RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

SANTUZZA GHEZZO

# Una caratterizzazione geometrica dei reticoli semimodulari

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*, tome 31 (1961), p. 381-395

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1961__31__381_0>

#### UNA CARATTERIZZAZIONE GEOMETRICA DEI RETICOLI SEMIMODULARI

*Nota* (*) *di* SANTUZZA GHEZZO (*a Padova*)

1. - È noto che se in un reticolo $L$ non è contenuto alcun sottoreticolo consistente di cinque elementi $z \cup y = x \cup y >$ $> z > x > x \cap y = z \cap y$ e $y$ non confrontabile con $z$ nè con $x$ (sottoreticolo che noi diremo pentagonale), $L$ è modulare e soddisfa alle due leggi di copertura

$$C_1') \ y \succ x \cap y \Rightarrow x \cup y \succ x$$
$$C_2') \ x \cup y \succ y \Rightarrow x \succ x \cap y$$

duali una dell'altra.

Mi sono proposta qualche indagine sulla struttura di un reticolo in presenza di un sottoreticolo pentagonale.

Ho trovato (n. 3, 4) che se un reticolo è atomico e soddisfa alla $C_2'$) e non alla $C_1'$), per ogni suo sottoreticolo pentagonale (per quanto sopra, certo, esistente) generato da $z$, $x$ e $y$ risulta che tutti gli elementi $\bar{y}$ che coprono $y$: o generano con $z$ e $x$ ancora sottoreticoli pentagonali, ovvero con $y$, $x$ e $(z \cap \bar{y}) \cup x$ generano dei sottoreticoli del tipo della fig. 1, che diremo sotto-triquadrangolari.

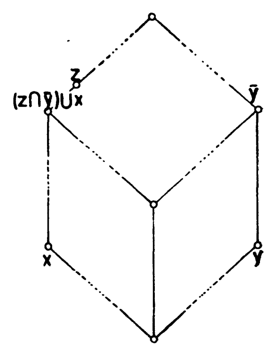


Fig. 1

(*) Pervenuta in redazione il 10 luglio 1961.
Indirizzo dell'A.: Seminario matematico, Università, Padova.

Al n. 5 del presente lavoro definisco l'insieme $P_y^{\uparrow}$ di $L$ che contiene $y$ e per ogni suo elemento $a$ contiene tutti gli elementi di $L$ che coprono $a$. Deduco alcune proprietà di questo insieme nel caso che $y$ generi con $x$ e $z$ un sottoreticolo pentagonale di $L$, arrivando ad una condizione perchè $L$ contenga sottoreticoli sotto-triquadrangolari (teor. 5.1).

Al n. 6 considero, in un reticolo qualunque $L$ che contenga un sottoreticolo pentagonale generato da $x$, $z$ e $y$, l'insieme $H$ degli elementi dell'intervallo $S: [y, z \cup y]$ che generano con $z$ e $x$ dei sottoreticoli pentagonali. Mi risulta che ogni elemento di $H$ genera in $S$ un ideale principale contenuto in $H$; e che, se $L$ è condizionatamente completo e unione-continuo, $H$ ammette elementi massimali, ed $H$ è la riunione degli ideali principali generati dai suoi elementi massimali.

Se $g_1$ è un elemento massimale di $H$ ed $L$ è anche sotto-semimodulare, cioè soddisfa alla $C_2'$), e atomico, gli elementi $g_1$, $g_2 \succ g_1$, $x$ e $(g_2 \cap z) \cup x$ generano in $L$ un sottoreticolo sotto-triquadrangolare.

Infine ai numeri 7 e 8 si arriva ad una condizione necessaria e sufficiente perchè un reticolo atomico, condizionatamente completo e unione-continuo sia sotto-semimodulare (teor. 7.1), condizione che vale in particolare nei reticoli atomici generati in modo compatto (coroll. 8.1).

Insieme con i teoremi enunciati valgono anche i loro duali.

2. - Indicheremo gli elementi di un reticolo con le lettere latine minuscole e gli insiemi di elementi del reticolo stesso con le maiuscole. Inoltre le scritture $a \succ b$ e $b \prec a$ staranno ad indicare che $a$ « *copre* » $b$, cioè che è $a > b$ e che per nessun $c$ del reticolo è $a > c > b$.

Ricordiamo che vale [1]) il seguente

TEOREMA 2.1: *Un reticolo $L$ è non modulare se e solo se contiene un sottoreticolo isomorfo al reticolo pentagonale della fig.* 2.

