RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

MARIO VOLPATO

Sulle funzioni definite implicitamente dall'equazione $f(x, y) = 0$

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 31 (1961), p. 255-265

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1961__31__255_0>

SULLE FUNZIONI DEFINITE IMPLICITAMENTE DALL'EQUAZIONE $f(x, y) = 0$

Nota (*) *di* MARIO VOLPATO (*a Venezia*)

In un recente lavoro [1]) ho iniziato lo studio di una particolare classe di superficie, la quale, pur avendo una generalità che si apparenta a quella delle superficie lipschitziane, presenta notevoli proprietà geometriche del tutto simili a quelle ben note della geometria differenziale classica.

In vista di ulteriori sviluppi di quel lavoro, si presenta una questione il cui interesse trascende i particolari motivi che la pongono e della quale qui mi occupo considerando il caso più semplice dal punto di vista formale. Ecco di che si tratta.

Si estenda il concetto di soluzione del problema

$$f(x, y(x)) = 0 \tag{1}$$

$$y(x_0) = y_0 \tag{2}$$

$$f'_x(x, y(x)) + f'_y(x, y(x))y'(x) = 0 \tag{3}$$

considerando soluzioni anche quelle funzioni $y(x)$ assolutamente continue, soddisfacenti (1), (2) e, quasi ovunque, la (3). Allora, in quale classe di funzioni $f(x, y)$, più ampia di quella indicata

---

(*) Pervenuta in redazione il 9 novembre 1961.
Indirizzo dell'A.: Istituto Universitario Ca' Foscari, Venezia.

[1]) M. VOLPATO, *Sopra alcune proprietà geometriche di una particolare classe di superficie*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, vol. XXX (1960), pp. 328-348.

dal classico teorema sulle funzioni implicite di U. Dini, può essere formulato un teorema di esistenza ed unicità?

Non mi risulta che la questione, così posta, sia stata oggetto di studio prima d'ora [2]). In questa breve Nota indico una risposta alla questione. Nel n. 1 definisco la classe delle funzioni $f(x, y)$ nella quale verrà studiato il problema, nel n. 2 enuncio il teorema di esistenza ed unicità, alla cui dimostrazione sono dedicati i nn. 3, 4; nel n. 5 metto in evidenza un insieme nel quale è certamente soddisfatta l'equazione (3), e, infine, nel n. 6 segnalo un esempio critico.

1. - La classe delle funzioni $f(x, y)$ nella quale indico un criterio di risolubilità del problema posto, non è nuova. È, sostanzialmente, la stessa che ho considerato altrove a proposito della derivabilità delle funzioni composte [3]). Precisamente, si tratta delle funzioni, reali di variabili reali, $f(x, y)$ definite in un rettangolo $R = \mathfrak{I} \times J$, $\mathfrak{I} = a \leqslant x \leqslant b$, $J = c \leqslant y \leqslant d$, e che ivi soddisfanno le condizioni:

I) *sono assolutamente continue, separatamente, rispetto alle singole variabili*;

II) *hanno le derivate parziali* $f'_x(x, y)$, $[f'_y(x, y)]$, *in tutti i punti di quasi tutte le sezioni di* R *con le verticali* [*orizzontali*]; *su quasi tutte queste sezioni le derivate parziali subordinano funzioni continue e, posto*

$$\operatorname*{Extr.\,Sup.}_{y \in J} | f'_x(x, y) | = L(x) , \qquad [\operatorname*{Extr.\,Sup.}_{x \in \mathfrak{I}} |f'_y(x, y) | = M(y)] ,$$

le funzioni $L(x)$, $[M(y)]$, *che risultano misurabili in* $\mathfrak{I}$, $[J]$, *sono pure sommabili ivi.*

Riservando il nome di *ordinarie* alle funzioni $f(x, y)$ dotate di derivate parziali prime continue, e usando una terminologia

[2]) Per una interessante generalizzazione del teorema del Dini si vegga B. Manià, *Sopra i sistemi di equazioni differenziali in forma implicita*, Rend. Ist. Lombardo di Sc. e Lettere, serie II, vol. LXIX.

