo il teorema.

Escluso tale caso, considero una soluzione  $y(x)$ , certo esistente, della (1), non identicamente nulla e dotata di infiniti punti di massimo, contenuti nella semiretta  $x \geq x_0$ . Dimostro che questo insieme di punti di massimo non può avere punti d'accumulazione al finito. Infatti se, per assurdo,  $\xi$  è un tal punto d'accumulazione, la continuità di  $y'(x)$  porta alla  $y'(\xi) = 0$ , e la continuità di  $y''(x)$  e il teorema di Rolle conducono alla  $y''(\xi) = 0$ . Dopo di chè la (1) e la  $\beta(\xi) > 0$  danno  $y(\xi) = 0$ ; e  $y(x)$  sarebbe identicamente nulla, essendo nulla nel punto  $\xi$  assieme alla sua derivata prima e soddisfacendo alla (1).

Nelle considerazioni svolte, è implicito che la soluzione  $y(x)$  non può annullarsi nei suoi punti di massimo. Sicchè non è restrittivo considerare per  $y(x)$  una successione di punti di massimo

$$(2) \quad \eta_1, \eta_2, \eta_3, \dots$$

siffatti che  $\eta_i$  diverga a  $+\infty$  e che  $y(\eta_i)$  sia sempre maggiore di zero, perchè altrimenti basterebbe passare da  $y(x)$  a  $-y(x)$ .

Mostrerò in seguito che per ogni altra soluzione  $z(x)$  della (1), nelle ipotesi attuali, risulta:

$$(3) \quad \lim_{i \rightarrow +\infty} |z(\eta_i)| = \lambda_z,$$

il significato di  $\lambda_z$  essendo naturalmente analogo a quello di  $\lambda_y$ . Ed ora invece sfrutterò la (3) per completare la dimostrazione del teorema.

Ammetto infatti per assurdo, che l'unica soluzione della (1), infinitesima al tendere di  $x$  a  $+\infty$  sia quella identicamente

nulla. Chiamo  $u(x)$  e  $v(x)$  due soluzioni linearmente indipendenti e quindi non identicamente nulle della (1) di guisa che  $\lambda_u > 0$  e  $\lambda_v > 0$ , il significato di  $\lambda_u$  e  $\lambda_r$  essendo ormai ovvio. Suppongo, com'è lecito, che fra i termini della successione:

$$u(\eta_1), u(\eta_2), u(\eta_3), \dots$$

ve ne siano infiniti positivi o nulli; nel caso contrario basterebbe considerare  $-u(x)$  al posto di  $u(x)$ . Ricordando la (3), si riconosce che dalla successione (2) si può estrarre la successione:

$$(4) \quad \eta'_1, \eta'_2, \eta'_3, \dots$$

in tal guisa da aversi

$$(5) \quad \lim_{i \rightarrow +\infty} u(\eta'_i) = \lambda_u.$$

Allo stesso modo, si riconosce che dalla successione (4) se ne può estrarre un'altra

$$\eta''_1, \eta''_2, \eta''_3, \dots,$$

siffatta da aversi

$$(6) \quad \lim_{i \rightarrow +\infty} v(\eta''_i) = \lambda_r,$$

mentre dalla (5) segue

$$(7) \quad \lim_{i \rightarrow +\infty} u(\eta''_i) = \lambda_u.$$

Posto ora

$$(8) \quad \tau(x) = \lambda_v u(x) - \lambda_u v(x),$$

$\tau(x)$  è una soluzione non identicamente nulla della (1). Inoltre dalla (3) deduco

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} |\tau(\eta'_i)| = \lambda_\tau$$

e quindi

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} |\tau(\eta''_i)| = \lambda_\tau,$$

mentre le (6), (7) e (8) porgono

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} \tau(\eta_i'') = \lambda_r \lambda_u - \lambda_u \lambda_r = 0,$$

donde appunto  $\lambda_r = 0$ , e quindi la conclusione.

Per completare la dimostrazione, resta da far vedere che:  
*Ferme le ipotesi del teorema precedente, se la (1) ammette una soluzione  $y(x)$  non identicamente nulla e dotata di massimi in una successione divergente a  $-\infty$*

$$\eta_1, \eta_2, \eta_3, \dots$$

per ogni altra soluzione  $z(x)$  della (1), risulta:

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} |z(\eta_i)| = \lambda_z,$$

cioè sussiste la (3).

Infatti se

$$W(x) = y(x)z'(x) - z(x)y'(x)$$

è il wronskiano di  $y(x)$  e  $z(x)$ , risulta notoriamente

$$y(x)z'(x) - z(x)y'(x) = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^x Q(t)dt}$$

epperò, attesa la  $y'(\eta_i) = 0$ ,

$$y(\eta_i)z'(\eta_i) = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{\eta_i} Q(t)dt}$$

e quindi

$$(9) \quad z'(\eta_i) = \frac{W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{\eta_i} Q(t)dt}}{y(\eta_i)}$$

la divisione essendo lecita appunto perchè  $y(\eta_i)$  è diverso da zero; non è restrittivo anzi supporre che sia sempre  $y(\eta_i) > 0$ . D'altra

parte, poichè  $y'(\eta_i)$  è nulla, poichè

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi_\nu(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ y^2(x) + \frac{y'^2(x)}{\beta(x)} \right] = \lambda_\nu^2,$$

e per l'ipotesi II), trovo:

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} y^2(\eta_i) = \lambda_\nu^2$$

e quindi

$$(10) \quad \lim_{i \rightarrow +\infty} y(\eta_i) = \lambda_\nu$$

perchè nelle ipotesi attuali  $y(\eta_i)$  è maggiore di zero al pari di  $\lambda_\nu$ . Poichè  $\Phi_\nu(x)$  non cresce di modo che  $\Phi_\nu(x) \geq \lambda_\nu^2$  e poichè  $y'(\eta_i) = 0$ , la (10) può essere accompagnata dalla

$$y(\eta_i) \geq \lambda_\nu$$

e la (9) porge allora:

$$|z'(\eta_i)| \leq \frac{|W(x_0)| e^{-\int_{x_0}^{\eta_i} Q(t) dt}}{\lambda_\nu}$$

Da questa disuguaglianza e dall'ipotesi IV), segue che l'insieme dei valori  $z'(\eta_i)$  è un insieme limitato. Di qui, dalla

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi_z(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ z^2(x) + \frac{z'^2(x)}{\beta(x)} \right] = \lambda_z^2$$

e dall'ipotesi V), segue

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} z^2(\eta_i) = \lambda_z^2$$

donde la (3), visto che  $\lambda_z$  non è negativo. E la dimostrazione è ultimata.