Giovanni Zacher

Caratterizzazione dei gruppi immagini omomorfe duali di un gruppo finito

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 31 (1961), p. 412-422

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1961__31__412_0>

CARATTERIZZAZIONE DEI GRUPPI IMMAGINI OMOMORFE DUALI DI UN GRUPPO FINITO

Nota (*) *di* GIOVANNI ZACHER (*a Padova*)

Baer si è occupato di problemi di « dualità » relativi al reticolo dei sottogruppi di un gruppo in due lavori, [1] [1]) e [2], apparsi nel 1937 e nel 1939. In questi lavori dimostrò, fra le altre cose, che i gruppi dotati di duale [2]) sono periodici e caratterizzò i gruppi abeliani con duale.

Nel 1950 Suzuki, nel lavoro [9], comparso nel 1951, ha determinato i gruppi finiti risolubili dotati di duale, risultato da me esteso recentemente ai gruppi risolubili infiniti [12]. E in un lavoro pubblicato nel 1955 sui centralizzanti dei sottogruppi di un gruppo finito [7], Gaschütz ebbe a considerare, dimostrando che riuscivano risolubili, gruppi con l'ordine finito e col reticolo dei sottogruppi dotato di un particolare automorfismo duale involutorio. Curzio invece ha studiato [5] una classe di gruppi finiti col reticolo di composizione autoduale. In un lavoro, [11], apparso nel 1960, io mi sono occupato poi dei gruppi, il cui reticolo dei sottogruppi è immagine omomorfa duale di quello di un gruppo d'ordine finito, ed ho dimostrato che la loro classificazione si riconduce essenzialmente alla determinazione dei gruppi finiti dotati di duale e semplici.

(*) Pervenuta in redazione il 10 luglio 1961.
Indirizzo dell'A.: Seminario matematico, Università, Padova.

[1]) I numeri tra parentesi quadre si riferiscono alla bibliografia che compare alla fine di questa Nota.

[2]) Per la terminologia rimando al successivo n. 1 di questa Nota.

Ebbene lo scopo precipuo di questa Nota è di stabilire che:

Gli unici gruppi finiti semplici dotati di duale sono quelli d'ordine primo.

Da questo e dai teoremi ricordati non sarà difficile dedurre che:

Se G è un gruppo d'ordine finito, le seguenti condizioni sono equivalenti fra di loro:

a) G è l'immagine omomorfa duale di un gruppo finito;

b) G è il prodotto diretto di p-gruppi modulari non hamiltoniani e di P-gruppi non abeliani con gli ordini primi fra loro;

c) G è risolubile e dotato di duale;

d) il reticolo dei sottogruppi di G è isomorfo al reticolo dei sottogruppi di un gruppo abeliano;

e) G è risolubile ed autoduale.

Ne segue, in particolare, la risoluzione, per i gruppi d'ordine finito, di uno dei problemi proposti da Birkhoff {[3], problema 37}.

1. - Per rendere più agevole la lettura di questa Nota, ricordo in questo numero alcune convenzioni circa la terminologia e le notazioni.

Lettere maiuscole in carattere gotico indicano gruppi; $\mathfrak{G}_p$ indica un sottogruppo di Sylow con l'ordine uguale ad una potenza di p; 1 è il sottogruppo identico oppure l'elemento identico; $|\mathfrak{G}|$ è l'ordine di $\mathfrak{G}$, $\mathscr{L}(\mathfrak{G})$ il reticolo dei sottogruppi di $\mathfrak{G}$, e $\Phi_1(\mathfrak{G})$ il sottogruppo di Frattini di $\mathfrak{G}$.

La notazione $\mathfrak{H}<\mathfrak{G}$ significa che $\mathfrak{H}$ è un sottogruppo proprio di $\mathfrak{G}$; se $\mathfrak{H} \leqslant \mathfrak{G}$, $\mathscr{N}(\mathfrak{H})$ indica il normalizzante di $\mathfrak{H}$ in $\mathfrak{G}$.

Un sottogruppo non identico $\mathfrak{H}$ di $\mathfrak{G}$ è un sottogruppo di Hall di $\mathfrak{G}$ se il suo ordine è primo con il suo indice in $\mathfrak{G}$.

Se φ è un omomorfismo di $\mathscr{L}(\mathfrak{G})$ in $\mathscr{L}(\overline{\mathfrak{G}})$, $\varphi(\mathfrak{H})$ indicherà l'immagine mediante φ del sottogruppo $\mathfrak{H}$ di $\mathfrak{G}$ in $\mathscr{L}(\overline{\mathfrak{G}})$.

Un gruppo $\overline{\mathfrak{G}}$ è l'immagine omomorfa duale di un gruppo $\mathfrak{G}$ se esiste un omomorfismo duale ψ di $\mathscr{L}(\mathfrak{G})$ su $\mathscr{L}(\overline{\mathfrak{G}})$, vale a dire una trasformazione univoca di $\mathscr{L}(\mathfrak{G})$ su $\mathscr{L}(\overline{\mathfrak{G}})$ tale che $\psi(\mathfrak{H} \cup \mathfrak{N}) = \psi(\mathfrak{H}) \cap \psi(\mathfrak{N})$, $\psi(\mathfrak{H} \cap \mathfrak{N}) = \psi(\mathfrak{H}) \cup \psi(\mathfrak{N})$.