---

[1]) V. [1], cap. V, § 2, pag. 66.

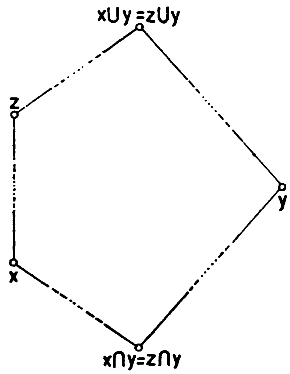


Fig. 2

Da cui segue che in un reticolo modulare sono soddisfatte le seguenti condizioni:

$C_1$) se $y \succ a$ e $a < x$ non confrontabile con $y$, allora $x \cup y \succ x$,

e dualmente

$C_2$) se $a \succ y$ e $a > x$ non confrontabile con $y$, allora $x \succ x \cap y$.

Quindi valgono le:

$C_1'$) se $y \succ x \cap y$, allora $x \cup y \succ x$

e

$C_2'$) se $x \cup y \succ y$, allora $x \succ x \cap y$.

Noi indicheremo il reticolo della fig. 1, che è generato dagli elementi $x$, $z$ e $y$ per i quali è $x \cup y = z \cup y$ e $x \cap y = z \cap y$, con la scrittura $\{z > x;\ y$ non confrontabile con $z$ nè con $x\}$.

Assumiamo inoltre, come d'uso [2]), le seguenti definizioni di semimodularità:

DEFINIZIONE 2.1: *Un reticolo è sopra-semimodulare se verifica la $C_1'$); e sotto-semimodulare se verifica la $C_2'$).*

---

[2]) V. [2], n. 3, Def. 3.2, pag. 4.

Inoltre:

DEFINIZIONE 2.2: *Diremo sopra-triquadrangolare* [3]) *un reticolo del tipo della fig.* 3.

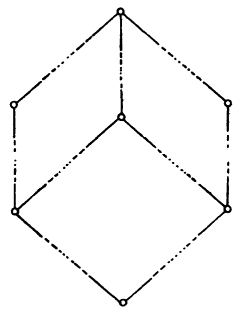

Fig. 3

Un reticolo siffatto è sopra-semimodulare senza essere sotto-semimodulare.

Dualmente

DEFINIZIONE 2.3: *Diremo sotto-triquadrangolare un reticolo del tipo della fig.* 4.

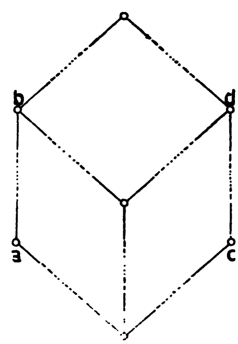


Fig. 4

e lo indicheremo, a volte, con $\{b > a,\ d > c;\ a,\ b$ non confrontabili con $c,\ d\}$ .

Ricordiamo [4]) infine la seguente:

DEFINIZIONE 2.4: *Un reticolo $L$ si dice atomico se $a,\ b \in L$ ed $a > b$ implicano $a \geqslant c \succ b$ per qualche $c \in L$.*

---

[3]) V. [4], Cap. II, § 1, n. 69, pag. 102.

[4]) V. [2], n. 2, nota [1]), pag. 3.

3. - Dal teorema 2.1 e dalla definizione 2.1 segue che un reticolo che non contenga sottoreticoli pentagonali è semimodulare.

Siano ora $a$ e $b$, con $a > b$, due elementi di un reticolo $L$ e indichiamo con $P_b$ l'insieme, eventualmente vuoto, degli elementi di $L$ che coprono $b$; e con $P_b^a$ l'insieme degli elementi $c$ di $P_b$ tali che si abbia $a > c$.

Si ha intanto il seguente lemma:

LEMMA 3.1: *Se un reticolo $L$ sotto-semimodulare contiene un sottoreticolo pentagonale $M\{z > x$; $y$ non confrontabile con $z$ nè con $x\}$, per ogni elemento $y'$, se esiste, dell'insieme $P_y^{z \cup y}$, risulta che: se $y' \cap x \neq y' \cap z$ allora $y'$, $y$, $x \cup (y' \cap z) \leqslant z$ e $x$ generano in $L$ un reticolo sotto-triquadrangolare; se invece $y' \cap x = y' \cap z$ allora $x$, $z$ e $y'$ generano un sottoreticolo pentagonale di $L$, con $z \cup y' = x \cup y$ e $x \cap y' \geqslant z \cap y$.*

Infatti:

se esiste in $P_y^{z \cup y}$ un elemento $y'$, si ha:

$$y' \cup x = y' \cup z = y \cup x$$

e

$$y' \cap z \geqslant y' \cap x \geqslant y \cap x = y \cap z\,.$$

Sia $t' = y' \cap z$ e supponiamo $y' \cap x \neq y' \cap z$ e quindi $t' > > y' \cap x$, e $t' > y \cap z$, di conseguenza $t'$ non è minore nè uguale ad $y$ altrimenti sarebbe $y \cap z \geqslant t' > y \cap z$.