[3]) M. Volpato, *Sulla assoluta continuità e sulla validità della classica formula di derivazione delle funzioni composte*, Rend. Sem. Mat., vol. XXVII (1957), pp. 37-47.

introdotta nel loco cit. in 1), diremo che le funzioni $f(x, y)$ soddisfacenti *I*), *II*) sono *quasi ordinarie in modo regolare* (brevemente: **Q.O.R.**). La ragione della denominazione sta nel fatto che, in quasi tutti i punti di R, una $f(x, y)$ soddisfacente *I*), *II*) è, fra l'altro, differenziabile nel senso di Stolz; non solo, ma gli eventuali punti di R ove non sussiste tale differenziabilità sono contenuti nell'unione di un'insieme di verticali e di un insieme di orizzontali segati, ognuno, in insiemi di misura nulla, rispettivamente dalle orizzontali e dalle verticali. È il caso di ricordare che sono **Q.O.R.** le funzioni del tipo

$$f(x, y) = \int_a^x \int_c^y g(\xi, \eta) d\xi d\eta \,, \qquad (x, y) \in R \,,$$

con $g(x, y)$ sommabile (superficialmente) in R.

2. - Teorema di esistenza e di unicità.

Ecco il teorema di esistenza e unicità (in piccolo) che risolve, nel senso da noi precisato, il problema 1), 2), 3).

Sia $f(x, y)$ una funzione Q.O.R. e $P_0(x_0, y_0)$ sia un punto di R per il quale

i) *$f'_y(x, y_0)$ è continua,*

ii) *sussistono le*

$$f(x_0, y_0) = 0 \,, \qquad f'_y(x_0, y_0) \neq 0 \,,$$

iii) *esistono un intorno $R_0 = \mathfrak{J}_0 \times J_0$, $\mathfrak{J}_0 = | x - x_0 | \leqslant \alpha_0$, $J_0 = | y - y_0 | \leqslant \beta_0$ di P_0 e un numero k positivo e minore di uno tali che per ogni fissato x di $\mathfrak{J}_0$ e per quasi tutti gli y di J_0 risulta*

$$| f'_y(x, y) - f'_y(x_0, y_0) | \leqslant k \, | f'_y(x_0, y_0) | \,. \tag{4}$$

In queste ipotesi, in un intorno $\mathfrak{J}_0^*$ di x_0 esiste una ed una sola *funzione* $y(x)$ *assolutamente continua soddisfacente l'uguaglianza*

$$f(x, y(x)) = 0 \tag{5}$$

per ogni x *di* $\mathfrak{J}_0^*$, *la condizione*

$$y(x_0) = y_0\,, \tag{6}$$

e l'uguaglianza

$$f'_x(x, y(x)) + f'_y(x, y(x))y'(x) = 0 \tag{7}$$

per quasi tutti gli x *di* $\mathfrak{J}_0^*$.

È appena il caso di osservare che la *iii*) è certamente soddisfatta quando la $f'_y(x, y)$ è continua nel punto P_0. L'esempio che indicheremo nel n. 6 mostrerà che se non è soddisfatta la *iii*) il problema 1), 2), 3) può non avere soluzione unica. Vedremo che le nostre ipotesi assicurano l'applicabilità del teorema di derivazione delle funzioni composte cit. in 3) al primo membro della (5), di guisa che la (7) è una conseguenza della (5).

3. - Dimostriamo ora il teorema enunciato.
Posto

$$g(x, y) = y - y_0 - \frac{f(x, y)}{f'_y(x_0, y_0)}\,, \tag{8}$$

basta provare che, in un intorno $\mathfrak{J}_0^*$ di x_0, esiste una ed una sola funzione $y(x)$, assolutamente continua, la quale soddisfa l'uguaglianza

$$y(x) = y_0 + g(x, y(x)) \tag{9}$$

in ogni punto di $\mathfrak{J}_0^*$, la condizione

$$y(x_0) = y_0\,, \tag{10}$$

e l'uguaglianza

$$(11) \qquad y'(x) = g'_x(x, y(x)) + g'_y(x, y(x))y'(x)$$

in quasi tutti gli x di $\mathfrak{J}_0^*$.

