

# RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

HELMUT FLORIAN

## **Zu einer Vermutung von L. Fejes Tóth**

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*,  
tome 31 (1961), p. 396-403

[http://www.numdam.org/item?id=RSMUP\\_1961\\_\\_31\\_\\_396\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1961__31__396_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1961, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques*  
<http://www.numdam.org/>

## ZU EINER VERMUTUNG VON L. FEJES TÓTH

*Nota (\*) di* HELMUT FLORIAN *(a Graz)*

### 1. *Einleitung.*

L. Fejes Tóth hat in einer Arbeit [1] eine Verschärfung der von A. Florian in [2] bewiesenen Ungleichung für Polyederinhalte hergeleitet. Dabei wurde die Vermutung ausgesprochen, dass das Maximum der Funktion

$$(1) \quad F(\tau_1, \tau_2) = n_1 U(\tau_1, p_1) + n_2 U(\tau_2, p_2)$$

mit

$$(2) \quad U(\tau_i, p_i) = \\ = \frac{p_i}{3} \cos^2 \frac{\pi}{p_i} \operatorname{tg} \frac{2\pi - \tau_i}{2p_i} \left( 1 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{p_i} \operatorname{tg}^2 \frac{2\pi - \tau_i}{2p_i} \right), \quad i = 1, 2$$

und

$$(3) \quad n_1 + n_2 = f, \quad n_1 p_1 + n_2 p_2 = 2k^1), \quad p_2 - p_1 = 1$$

unter den Bedingungen

$$(4) \quad 0 \leq \tau_1 \leq \pi, \quad 0 \leq \tau_2 \leq \pi, \quad n_1 \tau_1 + n_2 \tau_2 \leq 4\pi$$

immer im Falle  $n_1 \tau_1 + n_2 \tau_2 = 4\pi$  eintritt.

---

(\*) Pervenuta in redazione il 12 maggio 1961.

Indirizzo dell'A.: 1. Mathematisches Institut, Technische Hochschule, Graz (Austria).

<sup>1)</sup> In [1] ist hier ein Druckfehler.

Dabei sollen  $p_1 \geq 3$ ,  $p_2 \geq 3$  natürliche Zahlen,  $n_1 \geq 0$ ,  $n_2 \geq 0$  ganze Zahlen,  $f$  die Anzahl der Flächen,  $k$  die Anzahl der Kanten und  $e$  die Anzahl der Ecken sein.

Die Untersuchung des absoluten Maximums der Funktion (1) ist für die Volumensabschätzung eines Polyeders notwendig, denn nach [1] gilt für das Volumen eines konvexen Polyeders, das einer Einheitskugel eingeschrieben ist, die Ungleichung

$$V \leq \text{Max } F(\tau_1, \tau_2).$$

Die oben angeführte Vermutung braucht nach [1] sicherlich dann nicht bewiesen zu werden, wenn die Eckenzahlen der Flächen untereinander gleich sind, oder als Eckenzahlen nur zwei aufeinanderfolgende Zahlen auftreten. In dieser Arbeit wird nun die Vermutung für die übrigen Fälle untersucht.

Zusammenfassend kann gesagt werden, daß es mit Ausnahme der Fälle  $f = 6$ ,  $e = 6$ ,  $k = 10$  und  $f = 6$ ,  $e = 7$ ,  $k = 11$  genügt, sich auf die Werte  $\tau_1$  und  $\tau_2$  zu beschränken, für die  $n_1\tau_1 + n_2\tau_2 = 4\pi$  gilt. Damit läßt sich die Abschätzung für das Volumen auf die Bestimmung des Maximums einer Funktion mit einer einzigen Variablen statt wie früher mit zwei Variablen zurückführen. Die gesuchten Werte ergeben sich dann aus den Gleichungen

$$\frac{\partial U(\tau_1, p_1)}{\partial \tau_1} = \frac{\partial U(\tau_2, p_2)}{\partial \tau_2}$$

und

$$n_1\tau_1 + n_2\tau_2 = 4\pi.$$

## 2. Bestimmung eines relativen Maximums.

Die durch (1) und (2) gegebene Funktion soll unter den Bedingungen (3) und (4) daraufhin untersucht werden, ob sie im Innern des angegebenen Bereiches ein Maximum hat. Da die Funktion im angeführten Bereich, wie eine einfache Rechnung zeigt, immer konkav ist, kann nur ein einziges relatives Maximum, das dann gleichzeitig das absolute ist, eintreten. Sonst liegt das