Tenuto conto di ciò e della semimodularità di $L$ risulta che $t' \cup y = y' \succ y$ implica che $t' \succ t' \cap y = (y' \cap z) \cap y = y \cap z$, e quindi $t'$ è non maggiore di $x$ e non maggiore di $y$.

Dovendo inoltre essere $t' > y' \cap x \geqslant \geqslant y \cap x = y \cap z$, risulterà $y' \cap x = y \cap x$, e perciò anche $t'$ non minore nè uguale ad $x$ altrimenti $y' \cap x \geqslant t' > y' \cap x$.

In questo caso dunque (v. fig. 5), gli elementi $y'$, $y$, $t' \cup x \leqslant z$ e $x$ generano in $L$ un reticolo sotto-triquadrangolare $N$, come si verifica facilmente.

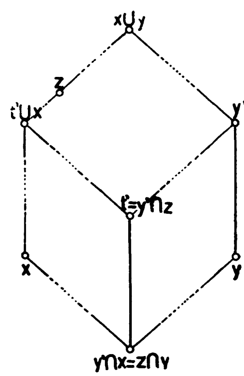

Fig. 5

Il sottoreticolo pentagonale $M$ risulta inscritto in $N$ se e solo se $(z, y')$ è una coppia modulare [5]).

Supponiamo ora che $y' \cap x = y' \cap z \geqslant y \cap z$, allora essendo $y' \cup x = y' \cup z = y \cup x$, gli elementi $x$, $z$ e $y'$, generano un sottoreticolo pentagonale di $L$, come in fig. 6.

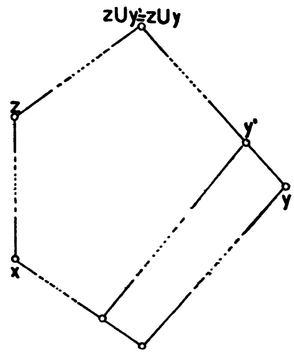


Fig. 6

Il lemma 3.1 è così completamente dimostrato.

Notiamo le seguenti osservazioni:

OSSERVAZIONE 3.1: *Nelle ipotesi del lemma* 3.1 *nessun elemento di* $P_y$ *può esser confrontabile con* $z$ *o con* $x$.

Infatti essendo $x \cup y = z \cup y > z > x$, potrebbe solo essere $y' = z \cup y$. Ma per la sotto-semimodularità di $L$, poichè $z$ non copre $z \cap y$, $z \cup y$ non può coprire $y$.

OSSERVAZIONE 3.2: *Se* $\{z > x$ *e* $y$ *non confrontabile con* $z$ *nè con* $x\}$ *è un sottoreticolo pentagonale di un reticolo* $L$, *la condizione* $y' \cap x = y' \cap z$ *è equivalente alla* $y' \cap z < x$, *per qualunque* $y' : z \cup y > y' > y$.

Infatti in tali ipotesi risulta:

$$y \cap x \leqslant y' \cap x \leqslant y' \cap z < z \,;$$

e inoltre è

$$y' \cap z \text{ non maggiore nè uguale ad } x \quad \text{e} \quad y' \cap x < x$$

---

[5]) Una coppia $(z, y)$ è detta modulare quando: $z \geqslant x \Rightarrow z \cap (y \cup x) = (z \cap y) \cup x$. Cfr. [1], Cap. VII, § 1, pag. 100.

poichè in caso contrario sarebbe $x \leqslant y'$ e quindi $x \cup y = y'$, mentre è $x \cup y = z \cup y > y'$.

Dunque se $y' \cap z = y' \cap x$, è $y' \cap z < x$; viceversa se $y' \cap \cap z < x$, essendo anche $y' \cap z < y'$, risulta

$$y' \cap z \leqslant y' \cap x \leqslant y' \cap z .$$

Segue facilmente:

OSSERVAZIONE 3.3: *Se* $\{z > x; y$ *non confrontabile con* $z$ *nè con* $x\}$ *è un sottoreticolo pentagonale di un reticolo* $L$, *es e* $z \cup y > y' \geqslant y$, *allora anche* $\{z > x; y'$ non confrontabile con $z$ nè con $x\}$ *è un sottoreticolo pentagonale di* $L$ *se e solo se* $y' \cap z < x$.