Se la corrispondenza è biunivoca, si parla di ψ come di un isomorfismo duale e si dice che $\mathfrak{G}$ è dotato di duale.

Un sottogruppo $\mathfrak{M}$ di $\mathfrak{G}$ si dice $\mathscr{L}(\mathfrak{G})$-caratteristico se coincide con la propria immagine in ogni automorfismo di $\mathscr{L}(\mathfrak{G})$.

Avverto finalmente, una volta per tutte, che in questa Nota prendo in considerazione soltanto gruppi d'ordine finito.

2. - Presentiamo ora due definizioni, utili per quanto esporremo.

DEFINIZIONE I: Un sottogruppo $\mathfrak{N}$ di un gruppo $\mathfrak{G}$ si dirà rigidamente legato ad un sottogruppo $\mathfrak{M}$ di $\mathfrak{G}$ se per ogni automorfismo φ di $\mathscr{L}(\mathfrak{G})$ l'essere $\varphi(\mathfrak{M}) = \mathfrak{M}$ implica $\varphi(\mathfrak{N}) = \mathfrak{N}$.

DEFINIZIONE II: Se $\mathfrak{N}$ ed $\mathfrak{M}$ è una coppia di sottogruppi di un gruppo $\mathfrak{G}$, si dirà che $\mathfrak{N}$ è r-normale (reticolarmente normale) in $\mathfrak{M}$, se $\mathfrak{N}$ è un sottogruppo normale di $\mathfrak{M}$ e se per ogni automorfismo φ di $\mathscr{L}(\mathfrak{G})$ risulta pure $\varphi(\mathfrak{N})$ normale in $\varphi(\mathfrak{M})$.

Naturalmente è ovvia la seguente:

PROPOSIZIONE I: I sottogruppi r-normali di un sottogruppo $\mathfrak{M}$ di $\mathfrak{G}$ formano un sottoreticolo di $\mathscr{L}(\mathfrak{M})$, e che se $\mathfrak{N}$ è r-normale in $\mathfrak{M}'$ ed $\mathfrak{M}''$, lo è sia in $\mathfrak{M}' \cup \mathfrak{M}''$ che in $\mathfrak{M}' \cap \mathfrak{M}''$.

Le due proposizioni che seguono chiariscono la relazione che intercorre tra le due nozioni testè introdotte.

PROPOSIZIONE II: Se $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{M}$ sono due sottogruppi di un gruppo $\mathfrak{G}$, se $\mathfrak{N}$ è rigidamente legato ad $\mathfrak{M}$ in $\mathscr{L}(\mathfrak{G})$, e se $\mathfrak{N} \leqslant \mathfrak{M}$, allora $\mathfrak{N}$ è r-normale in $\mathfrak{M}$.

Infatti sia φ un automorfismo di $\mathscr{L}(\mathfrak{G})$ e sia a un elemento di $\varphi(\mathfrak{M})$. Se α è l'automorfismo interno di $\mathfrak{G}$ indotto da a in $\mathfrak{G}$, allora α induce un automorfismo α^* in $\mathscr{L}(\mathfrak{G})$; posto $\chi = \varphi^{-1}\alpha^*\varphi$, χ risulta un automorfismo di $\mathscr{L}(\mathfrak{G})$ con $\chi(\mathfrak{M}) = \mathfrak{M}$, e quindi pure $\chi(\mathfrak{N}) = \mathfrak{N}$; pertanto $\alpha^*(\varphi(\mathfrak{N})) = \varphi(\mathfrak{N})$, ossia $\varphi(\mathfrak{N})$ è normale in$\varphi(\mathfrak{M})$.

PROPOSIZIONE III: Se $\mathfrak{N} \leqslant \mathfrak{G}$ è r-normale nel normalizzante $\mathscr{N}(\mathfrak{N})$ di $\mathfrak{N}$ in $\mathfrak{G}$, $\mathscr{N}(\mathfrak{N})$ è rigidamente legato ad $\mathfrak{N}$.

Infatti si ha $\varphi(\mathfrak{N})$ normale in $\varphi(\mathscr{N}(\mathfrak{N}))$, e quindi se $\varphi(\mathfrak{N}) = \mathfrak{N}$, è anche $\varphi(\mathscr{N}(\mathfrak{N})) = \varphi(\mathfrak{N})$.

E passiamo alla dimostrazione di un primo lemma.

LEMMA I: *Sia ψ un isomorfismo duale tra i reticoli $\mathscr{L}(\mathfrak{G})$ ed $\mathscr{L}(\overline{\mathfrak{G}})$ di due gruppi $\mathfrak{G}$ e $\overline{\mathfrak{G}}$. Se $\mathfrak{M}$ è un sottogruppo di $\mathfrak{G}$ ed $\mathfrak{N}$ un sottogruppo r-normale di $\mathfrak{M}$, allora esiste un gruppo $\mathfrak{H}$ con $\mathfrak{M} \leqslant \mathfrak{H}$ e tale che $\mathfrak{N}$ è normale in $\mathfrak{H}$ e $\psi(\mathfrak{H})$ è normale in $\varphi(\mathfrak{N})$; ψ subordina un isomorfismo duale tra i due reticoli $\mathscr{L}(\mathfrak{H}/\mathfrak{N})$ ed $\mathscr{L}(\psi(\mathfrak{N})/\psi(\mathfrak{H}))$.*