Maximum am Rande des Bereiches. Die für das Auftreten eines relativen Maximums notwendigen Bedingungen, daß die partiellen Ableitungen der Funktion  $F(\tau_1, \tau_2)$  nach  $\tau_1$  und  $\tau_2$  gleich Null sind, führen auf die Gleichungen

$$(5) \quad \operatorname{tg}^3 \frac{2\pi - \tau_i}{2p_i} = \frac{1}{3} \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{p_i}, \quad i = 1, 2,$$

und damit auf die Werte

$$(6) \quad \tau_i = 2\pi - 2p_i \operatorname{arctg} \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{tg} \frac{\pi}{p_i} \right), \quad i = 1, 2,$$

und

$$(7) \quad n_1\tau_1 + n_2\tau_2 = 2\pi(n_1 + n_2) - 2 \left[ n_1 p_1 \operatorname{arctg} \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{tg} \frac{\pi}{p_1} \right) + n_2 p_2 \operatorname{arctg} \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{tg} \frac{\pi}{p_2} \right) \right].$$

Das ergibt unter Verwendung von (3)

$$(8) \quad n_1\tau_1 + n_2\tau_2 = 2\pi f - 2 \left[ n_1 p_1 \operatorname{arctg} \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{tg} \frac{\pi}{p_1} \right) + n_2 p_2 \operatorname{arctg} \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{tg} \frac{\pi}{p_2} \right) \right].$$

Um den Wert dieses Ausdruckes (8) abschätzen zu können, soll das Verhalten der Funktion

$$(9) \quad f(p) = p \operatorname{arctg} \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{tg} \frac{\pi}{p} \right)$$

untersucht werden. Für die Ableitung findet man

$$f'(p) = \operatorname{arctg} \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{tg} \frac{\pi}{p} \right) - \frac{\pi}{p\sqrt{3}} \frac{3 \cos^2 \frac{\pi}{p}}{3 \cos^2 \frac{\pi}{p} + \sin^2 \frac{\pi}{p}}.$$

Daraus folgt

$$(10) \quad \lim_{p \rightarrow \infty} f(p) = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

und

$$(11) \quad \lim_{p \rightarrow \infty} f'(p) = 0.$$

Weiters benötigt man den Hilfssatz: Eine Funktion  $h(x)$  ist dann konkav (konvex), wenn die Funktion

$$(cu + d)h\left(\frac{au + b}{vu + d}\right), \quad cu + d > 0, \quad ad - bc \neq 0,$$

konkav (konvex) ist.

Zum Beweis bildet man die zweite Ableitung der Funktion

$$(cu + d)h \frac{au + b}{cu + d},$$

wobei  $\frac{au + b}{cu + d}$  gesetzt wird.

Es ergibt sich dann

$$\frac{d^2}{du^2} \left[ (cu + d)h \left( \frac{au + b}{cu + d} \right) \right] = \frac{(ad - bc)^2}{(cu + d)^3} \frac{d^2 h(x)}{dx^2}.$$

Unter den oben angeführten Bedingungen folgt daraus

$$(12) \quad \text{sign} \frac{d^2}{du^2} \left[ (cu + d)h \left( \frac{au + b}{cu + d} \right) \right] = \text{sign} \frac{d^2 h(x)}{dx^2},$$

womit der Hilfssatz bewiesen ist.

Setzt man jetzt  $cu + d = p$  und  $au + b = \pi$ , dann ist

$$ph\left(\frac{\pi}{p}\right) = p \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{tg} \frac{\pi}{p}\right)$$

konkav (konvex), wenn

$$(13) \quad h(x) = \operatorname{arctg} \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{tg} x \right)$$

konkav (konvex) ist. Für diese Funktion ist

$$h'(x) = \sqrt{3} \frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{3 + \operatorname{tg}^2 x},$$

$$h''(x) = 4 \sqrt{3} \frac{\cos^2 x (3 + \operatorname{tg}^2 x)^2}{\operatorname{tg} x}$$

und

$h''(x) \geq 0$ , wenn  $\operatorname{tg} x \geq 0$  ist. Somit ist auch

$$\left[ p \operatorname{arctg} \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{tg} \frac{\pi}{p} \right) \right]'' \geq 0.$$

D.h.  $p \operatorname{arctg} \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{tg} \frac{\pi}{p} \right)$  ist konvex.