Vale inoltre il seguente:

LEMMA 3.2: *Se il reticolo* $L$ *di cui al lemma* 3.1 *è atomico, l'insieme* $P_y^{z \cup y}$ *è certamente non vuoto.*

Infatti se $L$ è sotto-semimodulare e contiene $\{z > x;\ y$ non confrontabile con $z$ nè con $x\}$ esso contiene anche qualche elemento $a$ tale che si abbia

$$y \cup z > a > y$$

altrimenti $z$ dovrebbe coprire $y \cap z$; da ciò, per l'atomicità segue l'asserto.

In base ai lemmi 3.1 e 3.2, sussiste, insieme con il duale, il seguente

TEOREMA 3.1: *Se un reticolo* $L$ *atomico e sotto-semimodulare contiene un sottoreticolo pentagonale* $M : \{z > x, y$ *non confrontabile con* $z$ *nè con* $x\}$, *esiste in* $L$ *almeno un elemento* $y' : z \cup y > y' \succ y$ *il quale, se non genera con* $x$ *e* $z$ *ancora un sottoreticolo pentagonale di* $L$, *è vertice di un reticolo sotto-triquadrangolare.*

4. - Nel reticolo $L$ di cui al lemma 3.1 consideriamo ora, se esistono, gli elementi $y''$ di $P_y$ che non stanno in $P_y^{z \cup y}$; vogliamo verificare il seguente:

LEMMA 4.1: *In un reticolo sotto-semimodulare, se un elemento* $y$ *genera insieme con due fissati elementi* $z$ *e* $x$, $z > x$, *un sottoreticolo pentagonale, lo stesso accade ad ogni elemento* $y''$ *di* $P_y$ *che non stia in* $P_y^{z \cup y}$ .

Infatti per un siffatto $y''$ si ha

$$z \cap y = x \cap y \leqslant x \cap y'' \leqslant z \cap y'' \leqslant (x \cup y) \cap y'' = y$$

e inoltre $z \cap y'' \neq y$ altrimenti sarebbe $z > z \cap y'' = y$, e $z \cap y$ è non minore di $z \cap y''$ poichè da $z \cap y'' < z$ e $z \cap y'' < y$ risulta $z \cap y'' \leqslant z \cap y$; perciò $x \cap y = z \cap y = x \cap y'' = z \cap y''$.

Per le unioni si ha:

$$x \cup y = z \cup y \leqslant x \cup y'' \leqslant z \cup y'' = (z \cup y) \cup y'' = (x \cup y) \cup y'' = x \cup y'' ,$$

dove

$$x \cup y'' = (x \cup y) \cup y'' \neq x \cup y \ ;$$

dunque

$$x \cup y = z \cup y < x \cup y'' = z \cup y'' .$$

Se ne deduce che $x$, $z$ e $y''$ generano anch'essi un sottoreticolo pentagonale di $L$, come volevasi.

Dai lemmi 3.1 e 4.1 segue:

TEOREMA 4.1: *Se un reticolo $L$ sotto-semimodulare contiene un sottoreticolo pentagonale $\{z > x;\ y$ non confrontabile con $z$ nè con $x\}$, ogni eventuale elemento che copra $y$, se non è vertice di un reticolo sotto-triquadrangolare di $L$, genera con $z$ e $x$ ancora un sottoreticolo pentagonale.*

E dualmente.

5. - Sia ora $L$ un reticolo sotto-semimodulare e atomico, e sia $P_b^{\uparrow}$ l'insieme così definito:

DEFINIZIONE 5.1: *$b \in P_b^{\uparrow}$ e per ogni elemento $a \in P_b^{\uparrow}$ sia anche $P_a \subset P_b^{\uparrow}$.*

L'insieme $P_b^{\uparrow}$ risulta filtrante inferiormente e tale che per ogni suo elemento $c$ esiste almeno una catena massimale [6]) finita che lo congiunge con $b$.