Posto per semplicità, $\psi(\mathfrak{N}) = \overline{\mathfrak{N}}$, $\psi(\mathfrak{M}) = \overline{\mathfrak{M}}$, risulta ovviamente $\overline{\mathfrak{M}} \leqslant \overline{\mathfrak{N}}$. Se a è un elemento qualunque di $\overline{\mathfrak{N}}$, consideriamo l'automorfismo interno α indotto da a in $\overline{\mathfrak{G}}$, e poniamo $\overline{\mathfrak{H}} = \bigcap_{a \in \overline{\mathfrak{N}}} \alpha(\overline{\mathfrak{M}})$. Allora $\overline{\mathfrak{H}}$ è normale in $\overline{\mathfrak{N}}$. Se facciamo vedere che $\mathfrak{N}$ è normale in $\mathfrak{H} = \psi^{-1}(\overline{\mathfrak{H}})$, la conclusione è immediata. Ora $\psi^{-1}(\alpha(\overline{\mathfrak{M}}))$ non è altro che il trasformato di $\mathfrak{M}$ mediante l'automorfismo χ di $\mathscr{L}(\mathfrak{G})$ definito dalla posizione $\chi = \psi^{-1}\alpha^*\psi$. Dunque $\mathfrak{N}$ è normale in $\chi(\mathfrak{M})$ atteso che $\chi(\mathfrak{N}) = \mathfrak{N}$. Ma allora $\mathfrak{N}$ è normale in $\mathfrak{H}$, tenuto conto che $\mathfrak{H} = \bigcup_{\chi=\psi^{-1}\alpha^*\psi} \chi(\mathfrak{M})$ con a che descrive $\mathfrak{N}$.

Corollario I: *Se $\mathfrak{G}$ è un gruppo con duale, se $\mathfrak{N}$ è normale in $\mathfrak{M}$ ed $\mathfrak{M}$ è rigidamente legato ad $\mathfrak{N}$ in $\mathscr{L}(\mathfrak{G})$, allora il gruppo $\mathfrak{M}/\mathfrak{N}$ ha duale.*

È ovviamente $\mathfrak{H} = \mathfrak{M}$.

Facciamo seguire ora alcune condizioni sufficienti perchè un sottogruppo $\mathfrak{N}$ di $\mathfrak{G}$ sia rigidamente legato ad un sottogruppo $\mathfrak{M}$ di $\mathfrak{G}$, o perchè $\mathfrak{N}$ sia r-normale in un sottogruppo $\mathfrak{M}$ di $\mathfrak{G}$.

Proposizione IV: Se $\mathfrak{N} \leqslant \mathfrak{M} \leqslant \mathfrak{H}$ è una terna di sottogruppi di $\mathfrak{G}$ e se $\mathfrak{M}$ è r-normale in $\mathfrak{H}$, mentre $\mathfrak{N}$ è $\mathscr{L}(\mathfrak{M})$-caratteristico, allora $\mathfrak{N}$ è r-normale in $\mathfrak{H}$.

Infatti se φ è un automorfismo di $\mathscr{L}(\mathfrak{G})$, $\varphi(\mathfrak{N})$ è $\mathscr{L}(\varphi(\mathfrak{M}))$-caratteristico in $\varphi(\mathfrak{M})$, e $\varphi(\mathfrak{M})$ è normale in $\varphi(\mathfrak{H})$. Ciò basta per concludere che $\varphi(\mathfrak{N})$ è normale in $\varphi(\mathfrak{H})$.

Ricordiamo che un automorfismo φ di $\mathscr{L}(\mathfrak{G})$ si dice non singolare [3]) se $|\varphi(\mathfrak{H})| = |\mathfrak{H}|$ per ogni sottogruppo $\mathfrak{H}$ di $\mathfrak{G}$.

Si ha allora

Proposizione V: Se $\mathscr{L}(\mathfrak{G})$ è privo di automorfismi singolari, se $\mathfrak{N}$ è un sottogruppo di Hall del sottogruppo $\mathfrak{M}$ di $\mathfrak{G}$, allora $\mathfrak{N}$ è r-normale in $\mathfrak{M}$, se è normale in $\mathfrak{M}$.

Per la dimostrazione vedasi teorema 14 a pag. 50 in [10].

E ancora

Proposizione VI: Se $\mathscr{L}(\mathfrak{G})$ è privo di automorfismi singolari, se $\mathfrak{N}$ è un p-sottogruppo normale di un sottogruppo $\mathfrak{M}$ di $\mathfrak{G}$, se $\mathfrak{N}$ è r-normale nel p-sottogruppo di Sylow che lo contiene, $\mathfrak{N}$ è r-normale in $\mathfrak{M}$.

---

[3]) Vedasi pag. 42 in [10].

COROLLARIO II: *Sia $\mathscr{L}(\mathfrak{G})$ privo di automorfismi singolari, $\mathfrak{N}$ un p-gruppo normale di un soitogruppo $\mathfrak{M}$ di $\mathfrak{G}$ e $\mathfrak{S}$ un sottogruppo di Sylow di $\mathfrak{M}$ contenente $\mathfrak{N}$. Se $\mathfrak{S}/\mathfrak{N}$ è abeliano elementare, $\mathfrak{N}$ r-normale in $\mathfrak{M}$.*

In virtù della VI, basterà dimostrare che $\mathfrak{N}$ è r-normale in $\mathfrak{S}$. Ora se φ è un automorfismo di $\mathscr{L}(\mathfrak{G})$, $\varphi(\mathfrak{S})$ è un p-sottogruppo di Sylow di $\varphi(\mathfrak{M})$, e quindi $\varphi(\mathfrak{N})$ è normale in $\varphi(\mathfrak{M})$ perchè $\varphi(\mathfrak{N}) \geqslant \Phi_1(\varphi(\mathfrak{S}))$, come segue dal fatto che $\mathfrak{N} \geqslant \Phi_1(\mathfrak{S})$ e che si ha $\varphi(\Phi_1(\mathfrak{H})) = \Phi_1(\varphi(\mathfrak{H}))$ qualunque sia $\mathfrak{H}$ in $\mathfrak{G}$.