Aus dem letzten Ergebnis und aus (11) folgt, dass

$$f(p) = p \operatorname{arctg} \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{tg} \frac{\pi}{p} \right)$$

eine abnehmende Funktion ist. Weiters ergibt sich dann aus (3) und (8) die Ungleichung

$$(14) \quad n_1 \tau_1 + n_2 \tau_2 > 2f \left[ \pi - p_1 \operatorname{arctg} \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{tg} \frac{\pi}{p_1} \right) \right].$$

Diese Ungleichung soll nun für verschiedene Werte von  $p_1$  untersucht werden:

a)  $p_1 = 3$ . Dann ist  $n_1 \tau_1 + n_2 \tau_2 > f \cdot \frac{\pi}{2}$ , somit für  $f \geq 8$  kein relatives Maximum im Innern des Bereiches.

b)  $p_1 \geq 4$ . Hier können wir, da  $f(p)$  eine abnehmende Funktion ist, in der Ungleichung (14)  $p_1 = 4$  setzen. Das ergibt  $n_1\tau_1 + n_2\tau_2 > 2f \cdot \frac{\pi}{3}$ . Für  $f \geq 6$  ist  $n_1\tau_1 + n_2\tau_2 \geq 4\pi$ , somit wieder kein relatives Maximum im Innern.

c)  $p_1 \geq 8$ . Man erhält  $n_1\tau_1 + n_2\tau_2 > 2f \cdot 0,402\pi$  und daher für  $f \geq 5$  kein Maximum im Innern.

Relative Maxima können bei dieser Abschätzung nur für

$$(15) \quad p_1 = 3, \quad f < 8 \quad \text{und} \quad 4 \leq p_1 \leq 7, \quad f = 5$$

eintreten.

Im Falle  $p_1 = 3$  ( $p_2 = 4$ ) ist nach (3) und (8)  $n_1\tau_1 + n_2\tau_2 = k \cdot \frac{\pi}{3}$ . Dieser Wert bleibt aber nur dann kleiner als  $4\pi$ , wenn die Kantenzahl kleiner als 12 ist. Ist  $p_1 \geq 4$  ( $p_2 \geq 5$ ), so muß aus elementargeometrischen Überlegungen  $f \geq 6$  sein. Daher scheiden noch weitere Fälle aus. Es bleiben für ein relatives Maximum im Innern des Bereiches nur mehr folgende Möglichkeiten offen:

$$(16) \quad p_1 = 3(p_2 = 4), \quad f < 8, \quad k < 12.$$

Die Untersuchung dieser Fälle wird im 4. Abschnitt durchgeführt. In allen anderen Fällen liegt das absolute Maximum sicher am Rande.

### 3. Untersuchung der Werte am Rande.

Der Bereich ist bestimmt durch die Geraden  $\tau_1 = 0, \tau_1 = \pi, \tau_2 = 0, \tau_2 = \pi$  und  $n_1\tau_1 + n_2\tau_2 = 4\pi$ . Für die Funktionswerte am Rande ergibt sich nach (1) und (2)

$$F(\tau_1, \pi) \geq F(\tau_1, 0) \quad \text{und} \quad F(\pi, \tau_2) \geq F(0, \tau_2).$$

Es kann daher, wenn kein relatives Maximum vorhanden ist, das absolute nur auf  $\tau_1 = \pi, \tau_2 = \pi$  oder der Geraden  $n_1\tau_1 + n_2\tau_2 = 4\pi$  auftreten. Da  $U(\tau, p)$  eine konkave Funktion von  $\tau$

ist und die Funktion an der Stelle  $\tau = \pi$  abnimmt, kann das absolute Maximum auch nicht auf  $\tau = \pi$  sondern nur auf  $n_1\tau_1 + n_2\tau_2 = 4\pi$  liegen.