Osserviamo subito che se $L$ contiene il sottoreticolo penta-

---

[6]) È detta « massimale » o « connessa » una catena $x_0 < x_1 < \dots < x_d$ quando $x_i \succ x_{i-1}$ per ogni $i$. Cfr. [1], Cap. I, n. 9, p. 11.

gonale $\{z > x; y$ non confrontabile con $z$ nè con $x\}$, per ogni $\bar{y} \in P_y^\uparrow$ il quale generi con $z$ e $x$ un sottoreticolo pentagonale di $L$, cioè, per l'osserv. 3.3, per ogni $\bar{y} \in P_y^\uparrow$ tale che $\bar{y} \cap z < x$, gli elementi di $P_{\bar{y}} \subset P_y^\uparrow$ non sono, per l'osserv. 3.1, confrontabili con $x$ nè con $z$.

Inoltre se $\bar{y} \cap z$ è non minore di $x$, per nessun elemento $\bar{\bar{y}} \in P_{\bar{y}}$ può essere $\bar{\bar{y}} \cap z < x$ poichè $\bar{\bar{y}} \cap z \geqslant \bar{y} \cap z$.

Dunque:

PROPOSIZIONE 5.1: *Se in $P_y^\uparrow$ c'è un elemento $\bar{y}$ confrontabile con $z$ o con $x$, allora $\bar{y} \cap z$ è non minore di $x$ ed essendo $y \cap z <$ $< x$, nella catena*

$$a_0 = y \prec a_1 \prec \ldots \prec a_n = \bar{y}$$

*ci sarà un primo elemento $a_r$ tale che $a_r \cap z$ è non minore di $x$, con $r \leqslant n - 1$. Gli elementi $a_{r-1}$, $a_r$, $x$, $(a_r \cap z) \cup x \leqslant z$ generano allora in $L$ un reticolo sotto-triquadrangolare* (come in fig. 7).

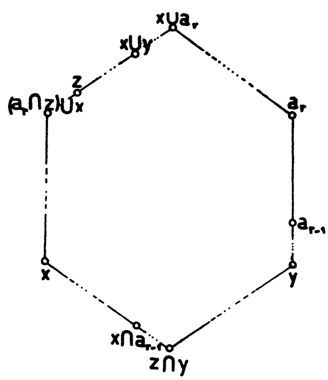


Fig. 7

Vale inoltre la seguente:

PROPOSIZIONE 5.2: *In un reticolo $L$ atomico, se l'insieme $P_b^\uparrow$ ha un elemento massimale $m$, questo è massimo in $P_b^\uparrow$, ed è inoltre elemento universale $m = u$ in $L$.*

Infatti se $m$ non fosse massimo in $P_b^\uparrow$, esisterebbe ivi un $\bar{b}$ non confrontabile con $m$ per cui $m < \bar{b} \cup m \in L$, e per l'atomicittà di $L$, ci sarebbe in $P_b^{\uparrow}$ un $m' \succ m$, assurdo dal quale segue la prima parte dell'affermazione precedente.

Ad analoga conclusione si perviene supponendo che esista in $L$ un elemento $a$ non minore nè uguale ad $m$, cosicchè risulta $m = u \in P_b^{\uparrow}$, c.v.d.

Segue in particolare l'esistenza di una catena massimale finita di estremi $b$ ed $u$.

Dalle proposizioni 5.1 e 5.2, tenuto conto che se in $L$ esiste elemento universale $u$, questo è confrontabile con ogni elemento di $L$, segue ora la

PROPOSIZIONE 5.3: *Se un reticolo $L$ atomico, sotto-semimodulare contiene il sottoreticolo pentagonale $\{z > x$, $y$ non confrontabile con $z$ nè con $x\}$, e se ammette elemento universale che appartenga a $P_y^{\uparrow}$, esistono due elementi $a_r \succ a_{r-1} \geqslant y$ i quali con $x$ e $(a_r \cap z) \cup x$ generano in $L$ un reticolo sotto-triquadrangolare.*

Riassumendo i risultati finora ottenuti possiamo enunciare il seguente:

TEOREMA 5.1: *Se un reticolo $L$ atomico, sotto-semimodulare e tale che ogni suo elemento $b$ sia origine di una catena massimale finita avente per ultimo elemento l'elemento universale $u$ di $L$, contiene un sottoreticolo pentagonale $\{z > x; y$ non confrontabile con $z$ nè con $x\}$, esso contiene, nella sezione terminante $)z \cap y($ [7]), anche un sottoreticolo sotto-triquadrangolare generato da $x$, $a_{r-1} \geqslant y$, $a_r \succ a_{r-1}$ e $(a_r \cap z) \cup x \leqslant z$, per certi convenienti $a_{r-1}$, $a_r$* (come in fig. 7).

E dualmente.

6. - Sia ora $L$ un reticolo qualunque.