LEMMA II: *Se $\mathscr{L}(\mathfrak{G})$ è privo di automorfismi singolari, se $\mathfrak{M}$ è un sottogruppo r-normale di un p-sottogruppo di Sylow $\mathfrak{G}_p$ di $\mathfrak{G}$, se $\mathfrak{N} \leqslant \mathfrak{M}$ è $\mathscr{L}(\mathfrak{M})$-caratteristico, allora il normalizzante $\mathscr{N}(\mathfrak{N})$ di $\mathfrak{N}$ in $\mathfrak{G}$ è rigidamente legato ad $\mathfrak{N}$ in $\mathscr{L}(\mathfrak{G})$.*

$\mathfrak{N}$ è r-normale in $\mathscr{N}(\mathfrak{N})$ in virtù della IV e VI. Ma allora per la III, $\mathscr{N}(\mathfrak{N})$ è rigidamente legato ad $\mathfrak{N}$.

LEMMA III: *Sia $\mathfrak{D}$ un gruppo intersezione di due p-sottogruppi distinti di $\mathfrak{G}$, e $\mathfrak{D}$ sia massimo rispetto a tale proprietà. Allora il normalizzante $\mathscr{N}(\mathfrak{D})$ di $\mathfrak{D}$ in $\mathfrak{G}$ è rigidamente legato a $\mathfrak{D}$ in $\mathscr{L}(\mathfrak{G})$.*

Infatti $\mathfrak{D}$ coincide con l'intersezione di tutti i p-sottogruppi di Sylow di $\mathscr{N}(\mathfrak{D})$. Se ora φ è un automorfismo di $\mathscr{L}(\mathfrak{G})$ che tiene fisso $\mathfrak{D}$, allora φ muta i p-sottogruppi di Sylow di $\mathscr{N}(\mathfrak{D})$ in quelli di $\varphi(\mathscr{N}(\mathfrak{D}))$, per cui sarà $\mathfrak{D}$ normale in $\varphi(\mathscr{N}(\mathfrak{D}))$, il che implica ovviamente $\varphi(\mathscr{N}(\mathfrak{D})) = \mathscr{N}(\mathfrak{D})$.

Infine enunciamo la seguente caratterizzazione, dovuta a Suzuki [9], dei gruppi finiti risolubili dotati di duale.

PROPOSIZIONE VII: Un gruppo finito $\mathfrak{G}$ ha duale se e solo se è il prodotto diretto di p-gruppi modulari non hamiltoniani e di P-gruppi [4]) non abeliani con gli ordini a due a due primi fra loro.

Per comodità di esposizione formuliamo ancora esplicitamente il seguente criterio che è una conseguenza immediata della VII.

PROPOSIZIONE VIII: Un gruppo $\mathfrak{G}$ non ha duale se contiene un sottogruppo non speciale diverso da un P-gruppo.

---

[4]) I P-gruppi [10] sono i p-gruppi abeliani elementari, ed ogni gruppo unione di un p-gruppo abeliano elementare, $\mathfrak{P}$, e di un gruppo ciclico $\{b\}$ con l'ordine primo q, diverso da p e con l'elemento generatore b soddisfacente per ogni a di $\mathfrak{P}$ alla $bab^{-1} = a^r$, r essendo un intero che non dipende da a e che verifica le $r \not\equiv 1$ mod. p, $r \equiv 1$ mod. p.

3. - Il presente numero dedichiamo alla dimostrazione della non esistenza di gruppi semplici non abeliani con duale.

Osserviamo anzitutto che se $\mathscr{L}(\mathfrak{G})$ è dualmente isomorfo ad $\mathscr{L}(\overline{\mathfrak{G}})$, se $\mathfrak{G}$ è semplice tale è pure $\overline{\mathfrak{G}}$ e viceversa, come segue dal teorema I in [11]. E ancora, sempre in virtù di questo teorema, se fra i gruppi semplici non abeliani con duale, $\mathfrak{G}$ è quello di ordine minimo, ogni gruppo $\mathfrak{H}$ con duale ed ordine $|\mathfrak{H}|$ minore di $|\mathfrak{G}|$ è risolubile. Inoltre gli automorfismi di $\mathscr{L}(\mathfrak{G})$ sono tutti non singolari, se $\mathfrak{G}$ è semplice [10].

Ammettiamo che l'insieme J dei gruppi semplici non abeliani con duale non sia vuoto; allora sia detto una volta per sempre che in tutto questo numero con $\mathfrak{G}$ indicheremo quello fra i gruppi di J che ha ordine minimo. Inoltre con ψ indicheremo un fissato isomorfismo duale tra $\mathscr{L}(\mathfrak{G})$ ed il reticolo $\mathscr{L}(\overline{\mathfrak{G}})$ di un conveniente gruppo $\overline{\mathfrak{G}}$, semplice.