#### 4. Die restlichen Fälle.

Ob bei den restlichen Möglichkeiten (16) ein Maximum im Innern auftreten kann, soll für jeden Fall getrennt untersucht werden. Dazu brauchen wir nur die Polyeder zu betrachten, bei denen die Eckenzahlen der Flächen nicht gleich und auch nicht zwei aufeinanderfolgende ganze Zahlen sind.

a)  $f = 5, e = 5, k = 8$ . Die Eckenzahlen der Flächen sind hier aber aufeinanderfolgende ganze Zahlen. Somit gilt die in [1] angeführte obere Schranke für das Volumen  $S_2 = 0,85$ .

b) Ebenso für  $f = 5, e = 6, k = 9$  mit der oberen Schranke  $S_2 = 1,05$ .

c) Der Fall  $f = 6, e = 6, k = 10$  kann bei zwei Polyederformen eintreten. Besteht die Oberfläche aus zwei Vierecken und vier Dreiecken, so sind die Eckenzahlen wieder aufeinanderfolgende Zahlen, es ist daher  $n_1\tau_1 + n_2\tau_2 = 4\pi$ . Die Funktion gibt die obere Schranke aus [1]  $S_2 = 1,16$ . Besteht aber die Oberfläche aus einem Fünfeck und fünf Dreiecken, so läßt sich das nach dem in [1] angeführten Verfahren auf  $n_1 = 4, p_1 = 3, n_2 = 2, p_2 = 4$  reduzieren. Dann muß man aber auch das Maximum im Innern berücksichtigen, da es das absolute ist. Es liegt an der Stelle  $\tau_1 = \frac{\pi}{2}, \tau_2 = \frac{2\pi}{3}$ , wie man aus (5) erkennen kann, wobei  $n_1\tau_1 + n_2\tau_2 = \frac{10\pi}{3} < 4\pi$  ist. Aus (1) und (2) entnimmt man dafür den Funktionswert

$$F\left(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{18 + 8\sqrt{3}}{27}$$

und damit die obere Schranke  $S = 1,18$ . Es muß daher im Falle  $f = 6, e = 6, k = 10$  dieser Wert als Schranke gelten.



d) Ist  $f = 6$ ,  $e = 7$ ,  $k = 11$ , so gibt es wieder zwei Möglichkeiten für das Polyeder. Besteht seine Oberfläche aus zwei Dreiecken und vier Vierecken, dann kann man sich wieder auf  $n_1\tau_1 + n_2\tau_2 = 4\pi$  mit  $S_2 = 1,35$  aus [1] beschränken. Setzt sich die Oberfläche aber aus einem Fünfeck, zwei Vierecken und drei Dreiecken zusammen, so läßt sich das auf  $n_1 = 2$ ,  $p_1 = 3$ ,  $n_1 = 2$ ,  $p_1 = 3$ ,  $n_2 = 4$ ,  $p_2 = 4$  reduzieren. Das ergibt wieder ein absolutes Maximum im Innern bei  $\tau_1 = \frac{\pi}{2}$ ,  $\tau_2 = \frac{2\pi}{3}$  mit  $n_1\tau_1 + n_2\tau_2 = \frac{11\pi}{3} < 4\pi$  und einen Funktionswert

$$F\left(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{9 + 16\sqrt{3}}{27}$$

der die obere Schranke  $S = 1,36$  liefert.

e) Der Fall  $f = 7$ ,  $e = 6$ ,  $k = 11$  tritt dann ein, wenn das Polyeder aus sechs Dreiecken und einem Viereck besteht. Es gelten dieselben Überlegungen wie in den Fällen a) und b).

Herrn Prof. L. Fejes Tóth danke ich für die persönlichen Anregungen zu dieser Arbeit.

#### LITERATURHINWEIS

- [1] FEJES TÓTH L.: *Über eine Volumsabschätzung für Polyeder*. Monatshefte f. Mathematik, 64, 374-377 (1960).
- [2] FLORIAN A.: *Eine Ungleichung über konvexe Polyeder*. Monatshefte f. Mathematik, 60, 130-156 (1956).