Supponiamo che $L$ contenga un sottoreticolo pentagonale $\{z > x; y$ non confrontabile con $z$ nè con $x\}$ indichiamo con $S$ l'intervallo $[y, z \cup y]$ di $L$, cioè l'insieme degli elementi $s$ di $L$ tali che si abbia $y \leqslant s \leqslant z \cup y$, e consideriamo l'insieme $H$ degli

---

[7]) Gli insiemi degli elementi $x$ di un reticolo $L$ soddisfacenti a $x \leqslant b$ oppure ad $a \leqslant x$, si dicono rispettivamente «*sezione cominciante di* $b$ : $(b)$», e «*sezione terminante di* $a$ : $)a($». Cfr. [3], parte I, Cap. I, n. 2, pag. 4.

elementi di $S$ che generano con $x$ e $z$ dei sottoreticoli pentagonali.

OSSERV. 6.1: *$H$ risulta non vuoto poichè $y \in H$; inoltre se $\bar{s} \in H$ ogni elemento $s \in S$ tale che sia $s < \bar{s}$, appartiene ad $H$.*

Infatti se $\bar{s} \in H$ allora $\bar{s} \cap z < x$, e quindi $s < \bar{s}$ implica $s \cap \cap z \leqslant \bar{s} \cap z < x$. Da ciò per l'osserv. 3.3 segue l'asserto. In altre parole: *ogni elemento $h$ di $H$ genera in $S$ (sottoreticolo di $L$) un ideale principale $(h) \subset H$.*

Imponiamo ora ad $L$ di essere *condizionatamente completo* [8]), cioè supponiamo che ogni suo sottoinsieme non vuoto e limitato abbia maggiorante minimo. In tal caso esiste in $L$ un elemento $\bar{h} = \mathrm{U}H$ tale che per ogni $h \in H$ si abbia $h \leqslant \bar{h}$. È subito visto che:

OSSERVAZIONE 6.2: *Siccome per ogni $h$ di $H$ si ha $h \leqslant z \cup y$, risulta anche $\bar{h} = \mathrm{U}H \leqslant z \cup y$.*

Inoltre ogni catena $H'$ di elementi di $H$ è limitata, e dunque ammette in $L$ un maggiorante minimo $\mathrm{U}H' = \bar{h}' \leqslant \bar{h}$.

OSSERVAZIONE 6.3: *L'insieme $H_1'$ che contiene gli elementi $h'$ di una catena $H'$ di $H$ ed ogni elemento $s$ di $S$ tale che sia $s \leqslant h'$ per qualche $h' \in H'$, è un ideale di $S$ contenuto in $H$. Inoltre $\mathrm{U}H_1' = \mathrm{U}H'$.*

Infatti la prima affermazione consegue dall'osserv. 1.5 e dal fatto che se $h_1'$ e $h_2' \in H_1'$ allora $h_1' \leqslant h'$ e $h_2' \leqslant h'$ per qualche $h' \in H'$ e perciò $h_1' \cup h_2' \leqslant h'$ da cui $h_1' \cup h_2' \in H_1'$. Per dimostrare che $\mathrm{U}H_1' = \mathrm{U}H'$, basta osservare che per ogni elemento $h_1' \in H_1'$ è $h_1' \leqslant h' \leqslant \mathrm{U}H'$ per qualche $h' \in H'$ e quindi (con ragionamento analogo a quello dell'oserv. 6.2) segue

$$\mathrm{U}H_1' \leqslant \mathrm{U}H'$$

D'altra parte ogni $h' \in H'$ appartiene ad $H_1'$ per costruzione, dunque $h' \leqslant \mathrm{U}H_1'$ e quindi

$$\mathrm{U}H' \leqslant \mathrm{U}H_1' .$$

Supponiamo ora che il reticolo $L$ sia anche *unione-continuo* [9]), cioè che $a \cap \mathrm{U}B = \mathrm{U}(a \cap B)$ [10]) per ogni ideale $B$ di $L$, e consideriamo l'insieme $I$ ottenuto come segue:

---

[8]) V. [1], Cap. IV, n. 3, pag. 51.

[9]) V. [2], n. 2, lemma 2.3, pag. 2.

[10]) Con $a \cap B$ indichiamo l'insieme degli elementi $a \cap b$, $b \in B$.

Sia $H'$ una catena di $H$ siffatta che il suo maggiorante minimo $\bar{h}'$ sia non minore di alcun elemento $h \in H$, e si definisca $I$ come l'insieme degli elementi $h'$ di $H'$, e degli elementi $l$ di $L$ tali che $l \leqslant h'$ per qualche $h' \in H'$.