Una serie di proposizioni che andremo via via dimostrando ci porterà a concludere che era assurdo supporre l'insieme J non vuoto.

La nostra indagine si concentra alla determinazione della struttura dei sottogruppi di Sylow di $\mathfrak{G}$ relativi al minimo divisore primo di $|\mathfrak{G}|$ e al modo come questi sono immersi in $\mathfrak{G}$. Pertanto con p indicheremo nel seguito sempre il più piccolo divisore primo di $|\mathfrak{G}|$.

E incominciamo col provare che:

A. - Se $\mathfrak{G}_p$ è un sottogruppo di Sylow di $\mathfrak{G}$ relativo al numero primo p, minimo divisore primo di $|\mathfrak{G}|$, esiste almeno un altro sottogruppo di Sylow di $\mathfrak{G}$ a intersezione non identica con $\mathfrak{G}_p$, a meno che $\mathfrak{G}_p$ non sia un gruppo generalizzato dei quaternioni.

Supponiamo che due qualunque p-sottogruppi di Sylow abbiano intersezione identica, e sia $\mathfrak{H}$ un sottogruppo minimo di un fissato p-sottogruppo di Sylow $\mathfrak{G}_p$; inoltre sia φ un automorfismo di $\mathscr{L}(\mathfrak{G})$. Poichè $\mathfrak{G}$ è semplice, φ non è singolare, sicchè $\varphi(\mathfrak{G}_p)$ è ancora un p-sottogruppo di Sylòw di $\mathfrak{G}$. Se allora $\varphi(\mathfrak{H}) = \mathfrak{H}$, risulta pure $\varphi(\mathfrak{G}_p) = \mathfrak{G}_p$, perchè altrimenti l'intersezione $\varphi(\mathfrak{G}_p) \cap \mathfrak{G}_p$ non sarebbe identica, contro ipotesi. $\mathfrak{G}_p$ è dunque rigidamente legato ad $\mathfrak{H}$ in $\mathscr{L}(\mathfrak{G})$. Ma allora $\psi(\mathfrak{G}_p)$ è normale in $\psi(\mathfrak{H})$ (prop. II). Ne segue che $\mathfrak{G}_p$ può contenere un solo sottogruppo minimo perchè in caso contrario $\overline{\mathfrak{G}}$ non sarebbe semplice. $\mathfrak{G}_p$ dunque è ciclico o generalizzato dei quaternioni [5]; poichè $\mathfrak{G}$ è semplice non abeliano, per un noto teorema di Burnside [6]), $\mathfrak{G}_p$ non può essere ciclico [7]).

Facciamo ora vedere che:

B. - Se $\mathfrak{D}$ è una intersezione massima non identica di due sottogruppi di Sylow distinti di $\mathfrak{G}$ d'ordine p^α, il normalizzante $\mathcal{N}(\mathfrak{D})$ di $\mathfrak{D}$ in $\mathfrak{G}$ ha ordine p^2q con q numero primo maggiore di p, $p < q$, ed $\mathcal{N}(\mathfrak{D})$ risulta essere o un gruppo irriducibile a sottogruppi di Sylow ciclici, o un prodotto diretto di $\mathfrak{D}$ e di un gruppo $\mathfrak{R}$ isomorfo ad un P-gruppo d'ordine pq.

Il gruppo $\mathcal{N}(\mathfrak{D})$ è rigidamente legato a $\mathfrak{D}$ in $\mathcal{L}(\mathfrak{G})$ (lemma III), per cui $\mathcal{N}(\mathfrak{D})/\mathfrak{D}$ ha duale (Corollario I). Poichè $|\mathcal{N}(\mathfrak{D})| < |\mathfrak{G}|$, $\mathcal{N}(\mathfrak{D})/\mathfrak{D}$ (e quindi pure $\mathcal{N}(\mathfrak{D})$) è risolubile. Se si tiene presente che i p-sottogruppi di Sylow di $\mathcal{N}(\mathfrak{D})/\mathfrak{D}$ non sono normali [8]), si avrà per VII che $\mathcal{N}(\mathfrak{D})/\mathfrak{D} = \mathfrak{A}/\mathfrak{D} \times \mathfrak{C}/\mathfrak{D}$, con $\mathfrak{A}/\mathfrak{D}$ un P-gruppo d'ordine pq^β con $p < q$, $\beta \geqslant 1$, e $\mathfrak{C}/\mathfrak{D}$ gruppo risolubile con duale e d'ordine primo con quello di $\mathfrak{A}/\mathfrak{D}$. Consideriamo il sottogruppo di Frattini $\Phi_1(\mathfrak{A})$ di $\mathfrak{A}$. È ovviamente $\Phi_1(\mathfrak{A}) \leqslant \mathfrak{D}$; proviamo che $\Phi_1(\mathfrak{A}) = \mathfrak{D}$, se $\Phi_1(\mathfrak{A}) \neq 1$. Infatti $\Phi_1(\mathfrak{A})$ è r-normale in $\mathfrak{A}$ (prop. IV) e quindi per il lemma I esiste un gruppo $\mathfrak{H} \geqslant \mathfrak{A}$ tale che $\mathfrak{H}/\Phi_1(\mathfrak{A})$ ha quale e quindi è risolubile pure. Ora i p-sottogruppi di Sylow di $\mathfrak{H}/\Phi_1(\mathfrak{A})$ hanno ordini divisibili almeno per p^2 se $\Phi_1(\mathfrak{A}) < \mathfrak{D}$, il che comporta (Prop. VII) che in $\mathfrak{A}/\mathfrak{D}$ i p-sottogruppi di Sylow siano normali, il che, come si è osservato, non è vero. È dunque $\Phi_1(\mathfrak{A}) = \mathfrak{D}$, se $\Phi_1(\mathfrak{A}) \neq 1$.

