

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

GABRIELE DARBO

**Estensione alle mappe ponderate del teorema
di Lefschetz sui punti fissi**

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 31 (1961), p. 46-57

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1961__31__46_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1961, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

ESTENSIONE ALLE MAPPE PONDERATE DEL TEOREMA DI LEFSCHETZ SUI PUNTI FISSI

Nota () di GABRIELE DARBO (a Padova)*

In questa nota proseguo le mie ricerche sulle mappe ponderate ¹⁾ e mi propongo di estendere il classico teorema di Lefschetz sui punti fissi. Ecco il risultato finale che ottengo:

Se X è un ANR (per spazi metrici compatti) ed $f: X \rightarrow X$ una mappa ponderata che abbia i coefficienti in un dominio d'integrità A e che sia priva di punti fissi, il numero di Lefschetz $L(f)$ è nullo.

Raggiungo questo risultato per gradi. Anzitutto lo dimostro per varietà orientabili compatte e lisce e per coefficienti in un corpo. Indi lo trasporto agli ANR di dimensione finita mediante un teorema (teorema 1) di retrazione ed elimino successivamente l'ipotesi sulla dimensione tramite due lemmi. Finalmente passo a considerare il caso dei coefficienti in un dominio d'integrità mediante l'immersione canonica del dominio nel corpo delle frazioni.

Non sono del tutto prive di interesse ulteriori ricerche relative al caso di coefficienti in un anello con nullifici. A questo

(*) Pervenuto in redazione il 25 novembre 1960.

Indirizzo dell'A.: Seminario matematico, Università, Padova.

¹⁾ G. DARBO, *Teoria dell'omologia in una categoria di mappe pluri-valenti ponderate*, Questi Rendiconti, vol. XXVIII (1958), pp. 188-220; *Sulle coincidenze di mappe ponderate*, ibidem, vol. XXIX (1959), pagine 256-270.

scopo sarebbe opportuno estendere la nozione di traccia di un endomorfismo di un modulo (finitamente generato) su un anello siffatto. Ritengo che la cosa sia possibile almeno per anelli Noetheriani, nel qual caso per definire la traccia si potrebbe ricorrere a convenienti risoluzioni proiettive di un modulo finitamente generato avente dimensione omologica finita.

1. - Sia Ω un corpo commutativo arbitrario ed M una n -varietà differenziabile compatta connessa ed orientabile. Indicheremo con $d: M \rightarrow M \times M$ la mappa diagonale e con $\tilde{d}: M \times M \rightarrow M \times M$, $M \times M - 'M$ l'inclusione (contro diagonale) $'M$ essendo la diagonale in $M \times M$.

Useremo, fino ad esplicito avviso, l'omologia e la coomologia singolare con coefficienti nel corpo Ω , che rimarrà sottointeso.

Ciò posto, scegliamo i generatori $\omega_n \in H_n(M)$ e $\omega^n \in H^n(M)$ con la condizione $\omega_n \cdot \omega^n = 1$. La classe $\omega_n \times \omega_n \in H_{2n}(M \times M)$ sarà un generatore per $H_{2n}(M \times M)$ e per il teorema di dualità di Poincaré si avrà il diagramma commutativo

$$(1) \quad \begin{array}{ccc} H^n(M \times M) & \xrightarrow{d^*} & H^n(M) \\ \sigma' \downarrow \approx & & \sigma \downarrow \approx \\ H_n(M \times M) & \xrightarrow{\tilde{d}_*} & H_n(M \times M, M \times M - 'M) \end{array}$$

in cui l'isomorfismo σ' è definito da

$$\sigma'(x) = (\omega_n \times \omega_n) \cap x \quad \text{per } x \in H^n(M \times M).$$

Scegliamo per ogni dimensione p una base $\{\xi_i^p\} (i = 1, \dots, R_p)$ in $H^p(M)$. Rimane così determinata una base duale $\{\eta_j^{n-p}\} (j = 1, \dots, R_{n-p} = R_p)$ in $H^{n-p}(M)$, relativamente all'appaiamento dato dal \cup -prodotto ed alla classe ω^n , in modo che

$$\xi_i^p \cup \eta_j^{n-p} = \delta_{ij} \omega^n$$

L'isomorfismo dato dal prodotto cartesiano

$$\times : \sum_p H^p(M) \otimes_{\Omega} H^{n-p}(M) = H^n(M \times M)$$

ci permette di affermare che

$$(2) \quad \{\xi_i^p \times \eta_j^{n-p}\}_{i,j,p} \quad (i, j = 1, \dots, R_p; p = 0, 1, \dots, n)$$