È il caso di rilevare esplicitamente che l'appartenenza della $f(x, y)$ alla classe delle funzioni **Q.O.R.** e la posizione (8) implicano le relazioni

$$(12) \qquad g'_x(x, y) = -\frac{f'_x(x, y)}{f'_y(x_0, y_0)}, \qquad g'_y(x, y) = 1 - \frac{f'_y(x, y)}{f'_y(x_0, y_0)},$$

$$(13) \qquad | g'_y)x, y) | \leqslant \frac{L(x)}{| f'_y(x_0, y_0) |}, \qquad | g'_y(x, y) | \leqslant \frac{2M(y)}{| f'_y(x_0, y_0) |}$$

sufficienti per dire che anche $g(x, y)$ è **Q.O.R.** in R.

Inoltre, attesa la *i*), anche $g'_y(x, y_0)$ è continua in $\mathfrak{J}$ e sussistono, a norma di *ii*), le

$$(14) \qquad g(x_0, y_0) = 0 , \qquad g'_y(x_0, y_0) = 0 .$$

Infine la *iii*) implica, come ora vedremo, l'esistenza di un intorno $\mathfrak{J}'_0$ di x_0, contenuto in $\mathfrak{J}_0$, siffatto che per ogni $x \in \mathfrak{J}'_0$ e per quasi tutti gli y di J_0 sussiste la disuguaglianza

$$(15) \qquad | g'_y(x, y) | \leqslant \frac{1 + k\varrho}{1 + \varrho} < 1 ,$$

ϱ essendo un qualsivoglia numero reale positivo.

Infatti, osserviamo dapprima che, soddisfacendo k le disuguaglianze

$$(16) \qquad 0 < k < 1 ,$$

sussistono, per ogni $\varrho > 0$, le relazioni

$$(17) \qquad k < \frac{1 + k\varrho}{1 + \varrho} < 1$$

$$(18) \qquad 0 < \frac{1 - k}{1 + \varrho} < 1 .$$

Ebbene, attesa la continuità di $f'_y(x, y_0)$, esiste un intorno $\mathfrak{J}'_0$ di x_0, contenuto in $\mathfrak{J}_0$, e nel quale sussiste la disuguaglianza

$$(19) \qquad | f'_y(x, y_0) - f'_y(x_0, y_0) | \leqslant \frac{1-k}{1+\varrho} | f'_y(x_0, y_0) | .$$

Di qui e dalla (4) seguono allora le relazioni

$$(20) \quad | g'_y(x, y) | = \left| 1 - \frac{f'_y(x, y)}{f'_y(x_0, y_0)} \right| \leqslant \frac{| f'_y(x_0, y_0) - f'_y(x, y_0) |}{| f'_y(x_0, y_0) |} + \\ + \frac{| f'_y(x, y_0) - f'_y(x, y) |}{| f'_y(x_0, y_0) |} \leqslant \frac{1-k}{1+\varrho} + k = \frac{1+k\varrho}{1+\varrho} ,$$

che, insieme con la (17), porgono, appunto, la (15).

4. - Ciò premesso, indichiamo con $\mathfrak{J}''_0$ un intorno di x_0 siffatto che per ogni sua coppia di punti x', x'' sussista la disuguaglianza

$$(21) \qquad \frac{\left| \int_{x'}^{x''} L(\xi) d\xi \right|}{\left(1 - \frac{1+k\varrho}{1+\varrho}\right) | f'_y(x_0, y_0) |} \leqslant \beta_0 .$$

Posto $\mathfrak{J}^*_0 = \mathfrak{J}'_0 \cap \mathfrak{J}''_0$, e detto Σ lo spazio delle funzioni $z(x)$ continue in $\mathfrak{J}^*_0$ (la metrica essendo quella lagrangiana), consideriamo in Σ l'insieme Σ_0 formato dalle $z(x)$ soddisfacenti le

$$(22) \quad z(x_0) = y_0 , \qquad | z(x') - z(x'') | \leqslant \frac{\left| \int_{x'}^{x''} L(\xi) d\xi \right|}{\left(1 - \frac{1+k\varrho}{1+\varrho}\right) | f'_y(x_0, y_0) |} ,$$

di guisa che Σ_0 risulta *convesso, chiuso* e *limitato*; anzi, addirittura, *compatto* in Σ.