Da $\Phi_1(\mathfrak{A}) = \mathfrak{D}$ segue che $\mathfrak{A}$ è supersolubile [9]), essendo tale $\mathfrak{A}/\mathfrak{D}$. Ma allora esiste un solo sottogruppo di Sylow $\mathfrak{A}_q$ di $\mathfrak{A}$ e si ha $\mathfrak{D} \cup \mathfrak{A}_q = \mathfrak{D} \times \mathfrak{A}_q$. Se $\mathfrak{A}_p$ è un p-sottogruppo di Sylow di $\mathfrak{A}$, il gruppo $\Phi_1(\mathfrak{A})$ essendo contenuto in $\mathfrak{D}$, è r-normale in $\mathfrak{A}$ (Corollario II). Il che comporta che sia $\Phi_1(\mathfrak{A}_p) = \mathfrak{D}$ (lemma I

[5]) Vedasi ad es. [13], teorema 15 a pag. 148.

[6]) Vedasi ad es. [13], teorema 4 a pag. 169.

[7]) Anche la seconda alternativa si potrebbe escludere fin d'ora ricorrendo ad un recente risultato di Brauer e Suzuki [4].

[8]) Vedasi ad es. [13] teorema 7 a pag. 138.

[9]) Satz 10 a pag. 148 in [8].

e prop. VII), ammesso che sia $\Phi_1(\mathfrak{A}_p) \neq 1$. $\mathfrak{A}_p$ è dunque ciclico se $\Phi_1(\mathfrak{A}_p) \neq 1$, e se $\mathfrak{T}$ è sottogruppo minimo di $\mathfrak{A}_p$, $\mathfrak{T}$ è r-normale in $\mathfrak{A}$ (prop. VI). Ma allora deve essere $\mathfrak{D} = \mathfrak{T}$ ed $\mathfrak{A}$ avere ordine p^2q^β. Se invece $\Phi_1(\mathfrak{A}_p) = 1$, un qualunque sottogruppo ciclico $\{a\}$ di $\mathfrak{D}$ è r-normale in $\mathfrak{A}$ (Corollario II). Ma allora deve essere $\{a\} = \mathfrak{D}$ (Lemma I e prop. VII) e risulta $\mathfrak{A} = \mathfrak{D} \times \mathfrak{R}$ con $\mathfrak{R}$ un P-gruppo di ordine pq^β. Dimostriamo adesso che $\mathfrak{C}/\mathfrak{D} = 1$. Infatti si ha $\mathfrak{C} = \mathfrak{D} \times \mathfrak{C}_1$ perchè $\mathfrak{D}$ è un sottogruppo di Sylow normale d'ordine p di $\mathfrak{C}$, e p è il minimo divisore primo di $|\mathfrak{G}|$ e quindi anche di $|\mathfrak{C}|$. Ma allora se fosse $\mathfrak{C}_1$ diverso da 1, poichè $\mathfrak{C}_1$ è r-normale in $\mathcal{N}(\mathfrak{D})$ (prop. V), pel lemma I il gruppo $\mathcal{N}(\mathfrak{D})/\mathfrak{C}_1$ che è isomorfo ad $\mathfrak{A}$ sarebbe contenuto in un gruppo risolubile dotato di duale, e ciò non è possibile (prop. VIII). E per un motivo del tutto analogo non può neppure essere β maggiore di 1.

Passiamo ora a dimostrare che:

C. - Il gruppo $\mathfrak{G}$ è d'ordine pari ed i 2-sottogruppi di Sylow di $\mathfrak{G}$ sono gruppi quadrinomi.

Osserviamo anzitutto che $\mathfrak{G}$ è p-normale. Infatti altrimenti il centro $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}_p)$ di un p-sottogruppo di Sylow $\mathfrak{G}_p$ sarebbe contenuto in una intersezione massima $\mathfrak{D}$, per cui in virtù della *B.* dovrebbe essere $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}_p) = \mathfrak{D}$ e quindi $\mathfrak{G}_p$ abeliano elementare e con ciò anche p-normale, contro ipotesi. Se ora $\mathcal{N}(\mathfrak{G}_p)$ è il normalizzante di $\mathfrak{G}_p$ in $\mathfrak{G}$, facciamo vedere che $\mathcal{N}(\mathfrak{G}_p)$ contiene propriamente $\mathfrak{G}_p$. Infatti essendo G semplice non abeliano e p-normale, è $\mathcal{N}(\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}_p)) > \mathfrak{G}_p$ [10]). Se ora fosse $\mathcal{N}(\mathfrak{G}_p) = \mathfrak{G}_p$, i p-sottogruppi di Sylow di $\mathcal{N}(\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}_p))$ conterrebbero tutti $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}_p)$, e quindi una intersezione massima $\mathfrak{D}$ di $\mathfrak{G}_p$ con un altro p-sottogruppo di Sylow di $\mathcal{N}(\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}_p))$ avrebbe $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}_p)$ per sottogruppo. Ma allora per la *B.* si conclude che $\mathfrak{D} = \mathfrak{Z}(\mathfrak{G}_p)$ e $\mathfrak{G}_p$ sarebbe abeliano elementare, il che contraddice la semplicità di $\mathfrak{G}$ e l'ipotesi $\mathcal{N}(\mathfrak{G}_p) = \mathfrak{G}_p$ [11]).