è una base per $H^n(M \times M)$. Questa si muta mediante σ' in una base per $H_n(M \times M)$ che vogliamo calcolare: poniamo

$$\begin{aligned} x_{n-p}^i &= \omega_n \cap \xi_i^p \in H_{n-p}(M), \\ y_p^j &= \omega_n \cap \eta_j^{n-p} \in H_p(M); \end{aligned}$$

si ha allora

$$\begin{aligned} \sigma'(\xi_i^p \times \eta_j^{n-p}) &= (\omega_n \times \omega_n) \cap (\xi_i^p \times \eta_j^{n-p}) = \\ &= (-1)^{np} (\omega_n \cap \xi_i^p) \times (\omega_n \cap \eta_j^{n-p}) = (-1)^{np} x_{n-p}^i \times y_p^j \end{aligned}$$

e quindi anche

$$(3) \quad \{y_p^i \times x_{n-p}^j\}_{i,j,p} \quad (i, j = 1, \dots, R_p; p = 0, 1, \dots, n)$$

è una base per $H_n(M \times M)$. Si vede subito che le basi (2) e (3) sono duali relativamente all'appaiamento del prodotto scalare; infatti è

$$\begin{aligned} (y_p^r \times x_{n-p}^s) \cdot (\xi_i^p \times \eta_j^{n-p}) &= (-1)^{p(n-p)} (y_p^r \cdot \xi_i^p) (x_{n-p}^s \cdot \eta_j^{n-p}) = \\ &= (-1)^{p(n-p)} [\omega_n \cdot (\eta_r^{n-p} \cup \xi_i^p)] [\omega_n \cdot (\xi_s^p \cup \eta_j^{n-p})] = \\ &= (-1)^{p(n-p)} (-1)^{p(n-p)} \delta_{ri} \delta_{sj} (\omega_n \cdot \omega^n) (\omega_n \cdot \omega^n) = \delta_{ri} \delta_{sj} \end{aligned}$$

mentre è ovviamente per $p \neq q$

$$(y_p^r \times x_{n-p}^s) \cdot (\xi_i^q \times \eta_j^{n-q}) = 0.$$

Poichè gli omomorfismi $d_* : H_n(M) \rightarrow H_n(M \times M)$ e $d^* : H^n(M \times M) \rightarrow H^n(M)$ sono coniugati relativamente al prodotto scalare, si ha

$$d_*(\omega_n) = \sum_{i,p} (y_p^i \times x_{n-p}^i)$$

e, per la simmetria della mappa diagonale

$$(4) \quad d_*(\omega_n) = \sum_{r,p} (-1)^{p(n-p)} (x_{n-p}^r \times y_p^r).$$

Inoltre, per la commutatività di (1) si ha

$$(5) \quad \begin{aligned} \tilde{d}_*(x_{n-p}^j \times y_p^i) &= (-1)^{np} \sigma [d^*(\xi_j^p \times \eta_i^{n-p})] = \\ &= (-1)^{np} \sigma (\xi_j^p \times \eta_i^{n-p}) = (-1)^{np} \delta_{ij} \sigma(\omega_n). \end{aligned}$$

A questo punto osserviamo che le (4) e (5) sussistono qualunque sia la teoria dell'omologia a supporti compatti in virtù dell'isomorfismo naturale. In particolare quindi potremo riferirci all'omologia \mathcal{K} per mappe ponderate nel corpo Ω , come faremo in seguito.