Ebbene, consideriamo la trasformazione T definita dall'uguaglianza

$$v(x) = y_0 + g(x, z(x)) \,, \tag{23}$$

e mostriamo che T muta Σ_0 in sè. Infatti, sfruttando, nell'ordine, la prima delle (13), la (21) e la (22) che porgono la disuguaglianza

$$| z(x) - y_0 | \leqslant \beta_0 \,, \tag{24}$$

la (15) e, ancora, la seconda delle (22), si può scrivere

$$\begin{aligned}
(25)\quad & | v(x') - v(x'') | = | g(x', z(x')) - g(x'', z(x'')) | \leqslant \\
& \leqslant | g(x', z(x')) - g(x'', z(x')) | + | g(x'', z(x')) - g(x'', z(x'')) | \leqslant \\
& \leqslant \left| \int_{x'}^{x''} g'_x(\xi, z(x')) d\xi \right| + \left| \int_{z(x')}^{z(x'')} g'_y(x'', \eta) d\eta \right| \leqslant \\
& \leqslant \frac{\left| \int_{x'}^{x''} L(\xi) d\xi \right|}{| f'_y(x_0, y_0) |} + \frac{1 + k\varrho}{1 + \varrho} | z(x') - z(x'') | \leqslant \\
& \leqslant \frac{\left| \int_{x'}^{x''} L(\xi) d\xi \right|}{| f'_y(x_0, y_0) |} + \frac{1 + k\varrho}{1 + \varrho} \, \frac{\left| \int_{x'}^{x''} L(\xi) d\xi \right|}{\left(1 - \dfrac{1 + k\varrho}{1 + \varrho}\right) | f'_y(x_0, y_0) |} = \\
& = \frac{\left| \int_{x'}^{x''} L(\xi) d\xi \right|}{\left(1 - \dfrac{1 + k\varrho}{1 + \varrho}\right) | f'_y(x_0, y_0) |} \,.
\end{aligned}$$

Allora, essendo T, evidentemente, continua, esiste in Σ_0 almeno un elemento unito per T. Cioè, esiste almeno una $y(x)$

continua in $\mathfrak{J}_0^*$, soddisfacente le

$$(26)\qquad y(x_0) = y_0\,, \quad |\, y(x') - y(x'')\,| \leqslant \frac{\left|\displaystyle\int_{x'}^{x''} L(\xi)d\xi\right|}{\left(1 - \dfrac{1+k\varrho}{1+\varrho}\right)|\, f'_y(x_0, y_0)\,|}\,,$$

per ogni coppia x', x'' di $\mathfrak{J}_0^*$, e la

$$(27)\qquad y(x) = y_0 + g(x, y(x))\,, \qquad |\, y(x) - y_0\,| \leqslant \beta_0\,,$$

per ogni x di $\mathfrak{J}_0^*$.

Tale elemento unito è unico perchè a norma della

$$(28)\qquad \|\, v_1(x) - v_2(x)\,\| = \underset{x\in\mathfrak{J}_0^*}{\mathrm{Max.}}\, |\, g(x, z_1(x)) - g(x, z_2(x))\,| =$$

$$= \underset{x\in\mathfrak{J}_0^*}{\mathrm{Max.}} \left| \int_{z_1(x)}^{z_2(x)} g'_y(x, \eta)d\eta \right| \leqslant k\, \|\, z_1(x) - z_2(x)\,\|\,,$$

e della (16), la trasformazione T è una contrazione nel senso di Caccioppoli.