A partire da $\mathfrak{G}_p$, consideriamo la catena discendente dei sottogruppi di Frattini di $\mathfrak{G}$: $\mathfrak{G}_p = \Phi_0(\mathfrak{G}_p) > \Phi_1(\mathfrak{G}_p) > \ldots > \Phi_t(\mathfrak{G}_p) > \Phi_{t+1}(\mathfrak{G}_p) = 1$.

[10]) Vedasi ad es. teorema 6 a pag. 171 in [13].

[11]) Vedasi nota [6]).

Supponiamo che $\mathfrak{G}$ non sia abeliano elementare, per cui sarà $t \geqslant 1$.

Il gruppo $\mathfrak{G}_p/\Phi_t(\mathfrak{G}_p)$ risulta d'ordine almeno p^2, perchè $\mathfrak{G}_p$ non può essere ciclico essendo $\mathfrak{G}$ semplice non abeliano e p il minimo divisore primo di $|\mathfrak{G}|$.

Da $\mathcal{N}(\mathfrak{G}_p) > \mathfrak{G}_p$, segue pure $\mathcal{N}(\Phi_t(\mathfrak{G}_p)) > \mathfrak{G}_p$, e poichè $\mathcal{N}(\Phi_t(\mathfrak{G}_p))$ è rigidamente legato a $\mathfrak{G}_p$ (lemma II), il gruppo $\mathcal{N}(\Phi_t(\mathfrak{G}_p))/\Phi_t(\mathfrak{G}_p)$ ha duale. Se ora si tiene conto che p^2 divide l'ordine di $\mathcal{N}(\Phi_t(\mathfrak{G}_p))/\Phi_t(\mathfrak{G}_p)$, per la VII si conclude che $\mathcal{N}(\Phi_t(\mathfrak{G}_p))/\Phi_t(\mathfrak{G}_p) = \mathfrak{G}_p/\Phi_t(\mathfrak{G}_p) \times \mathfrak{C}/\Phi_t(\mathfrak{G}_p)$ con $\mathfrak{C}/\Phi_t(\mathfrak{G}_p) = 1$.

Ma allora $\mathcal{N}(\Phi_t(\mathfrak{G}_p)) = \mathfrak{G}_p \times \mathfrak{C}_1$ [12]) ove $\mathfrak{C}_1 \neq 1$ è il complemento di $\Phi_t(\mathfrak{G}_p)$ in $\mathfrak{C}$.

È dunque $\mathcal{N}(\mathfrak{G}_p) = \mathfrak{G}_p \times \mathfrak{C}_1$. Ne segue che $\mathfrak{G}_p$ è dotato di duale e quindi non può essere isomorfo ad un gruppo generalizzato dei quaternioni. Pertanto $\mathfrak{G}_p$ contiene una intersezione massima non identica $\mathfrak{D}$ (per la *A.*) con un altro p-sottogruppo di Sylow. Ma allora la struttura di $\mathcal{N}(\mathfrak{D})$ quale chiarita in *B.* è in contrasto con la relazione $\mathcal{N}(\mathfrak{G}_p) = \mathfrak{G}_p \times \mathfrak{C}_1$ ove $\mathfrak{C}_1 \neq 1$. Concludiamo dunque che $\mathfrak{G}$ è abeliano elementare. E se si tiene di nuovo presente la *B.*, deve essere $|\mathfrak{G}_p| = p^2$. Ma allora affinchè $\mathfrak{G}$ sia semplice, necessariamente deve essere $p = 2$.

Siamo ora in grado di dimostrare il seguente

TEOREMA 1: *Un gruppo finito semplice è dotato di duale se e solo se è un gruppo ciclico d'ordine primo.*

Nel gruppo semplice $\mathfrak{G}$ definito all'inizio di questo numero tutte le involuzioni (elementi di periodo 2) sono coniugate, in quanto i sottogruppi di Sylow d'ordine pari sono gruppi quadrinomi (per la *C.*). Ne segue che se $\mathfrak{D}$ è l'intersezione non identica di due 2-sottogruppi di Sylow di $\mathfrak{G}$, i centralizzanti delle involuzioni di $\mathfrak{G}$ sono tutti isomorfi al normalizzante $\mathcal{N}(\mathfrak{D})$ di $\mathfrak{D}$ in $\mathfrak{G}$. Pertanto per la *B.* risulta $C(\tau) = \{\tau\} \times \mathfrak{R}$, se τ indica una involuzione di $\mathfrak{G}$, ove $\mathfrak{R}$ è un P-gruppo di ordine $2q$, con q numero primo maggiore di 2. Ne segue che data una involuzione τ di $\mathfrak{G}$, esiste uno ed un solo sottogruppo ciclico d'ordine dispari di $\mathfrak{G}$ che centralizza τ, e precisamente è un gruppo $\{b\}$ d'ordine q.

---

[12]) Satz 5 e Satz 10 in [7].