Con ragionamenti analoghi a quelli dell'osserv. 3.5 si verifica che *$I$ è un ideale di $L$ e che* $\mathrm{U}I = \bar{h}' = \mathrm{U}H'$.
Per la condizione ora imposta ad $L$, risulta

$$(1) \qquad z \cap \bar{h}' = z \cap \mathrm{U}I = \mathrm{U}(z \cap I) .$$

Ma per ogni $i \in I$ esiste qualche $h' \in H' \subset H$ tale che sia $i \leqslant h'$ e quindi $z \cap i \leqslant z \cap h'$, da cui (osserv. 3.2): $z \cap i < x$; ne segue, analogamente all'osserv. 2.5,

$$(2) \qquad \mathrm{U}(z \cap I) \leqslant x .$$

Ricordiamo ora che per nessun $\bar{y} : y \leqslant \bar{y} \leqslant z \cup y = x \cup y$ può essere $z \cap \bar{y} = x$, in quanto: se $\bar{y} = z \cup y$ allora $z \cap \bar{y} = z \neq x$ e se $\bar{y} < z \cup y = x \cup y$ allora $z \cap \bar{y} = x$ qui darebbe $x < \bar{y}$ che con $y \leqslant \bar{y}$ porge l'assurdo $x \cup y = \bar{y} < x \cup y$.

Perciò la (2) si può scrivere, tenuto conto della (1),

$$z \cap \bar{h}' < x .$$

Per l'osserv. 3.3 si conclude che $\bar{h}' \in H' \subset H$ ed anche $\bar{h}' < z \cup y$ poichè $z \cup y$ non appartiene ad $H$.

Possiamo così affermare che: $\mathrm{U}I = \bar{h}'$ *è un elemento massimale di $H$, e perciò $I$ è l'ideale principale* $(\bar{h}')$ *di $L$.*

Si scelga ora, se esiste, un elemento $h$ di $H$ non appartenente all'ideale $I$ di cui sopra, e si consideri una catena di elementi di $H$, la quale contenga $h$, ed il cui maggiorante minimo $\bar{h}$ sia non minore di alcun elemento di $H$.

Si può costruire in $L$, in modo analogo ad $I$, l'ideale $I' = (\bar{h})$.

OSSERVAZIONE 6.4: *Gli elementi comuni ad un ideale così ottenuto e all'intervallo $S$, costituiscono un ideale principale $I_s$ di $S$, formato di elementi di $H$.*

Dunque da quanto sopra risulta che l'insieme $H$ ammette elementi massimali, i quali generano in $S$ degli ideali principali costituiti da elementi di $H$; ed inoltre che $H$ è la riunione di siffatti ideali.

In base alle osservazioni esposte in questo n. 6, possiamo in particolare, enunciare il seguente:

LEMMA 6.1: *Se un reticolo $L$, condizionatamente completo e unione-continuo, contiene un sottoreticolo pentagonale $\{z > x$; $y$ non confrontabile con $z$ nè con $x\}$, l'insieme $H$ degli elementi i quali con $z$ e $x$ generano sottoreticoli pentagonali contenuti nell'intervallo $[z \cap y, z \cup y]$, ammette un elemento massimale $g_1$: $z \cup y > g_1 \geqslant y$.*

Supponiamo infine che $L$ sia atomico e sotto-semimodulare, allora l'insieme $P_{g_1}^{z \cup y}$ associato all'elemento $g_1$ di cui al lemma 6.1, in virtù del lemma 3.2, contiene almeno un elemento $g_2$: $z \cup y > g_2 \succ g_1$, il quale, in base ai lemmi 3.1 e 6.1, genera con $g_1$, $x$ e $(g_2 \cap z) \cup x$ un sottoreticolo sotto-triquadrangolare.

Dunque:

TEOREMA 6.1: *Se un reticolo atomico, sotto-semimodulare, condizionatamente completo e unione-continuo, contiene un sottoreticolo pentagonale $\{z > x$; $y$ non confrontabile con $z$ nè con $x\}$, esso contiene anche, nell'intervallo $[z \cap y, z \cup y]$, un sottoreticolo sotto-triquadrangolare generato da $g_1$, $g_2$, $x$ e $(g_2 \cap z) \cup x$, per certi $g_1$ e $g_2$ tali che sia $z \cup y > g_2 \succ g_1 \geqslant y$.*

E dualmente.