Sia $f: M \rightarrow M$ una mappa ponderata in Ω e $i = \text{id } M$ (identità in M). Possiamo calcolare l'omomorfismo $\mathfrak{L}_{j,i}^*$, composizione di

$$\mathcal{K}_n(M) \xrightarrow{d_*} \mathcal{K}_n(M \times M) \xrightarrow{(f \times i)_*} \mathcal{K}_n(M \times M) \xrightarrow{\tilde{d}_*} \mathcal{K}_n(M \times M, M \times M -' M);$$

per le (4) e (5) si ha

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_{j,i}^*(\omega_n) &= \tilde{d}^*(f \times i)_* d_*(\omega_n) = \\ &= \tilde{d}_*(f \times i)_* \sum_{r,p} (-1)^{p(n-p)} (x_{n-p}^r \times y_p^r) = \\ &= \tilde{d}_* \sum_{r,p} (-1)^{p(n-p)} (f \times i)_* (x_{n-p}^r \times y_p^r) = \\ &= \tilde{d}_* \sum_{r,p} (-1)^{p(n-p)} f_{*n-p}^*(x_{n-p}^r) \times y_p^r = \\ &= \tilde{d}_* \sum_{s,r,p} (-1)^{p(n-p)} [f_{*n-p}]_s' (x_{n-p}^s \times y_p^r) = \\ &= \sum_{s,r,p} (-1)^{p(n-p)} [f_{*n-p}]_s' \tilde{d}_*(x_{n-p}^s \times y_p^r) = \\ &= \sum_{s,r,p} (-1)^{p(n-p)} [f_{*n-p}]_s' (-1)^{np} \delta_{rs} \sigma(\omega_n) = \\ &= \sum_p (-1)^p \text{Tr}(f_{*n-p}) \sigma(\omega_n) \end{aligned}$$

ovvero

$$(6) \quad \mathfrak{L}_{j,i}^*(\omega_n) = (-1)^n \sum (-1)^q \text{Tr}(f_{*q}) \sigma(\omega^n).$$

In particolare se $k: M \rightarrow M$ è una mappa costante univalente dalla (6) si ricava

$$(7) \quad \mathfrak{L}_{k, \sigma}^n(\omega_n) = (-1)^n \text{Tr}(k_{\star_0}) \sigma(\omega^n) = (-1)^n \sigma(\omega^n)$$

ed infine dalle (6) e (7)

$$(8) \quad \mathfrak{L}_{f, \sigma}^n = \sum_q (-1)^q \text{Tr}(f_{\star_q}) \cdot \mathfrak{L}_{k, \sigma}^n$$

Osserviamo che l'omomorfismo

$$\theta_M = \mathfrak{L}_{k, \sigma}^n : \mathcal{K}_n(M) \rightarrow \mathcal{K}_n(M \times M, M \times M - 'M) = \mathcal{D}_n(M)$$

è un isomorfismo indipendente dalla scelta della mappa costante univalente k e il numero di Lefschetz $L(f) = \sum_q (-1)^q \text{Tr} f_{\star_q}$ è relativo al corpo Ω . La (8) si può dunque scrivere

$$(9) \quad \mathfrak{L}_{f, \sigma}^n = L(f) \cdot \theta_M$$

2. - Sia R^n l' n -spazio euclideo, pensato immerso in R^{n+1} mediante l'identificazione del punto corrente $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$ col punto $(x_1, x_2, \dots, x_n, 0) \in R^{n+1}$. Sia inoltre X un sottoinsieme compatto di R^n ed N un intorno chiuso e limitato di X relativamente ad R^n . Supponiamo ancora che esista una retrazione (univalente)

$$\rho : N \rightarrow X.$$

Vale a dire una mappa univalente tale che $\rho(x) = x$ per ogni $x \in X$.

Allora la frontiera di N (in R^n) FrN è un insieme compatto ed è altresì $FrN \cap X = \emptyset$.

Definiamo sull'insieme compatto $X \cup FrN$ la funzione reale (e continua) ψ ponendo

$$\begin{aligned} \psi(x) &= 1 & \text{se} & \quad x \in X \\ \psi(x) &= 0 & \text{se} & \quad x \in FrN. \end{aligned}$$

È noto che è possibile approssimare una funzione continua

reale, su una porzione compatta di R^n uniformemente mediante polinomi nelle coordinate del punto corrente. Perciò, scelto un numero ε positivo e inferiore a $1/2$ e detto P il polinomio approssimante si avrà

$$|\psi(x_1, \dots, x_n) - P(x_1, \dots, x_n)| < \varepsilon \quad \text{in } X \cup FrN$$

da cui

$$P(x_1, \dots, x_n) < \varepsilon \quad \text{su } FrN,$$

$$P(x_1, \dots, x_n) > 1 - \varepsilon \quad \text{su } X.$$

Per quasi ogni valore di c soddisfacente alla $\varepsilon < c < 1 - \varepsilon$, (ciò escluso al più un numero finito di valori di c), l'insieme N_c dei punti $(x_1, \dots, x_n) \in N$ che soddisfano alla disequazione