Per completare la dimostrazione del nostro teorema resta da provare che, per quasi tutti gli x di $\mathfrak{J}_0^*$, la $y(x)$ soddisfa anche la (11). Infatti, osserviamo intanto che, a norma della seconda delle (26), la $y(x)$ è assolutamente continua in $\mathfrak{J}_0^*$ e che, per la seconda delle (27), la curva di equazione $y = y(x)$ è contenuta nel rettangolo $R_0^* = \mathfrak{J}_0^* \times J_0$. Ma in questo rettangolo la $g(x, y)$, che è **Q.O.R.**, soddisfa la prima delle (13) e la (15). Sono quindi sommabili in $\mathfrak{J}_0^*$ i prodotti

$$(29)\qquad \frac{L(x)}{|\, f'_y(x_0, y_0)\,|}\cdot 1\,, \qquad \frac{1+k\varrho}{1+\varrho}\, y'(x)\,,$$

e pertanto, a norma del mio citato teorema sulla derivazione delle funzioni composte, sussiste, quasi ovunque in $\mathfrak{J}_0^*$, la (11). Il teorema è così provato.

5. - **Osservazione.**

È il caso di rilevare che se $(\xi, y(\xi))$, $\xi \in \mathfrak{J}_0^*$, è un punto di R_0^* nel quale la funzione $f(x, y)$ è differenziabile secondo Stolz [4]), allora la $y(x)$ è derivabile nel punto ξ e risulta

$$(30) \qquad y'(\xi) = -\frac{f'_x(\xi, y(\xi))}{f'_y(\xi, y(\xi))} .$$

Infatti, detto x un altro punto di $\mathfrak{J}_0^*$ distinto da ξ, dall'uguaglianza

$$(31) \qquad f(x, y(x)) - f(\xi, y(\xi)) = 0$$

e dalla differenziabilità, secondo Stolz, della $f(x, y)$ in $(\xi, y(\xi))$, segue l'uguaglianza

$$(32) \qquad f'_x(\xi, y(\xi))(x - \xi) + f'_y(\xi, y(\xi)(y(x) - y(\xi)) + \Omega = 0$$

ove Ω è un infinitesimo con $\delta = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y(x) - y(\xi))^2}$. Di qui e dal fatto che la (4) implica le

$$(33) \qquad 0 < (1 - k)f'_y(x_0, y_0) \leqslant f'_y(x, y) \leqslant (1 + k)f'_y(x_0, y_0)$$

oppure le

$$(34) \qquad (1 + k)f'_y(x_0, y_0) \leqslant f'_y(x, y) \leqslant (1 - k)f'_y(x_0, y_0) < 0 ,$$

a seconda che è $f'_y(x_0, y_0) > 0$ oppure $f'_y(x_0, y_0) < 0$, segue

$$(35) \qquad \frac{y(x) - y(\xi)}{x - \xi} = -\frac{f'_x(\xi, y(\xi))}{f'_y(\xi, y(\xi))} + \frac{\Omega}{\delta}\,\frac{\delta}{x - \xi} ,$$

e quindi la (30), dato che δ è infinitesimo con $(x - \xi)$. È il caso di ricordare anche che a norma delle (11), (13) e (15) sussiste la disuguaglianza

$$(36) \qquad |\, y'(x) \,| \leqslant \frac{L(x)}{\left(1 - \dfrac{1 + k\varrho}{1 + \varrho}\right) |\, f'_y(x_0, y_0) \,|} .$$

---

[4]) Si ricordi che gli eventuali punti ove $f(x, y)$ può non essere differenziabile secondo Stolz appartengono ad un insieme di misura nulla di orizzontali e di verticali.

6. - Dimostriamo ora con un esempio l'impossibilità di risolvere in maniera univoca il problema 1), 2), 3) nella classe delle $f(x, y)$, **Q.O.R.**, e con le sole condizioni *i*), *ii*). In un intorno di (0, 0), per esempio nel quadrato $\mathbf{Q} : |x| \leqslant 1,\ |y| \leqslant 1$, consideriamo la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} y^3 \sqrt[3]{\operatorname{sen}\dfrac{1}{y}} - y + x\,, & \text{per} \quad y \neq 0\,, \\ x, & \text{per} \quad y = 0\,, \end{cases}$$

evidentemente, continua e assolutamente continua rispetto alle singole variabili. In tutti i punti delle orizzontali distinte da quelle di equazione $y = 1/n\pi$, $n = 1, 2, \ldots$, esiste la derivata parziale rispetto ad y data dalla