7. - Si verifica facilmente che:

LEMMA 7.1: *Se un reticolo $L$ è tale che se contiene un sottoreticolo pentagonale $\{z > x$; $y$ non confrontabile con $z$ nè con $x\}$, esso contiene anche un sottoreticolo sotto-triquadrangolare $\{s > x$, $g_2 > g_1$; $s, x$* non confrontabili con *$g_1, g_2\}$ con $s$, $g_1$, $g_2 \in L$, $z \geqslant s > x$ e $z \cup y > g_2 > g_1 \geqslant y$, $L$ è sotto-semimodulare.*

Infatti [11]) se in $L$ per qualche coppia di elementi, $z$ non confrontabile con $y$ e $z \cup y \succ y$, esistesse un elemento $x$ tale che fosse $z > x > z \cap y$, si sarebbe in presenza di un sottoreticolo pentagonale $\{z > x$, $y$ non confrontabile con $z$ nè con $x\}$ il

[11]) V. analogo ragionamento in [3], parte I, Cap. VII, n. 2, lemma 1, pag. 87.

quale, per l'ipotesi fatta, assicura l'esistenza di almeno un elemento $g_2 \in L$: $z \cup y > g_2 > y$.

Il lemma 7.1, insieme col teor. 6.2 ci permettono di formulare il seguente

TEOREMA 7.1: *Condizione necessaria e sufficiente perchè un reticolo $L$ atomico, condizionatamente completo e unione-continuo, sia sotto-semimodulare è che se contiene un sottoreticolo pentagonale* $\{z > x; y$ *non confrontabile con* $z$ *nè con* $x\}$, *esso contenga anche, un sottoreticolo sotto-triquadrangolare* $\{s > x, g_2 > g_1; s, x$ *non confrontabili con* $g_1, g_2\}$ *con* $s$, $g_1$, $g_2 \in L$, $z \geqslant s > x$ *e* $z \cup y > g_2 > g_1 \geqslant y$ (*come in fig.* 8).

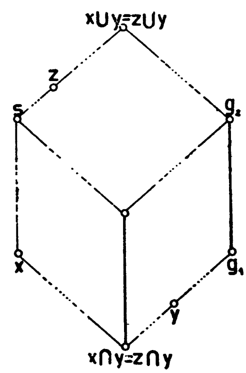


**Fig. 8**

Col teorema 7.1, vale il suo duale.

8. - Ricordiamo in particolare la seguente

DEFINIZIONE 8.1 [12]): *Un reticolo $L$ è generato in modo compatto se $L$ è completo e* $a = \cup\{c \in C(L) \mid c \leqslant a\}$ *per ogni* $a \in L$.

Dove $C(L)$ indica l'insieme degli elementi compatti di $L$, cioè l'insieme degli elementi $c$ di $L$ tali che se $c \leqslant \cup S$ sia anche $c \leqslant \cup S'$ per qualche sottoinsieme finito $S'$ di $S$.

Poichè risulta che *ogni reticolo generato in modo compatto è unione-continuo* [13]), dal teor. 7.1 si deduce il seguente.

---

[12]) V. [2], n. 2, def. 2.1 e def. 2.2, pag. 2.

[13]) V. [2], n. 2, lemma 2.3, pag. 2.

COROLLARIO 8.1: *Condizione necessaria e sufficiente perchè un reticolo L atomico, generato in modo compatto sia sotto-semimodulare è che se contiene un sottoreticolo pentagonale* $\{z > x; y$ *non confrontabile con* $z$ *nè con* $x\}$, *esso contenga anche un sottoreticolo sotto-triquadrangolare* $\{s > x,\ g_2 > g_1;\ s, x$ *non confrontabili con* $g_1, g_2\}$ *con* $s,\ g_1,\ g_2 \in L,\ z \geqslant s > x$ *e* $z \cup y > g_2 > g_1 \geqslant y$.

## BIBLIOGRAFIA


[1] BIRKHOFF G.: *Lattice Theory*, rev. ed., Amer. Math. Soc., Colloquium Publications, vol. XXV, New York, 1942.

[2] DILWORTH R. P. and CRAWLEY PETER: *Decomposition theory for lattices without chain conditions*, Trans. of the Amer. Math. Soc., vol. XCVI, number 1, July, 1960.

[3] DUBREIL JACOTIN M. L., LESIEUR L., CROISOT R.: *Leçons sur la théorie des treillis des structures algébriques ordonnées et des treillis géométriques*. Gauthier-Villars, Paris, 1953.

[4] MORIN U.: *Algebra astratta e geometria algebrica*. Parte prima *Algebra astratta*, Cedam, Padova, 1955.