$$P(x_1, \dots, x_n) \geq c$$

è un intorno di X la cui frontiera (in R^n) è una varietà algebrica (o meglio una porzione isolata di varietà algebrica) priva di singolarità. Infatti, l'insieme dei valori critici di un polinomio è finito. Fissato c tra ε e $1 - \varepsilon$ in modo da evitare detti valori critici consideriamo in R^{n+1} la varietà di equazione

$$P(x_1, \dots, x_n) - x_{n+1}^2 - c = 0.$$

Questa sarà senza singolarità, e così pure la porzione isolata W della stessa che si proietta ortogonalmente su N_c . Diciamo $\pi: W \rightarrow N_c$ la proiezione ortogonale.

Per ogni punto $x \in X \subset \text{int } N_c$, $\pi^{-1}(x)$ è costituito da due punti distinti di W . Se indichiamo con $\alpha(x)$ quello avente la coordinata x_{n+1} positiva, sarà

$$\alpha: X \rightarrow W$$

una immersione. Componendo infine le mappe

$$W \xrightarrow{\pi} N_c \xrightarrow{\text{incl}} N \xrightarrow{e} X$$

si ottiene una mappa (univalente) $\beta: W \rightarrow X$ tale che $\beta\alpha = \text{id } X$.

Le due mappe α e β determinano quindi una retrazione di W su X .

Osserviamo che la varietà W da noi costruita è orientabile e che lo spazio X considerato è un ANR (per spazi metrici compatti) in quanto retratto di una varietà compatta. Viceversa, poichè ogni ANR compatto di dimensione finita X si può immergere in un R^n conveniente e quindi scegliere un intorno compatto che si possa retrarre su X , le considerazioni precedenti ci permettono di enunciare il seguente

TEOREMA 1: *Gli ANR compatti di dimensione finita sono caratterizzati dall'esser retratti di varietà orientabili e differenziabili.*

3. - In questo numero dimostriamo il teorema di Lefschetz per gli ANR compatti di dimensione finita e mappe ponderate con coefficienti in un corpo Ω .

Sia dunque X un ANR finitidimensionale compatto ed

$$f: X \rightarrow X$$

una mappa ponderata in Ω . Segliamo una retrazione

$$X \xrightarrow{\alpha} W \xrightarrow{\beta} X \quad (\beta\alpha = \text{id } X)$$

W essendo varietà compatta orientabile e liscia, α e β univalenti.

Inanzitutto osserviamo che posto

$$F = \alpha\beta: W \rightarrow W$$

e detto $E_f \subset X$ l'insieme dei punti fissi della f ed $E_F \subset W$ quello relativo alla F , la immersione $\alpha: X \rightarrow W$ subordina un omeomorfismo tra E_f ed E_F , talchè l'esser vuoto uno implica lo stesso per l'altro. In altri termini f ed F hanno gli stessi punti fissi a patto d'interpretare α come una inclusione.

Se X è connesso allora tale può suppersi W e, da quanto risulta dalle considerazioni fatte nel secondo dei miei lavori

citati in 1) e dalla 9, si ha che se (la f e quindi) la F è priva di punti fissi, deve essere

$$L(F) = \sum_q (-1)^q \text{Tr} F_{*q} = 0,$$

ma poichè si può scrivere $F = (\alpha f)\beta$, $f = \beta(\alpha f)$ e quindi $F_{*q} = (\alpha f)_{*q}\beta_{*q}$, $f_{*q} = \beta_{*q}(\alpha f)_{*q}$, per proprietà note delle tracce si ha

$$\text{Tr} F_{*q} = \text{Tr}[(\alpha f)_{*q}\beta_{*q}] = \text{Tr}[\beta_{*q}(\alpha f)_{*q}] = \text{Tr} f_{*q}$$

da cui

$$0 = L(F) = L(f).$$

Possiamo dunque affermare il

TEOREMA 2: *Se X è un ANR finitidimensionale compatto ed $f: X \rightarrow X$ una mappa ponderata in un corpo Ω , senza punti fissi, si ha*

$$L(f) = \sum_q (-1)^q \text{Tr} f_{*q} = 0.$$

4. - L'ipotesi di finitezza della dimensione può esser eliminata col sussidio dei seguenti lemmi, la cui dimostrazione verrà data più avanti:

LEMMA I: *Sia X un ANR compatto. Allora, detto, Q^∞ il cubo di Hilbert, esiste un poliedro K e due mappe univalenti $j: X \rightarrow K \times Q^\infty$ e $p: K \times Q^\infty \rightarrow X$ tali che $pj = \text{id } X$. In breve, X può pensarsi un retrato di $K \times Q^\infty$.*

LEMMA II: *Sia Y compatto metrico, $\{i_n\}$ ($n = 1, 2, \dots$) una successione di mappe univalenti di Y in sè convergente uniformemente verso l'identità, ed $F: Y \rightarrow Y$ una mappa ponderata senza punti fissi. Allora per tutti gli n abbastanza grandi, la mappa $i_n F i_n$ è pure senza punti fissi.*

Supponiamo X un qualunque ANR compatto. Il lemma I ci permette di immergere X mediante j nel prodotto $K \times Q^\infty$ e di retrainere questo su X mediante p . Se $f: X \rightarrow X$ è una mappa ponderata in Ω , posto $F = jfp: K \times Q^\infty \rightarrow K \times Q^\infty$, si avrà intanto

$$(10) \quad L(f) = L(F)$$

ed inoltre i punti fissi della f e quelli della F sono i medesimi (o meglio, si corrispondono biunivocamente mediante la j o la p). In particolare supposta la f priva di punti fissi, tale sarà pure la F .

Diciamo ora Q^n una «faccia» n -dimensionale di Q^∞ , $j_n : Q^n \rightarrow Q^\infty$ l'inclusione e $p_n : Q^\infty \rightarrow Q^n$ la proiezione, risulta

$$p_n j_n = \text{id } Q^n, \quad (K \times p_n)(K \times j_n) = \text{id } (K \times Q^n)$$

e posto

$$i_n = (K \times j_n)(K \times p_n) : K \times Q^\infty \rightarrow K \times Q^n$$

sarà $\{i_n\}$ una successione di mappe univalenti convergenti uniformemente verso l'identità in $K \times Q^\infty$.

Ponendo allora

$$F_n = i_n F i_n : K \times Q^\infty \rightarrow K \times Q^n,$$

e poichè (la f e quindi) la F è senza punti fissi, per il lemma II tutte le F_n per n abbastanza grande saranno tali. Ma è anche

$$(11) \quad L(F) = L(F_n)$$

in quanto risulta $i_n \simeq \text{id } (K \times Q^\infty)$. Inoltre essendo

$$F_n = (K \times j_n)\Phi_n(K \times p_n)$$

allorchè si ponga $\Phi_n = (K \times p_n)F_n(K \times j_n)$, sarà altresì

$$(12) \quad L(F_n) = L(\Phi_n)$$

e risultando la Φ_n , al pari della F_n , priva di punti fissi per n abbastanza grande, sarà per tali n

$$(13) \quad L(\Phi_n) = 0$$

e ciò in virtù del Teorema 2. Dalle (10), (11), (12) e (13) segue finalmente

$$L(f) = 0$$

che è quanto si voleva dimostrare.

Dimostrazione del lemma I:

Sia Q^∞ il cubo di Hilbert il cui punto corrente abbia coordinate reali $(x_1, x_2, \dots, x_k, \dots)$ soggette alle limitazioni

$$0 \leq x_k \leq \frac{1}{k}, \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Q^n sia la «faccia» n -dimensionale definita da

$$x_k = 0 \quad \text{per } k > n.$$

Poichè X è un ANR compatto si può immergere in Q^∞ ed un intorno U conveniente (della sua immagine) si potrà retrarre su X . Ma Q^n , al divergere di n «invade» Q^∞ e quindi se n è abbastanza grande U conterrà un intorno (di X) della forma $U^n \times Q_n^\infty$ dove U^n è aperto in Q^n e contiene l'immagine $p(X)$ nella proiezione $p: Q^\infty \rightarrow Q^n$, mentre Q_n^∞ è il «fattore complementare» di Q^n in Q^∞ . A sua volta U^n contiene un intorno poliedrico K di $p(X)$.