$$f'_y(x, y) = \begin{cases} 3y^2 \sqrt[3]{\operatorname{sen}\dfrac{1}{y}} - \dfrac{y \cos\dfrac{1}{y}}{3\sqrt[3]{\operatorname{sen}^2\dfrac{1}{y}}} - 1\,, & \text{per} \quad y \neq 0, \\ -1 & \text{per} \quad y = 0, \end{cases}$$

e pertanto, continua rispetto ad x e sommabile rispetto ad y. Dappertutto poi risulta $f'_x(x, y) = 1$. La $f(x, y)$ è dunque **Q.O.R.** in Q. Assunto come punto P_0 l'origine (0, 0), visto che $f(0, 0) = 0$, $f'_y(x, 0) = -1$, la nostra $f(x, y)$ soddisfa anche le condizioni *i*) e *ii*) del nostro teorema. Non soddisfa però la *iii*). Infatti, in qualsivoglia intorno dell'origine cadono punti delle orizzontali di equazione $y = 1/n\pi$, $n = 1, 2, \ldots$, e, in qualsivoglia intorno di detti punti la $f'_y(x, y)$ non è limitata. Ebbene, proveremo ora che ad ogni fissato x del codominio delle due successioni

$$\left\{\frac{-2}{(4n-1)\pi} + \frac{8}{(4n-1)^3\pi^3}\right\}, \quad \left\{\frac{2}{(4n-1)\pi} + \frac{8}{(4n-1)^3\pi^3}\right\},$$

i cui termini sono, rispettivamente, a sinistra e a destra di $x = 0$, e che sono entrambe infinitesime al divergere di n, si può associare più di un valore di y, infinitesimo al divergere di n, per il quale è soddisfatta l'equazione $f(x, y) = 0$. Ed è quanto basta per escludere l'unicità di una eventuale soluzione $y(x)$, nulla nell'origine, della $f(x, y) = 0$.

Fissiamo allora x nel codominio della seconda successione e proviamo che l'equazione

$$\varphi(y) = y^3 \sqrt[3]{\operatorname{sen}\frac{1}{y}} - y + \frac{2}{(4n-1)\pi} + \frac{8}{(4n+1)^3\pi^3} = 0$$

ammette più di una soluzione, infinitesima al divergere di n. Una soluzione è $y = 2/(4n-1)\pi$. Un'altra è interna all'intervallo $2/(4n-3)\pi \leqslant y \leqslant 2/(4n-5)\pi$, perchè $\varphi(y)$ è continua e assume, negli estremi di detto intervallo, i valori

$$\varphi\left(\frac{2}{(4n-3)\pi}\right) = \frac{2}{(4n-3)^3\pi^3}\,[4-(4n-3)^2\pi^2] +$$

$$+ \frac{2}{(4n-1)^3\pi^3}\,[(4n-1)^2\pi^2+4] > \frac{2}{(4n-1)^3\pi^3}\,\cdot$$

$$\cdot\,\{8+[(4n-1)^2+(4n-3)^2]\pi^2\} = \frac{16[1+(2n-1)\pi^2]}{(4n-1)^3\pi^3} > 0\,,$$

$$\varphi\left(\frac{2}{(4n-5)\pi}\right) = \frac{-8}{(4n-5)^3\pi^3} - \frac{2}{(4n-5)\pi} +$$

$$+ \frac{2}{(4n-1)\pi} + \frac{8}{(4n-1)^3\pi^3} < 0\,,$$

di segno opposto. Un'altra ancora, è interna all'intervallo $2/(4n-5)\pi \leqslant y \leqslant 2/(4n-7)\pi$. E così via.

In maniera analoga si vede che fissando x nel codominio della prima successione e posto

$$\psi(y) = y^3 \sqrt[3]{\operatorname{sen}\frac{1}{y}} - y - \frac{2}{(4n-1)\pi} + \frac{8}{(4n-1)^3\pi^3}\,,$$

l'equazione $\psi(y) = 0$ è soddisfatta per $y = [-2/(4n-1)\pi]$ e almeno per un valore di y interno all'intervallo $-2/(4n-5)\pi \leqslant \leqslant y \leqslant [-2/(4n-3)\pi]$. e così via.