Ma si ha pure che se b è un elemento d'ordine dispari permutabile con una involuzione τ, τ è univocamente individuata da b. Ragionando per assurdo, supponiamo che b sia permutabile con almeno due involuzioni distinte τ_1 e τ_2 di $\mathfrak{G}$. Si ha allora $\mathcal{N}(\{\tau_1\}) = \{\tau_1\} \times \mathfrak{R}'$, $\mathcal{N}(\{\tau_2\}) = \{\tau_2\} \times \mathfrak{R}''$ con b contenuto in $\mathfrak{R}'$ che in $\mathfrak{R}''$. Quindi il normalizzante $\mathcal{N}(\{b\})$ di $\{b\}$ in $\mathfrak{G}$ contiene il gruppo $\mathfrak{A} = \mathcal{N}(\{\tau_1\}) \cup \mathcal{N}(\{\tau_2\})$, e $\{b\}$ è r-normale in $\mathfrak{A}$ (prop. I e V). Ora il gruppo $\mathfrak{A}/\{b\}$ contiene un gruppo diedrale diverso da un 2-gruppo, isomorfo al gruppo $\{\tau_1\} \cup \{\tau_2\}$. Ma ciò è impossibile (lemma I e prop. VIII); b dunque individua τ. Ne segue che se b è un elemento d'ordine dispari di $\mathfrak{G}$ permutabile con una involuzione τ, risulta $|\mathcal{N}(\{b\})| = |C(\tau)| = 4q$. Quindi se b è un elemento d'ordine q contenuto in $\mathcal{N}(\{\tau\})$, $\mathcal{N}(\{\tau\})$ è rigidamente legato a $\{b\}$ ed a $\{\tau\}$ (lemma II). Ma allora $\psi(\mathcal{N}(\{\tau\}) \neq 1$ è normale in $\psi(\{b\})$ e $\psi(\{\tau\})$ e quindi in $\overline{\mathfrak{G}} = \psi(\{b\}) \cup \psi(\{\tau\})$, assurdo data la semplicità di $\overline{\mathfrak{G}}$. L'ipotesi che l'insieme J non fosse vuoto ci ha quindi condotto ad un assurdo. E la conclusione della dimostrazione è ovvia.

4. - E concludiamo con il teorema enunciato nella prefazione.

TEOREMA 2: *Se $\mathfrak{G}$ è un gruppo d'ordine finito, le seguenti condizioni sono equivalenti fra di loro*:

a) *$\mathfrak{G}$ è l'immagine omomorfa duale di un gruppo finito*;

b) *$\mathfrak{G}$ è il prodotto diretto di p-gruppi modulari non hamiltoniani e di P-gruppi non abeliani con gli ordini primi fra loro*;

c) *$\mathfrak{G}$ è risolubile e dotato di duale*;

d) *il reticolo dei sottogruppi di $\mathfrak{G}$ è isomorfo al reticolo dei sottogruppi di un gruppo abeliano*;

e) *$\mathfrak{G}$ è risolubile ed autoduale.*

Da *a*) segue *b*) in virtù del teorema II in [11] ed il teorema 1 di questa Nota. Da *b*) segue *c*) in virtù del teorema 5 a pag. 89 in [10]. Da *c*) segue *d*) in virtù del corollario a pag. 91 in [10]. Da *d*) segue *e*) in virtù del teorema 1 a pag. 87 in [10]. È poi ovvio che *e*) implica *a*).

BIBLIOGRAFIA

[1] BAER R.: *Dualism in abelian groups*. Bull. Amer. Math. Soc., vol. XLIII, 121-124, 1937.

[2] BAER R.: *Duality and commutativity of groups*. Duke Math. Journal, vol. V, 824-838, 1939.

[3] BIERKHOFF G.: *Lattice theory*. American Math. Soc. Colloquim publicationes, vol. XXV, 1948.

[4] BRAUER R., SUZUKI M.: *On finite groups of even order whose 2-Sylow group is a quaternion group*. Proceed. of the Nat. Acad. of Sc. USA, vol. XLV, 1757-59, 1959.

[5] CURZIO M.: *Sui gruppi supersolubili per cui il reticolo dei sottogruppi di composizione è autoduale*. Le Matematiche, vol. XII, 74-79, 1957.

[6] GASCHÜTZ W.: *Uber die Φ-Untergruppe endlicher Gruppen*. Math. Zeit., vol. LVIII, 160-170, 1953.

[7] GASCHÜTZ W.: *Gruppen, deren sämtliche Untergruppen Zentralisatoren sind*. Archiv der Math., Vol. VI, 5-8, 1955.

[8] HUPPERT B.: *Normalteiler und maximale Untergruppen endlicher Gruppen*. Math. Zeit., vol. LX, 409-434, 1954.

[9] SUZUKI M.: *On the lattice of subgroups of finite groups*. Trans. Amer. Math. Soc., vol. LXX, 345-371, 1951.

[10] SUZUKI M.: *Structure of a group and the structure of its lattice of subgroups*. Erg. der Math. und ihrer Grenzgebiete, Heft 10, Springer Verlag, Berlin, 1956.

[11] ZACHER G.: *On lattice dual-homomorphisms between finite groups*. Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, vol. XXX, 65-75, 1960.

[12] ZACHER G.: *I gruppi risolubili con duale*. Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, vol. XXXI, 104-113, 1961.

[13] ZASSENHAUS H.: *The theory of groups*. Second Edition, Chelsea Publ. C. New-York, 1958.