Allora l'insieme $K \times Q_n^\infty \subset U$ è un intorno di X retrattile su X . Da ciò l'asserto, quando si osservi che Q_n^∞ è omeomorfo a Q^∞ .

Dimostrazione del lemma II.

Per la compattezza di Y e la sup-semicontinuità del supporto \mathfrak{C}_r risulta che il numero

$$(14) \quad 2\sigma = \inf_{y \in Y} \text{dist}(y, \mathfrak{C}_r(y))$$

è positivo. Per ipotesi, se n è abbastanza grande avremo

$$\text{dist}(y, i_n(y)) < \sigma \quad \text{per ogni } y \in Y$$

se per un tale n esistesse un punto fisso di $i_n \circ F i_n$ si avrebbe

$$x \in \mathfrak{C}_{i_n \circ F i_n}(x)$$

ed essendo

$$\mathfrak{C}_{i_n \circ F i_n}(x) \subset \mathfrak{C}_{i_n} \circ \mathfrak{C}_r \circ \mathfrak{C}_{i_n}(x)$$

si avrebbe, posto $y_n = \mathfrak{C}_{i_n}(x) = i_n(x)$ (i_n è univalente!)

$$\text{dist}(x, y_n) < \sigma$$

$$\text{dist}(x, \mathfrak{C}_f(y_n)) < \sigma$$

da cui

$$\text{dist}(y_n, \mathfrak{C}_f(y_n)) < 2\sigma$$

in contrasto con la (14).

5. - Dimostriamo ora il teorema di Lefschetz per mappe ponderate in un campo d'integrità.

Se A è un anello senza nullifici, esso può esser immerso canonicamente nel corpo Ω delle frazioni. Se A è un A -modulo finitamente generato, la sua estensione covariante

$$A \otimes_A \Omega$$

è uno spazio vettoriale di dimensione finita. Ogni omomorfismo, in virtù del carattere funtoriale della estensione, e in particolare un endomorfismo Φ di A ammette una estensione $\Phi \otimes_A \Omega$. Si dimostra immediatamente che la traccia

$$\text{Tr}(\Phi \otimes_A \Omega)$$

è un elemento intero (che identifichiamo con un elemento di A) e pertanto, attesa la canonicità, potremo definire la traccia di Φ ponendo

$$\text{Tr}(\Phi) = \text{Tr}(\Phi \otimes_A \Omega)$$

In tal modo, acquista significato il numero di Lefschetz $L(f)$ di una mappa $f: X \rightarrow X$ ponderata in A per qualunque ANR compatto X , poichè i gruppi d'omologia

$$\mathcal{H}_n(X; A)$$

sono A -moduli finitamente generati (si noti che X appartiene ad una categoria «unicitaria» per l'omologia).

Resta da far vedere che il teorema di Lefschetz sui punti

fissi conserva la sua validità. A tal uopo osserviamo che ogni mappa ponderata in \mathcal{A} può esser considerata come mappa ponderata in Ω , corpo delle frazioni sul campo d'integrità \mathcal{A} . La prima osservazione, del resto ovvia, è che il supporto minimale \mathfrak{C} , resta inalterato sia che si pensi la f ponderata in \mathcal{A} , oppure in Ω . Ne segue che anche la nozione di « punto fisso » resta inalterata. Inoltre, l'omomorfismo naturale

$$\mathcal{K}_n(X; \mathcal{A}) \otimes_{\mathcal{A}} \Omega \rightarrow \mathcal{K}_n(X; \Omega)$$

è un isomorfismo, come risulta dal teorema dei coefficienti universali, applicabile alla teoria dell'omologia considerata sicuramente almeno per gli ANR compatti. Dalla definizione assunta per la traccia di un endomorfismo di un \mathcal{A} -modulo finitamente generato (e gli $\mathcal{K}_n(X; \mathcal{A})$, nelle circostanze attuali lo sono certamente e per di più sono nulli al di sopra di una certa dimensione!), risulta che se $f: X \rightarrow X$ è una mappa ponderata in \mathcal{A} il numero $L(f) \in \mathcal{A}$ può esser calcolato indifferentemente considerando gli endomorfismi indotti in $\mathcal{K}_n(X; \mathcal{A})$ oppure tramite quelli indotti in $\mathcal{K}_n(X; \Omega)$. Da ciò si può ormai giungere alla conclusione voluta, in modo ovvio.