

RENDICONTI  
*del*  
SEMINARIO MATEMATICO  
*della*  
UNIVERSITÀ DI PADOVA

AUGUST FLORIAN

**Ueberdeckung der Ebene durch Kreise**

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*,  
tome 31 (1961), p. 77-86

<[http://www.numdam.org/item?id=RSMUP\\_1961\\_\\_31\\_\\_77\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1961__31__77_0)>

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1961, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques*  
<http://www.numdam.org/>

## UEBERDECKUNG DER EBENE DURCH KREISE

*Nota (\*) di AUGUST FLORIAN (a Vienna)*

Kürzlich habe ich eine Abschätzung nach oben für die Lagerungsdichte eines Systems inkongruenter Kreise bewiesen <sup>1)</sup>, die von L. Fejes Tóth und J. Molnár vermutet worden war <sup>2)</sup>. In der vorliegenden Arbeit beweisen wir eine Abschätzung nach unten für die Dichte der Überdeckung der Ebene durch ein System von Kreisen von zweierlei Grösse.

Es sei in der euklidischen Ebene ein System abgeschlossener Kreise  $K_i$  mit Radien  $r_i$  so gegeben, dass jeder Punkt der Ebene mindestens einem Kreis des Systems angehört. Die untere Dichte  $\underline{D}$  (Überdeckungsdichte) der Kreismenge ist definiert durch (bezüglich der Bezeichnung siehe <sup>1)</sup> oder <sup>2)</sup>)

$$\underline{D} = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi R^2} \sum_K K_i \quad [K_i = \pi r_i^2].$$

Es sei

$$D(p) = \inf \underline{D}$$

die untere Grenze der Überdeckungsdichten, erstreckt über alle Kreisüberdeckungen gegebener Homogenität  $p = \inf \frac{r_i}{r_j}$  ( $i, j =$

---

(\*) Pervenuta in redazione il 22 dicembre 1960.

Indirizzo dell'A.: Mathematisches Institut, Technische Hochschule, Wien (Austria).

<sup>1)</sup> Rend. Circ. Mat., Palermo. Im Druck.

<sup>2)</sup> Math. Nachrichten, 18, 235, 1958.

$= 1, 2, \dots$ ).  $D(p)$  ist eine in  $0 \leq p \leq 1$  stetige, nicht abnehmende Funktion mit den einzigen bekannten Werten  $D(0) = 1$  und  $D(1) = \frac{2\pi}{\sqrt{27}} = 1,209\dots$  <sup>3)</sup>.

L. Fejes Tóth und J. Molnár vermuteten die Abschätzung <sup>2)</sup>

$$(1) \quad D(p) \geq \tau(p) \equiv \operatorname{Min}_{0 \leq x < 1} \frac{\pi - 2(1 - p^2) \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x + p}}{2 \sqrt{1 - x^2} (x + p)}$$

für  $0 < p \leq 1$ ; Gleichheit besteht ersichtlich für  $p = 1$  und (in der Grenze) für  $p = 0$ .

Wir beweisen hier die folgende schwächere Aussage, die enthalten ist im

*Satz: Das Infimum  $D_1(p)$  der Dichten aller Überdeckungen der euklidischen Ebene durch Systeme von Kreisen von zwei Größen und von der Homogenität  $p > 0$  genügt der Ungleichung*

$$(1') \quad D_1(p) \geq M(p) \equiv \operatorname{Min} \left[ \tau(p), \tau\left(\frac{1}{p}\right) \right].$$

Der Beweis der allgemeineren Vermutung (1) bleibt noch offen.

Andererseits gab J. Molnár <sup>4)</sup> gewisse Kreisüberdeckungen an, wodurch  $D_1(p)$  nach oben abgeschätzt wird. Die beiden Schranken von  $D_1(p)$  unterscheiden sich bei einzelnen Werten  $p$  (etwa  $p = 0,5$  und  $0,25$ ) um weniger als  $10^{-5}$  (s. Anmerkung am Schluss). Unser Satz gibt also, wie auch ein Vergleich der Schranken bei anderen Werten  $p$  zeigt, eine recht scharfe untere Abschätzung für  $D_1(p)$ .

Beweis: In <sup>2)</sup> wird die Ungleichung

$$(2) \quad D(p) \geq t(p)$$

gezeigt mit folgender Definition von  $t(p)$ : Die Mittelpunkte

<sup>3)</sup> L. FEJES TÓTH, *Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum.*, Springer Berlin, 1953, S. 58.

<sup>4)</sup> Ann. Univ. Sci. Bud. II, 33, 1959.

dreier Kreise  $K_i$  mit den Radien  $r_i$  bilden ein Dreieck mit dem Inhalt  $\Delta$  und den Winkeln  $\alpha_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Es ist

$$(3) \quad t(p) = \inf \frac{\alpha_1 r_1^3 + \alpha_2 r_2^3 + \alpha_3 r_3^3}{2\Delta},$$

erstreckt über alle Kreistripel der Homogenität  $\geq p$  mit der Eigenschaft, dass die Kreise mindestens einen gemeinsamen Punkt besitzen. Es genügt dabei vorauszusetzen, dass die Kreise genau einen gemeinsamen Randpunkt, jedoch keinen gemeinsamen inneren Punkt aufweisen (Fig. 1).

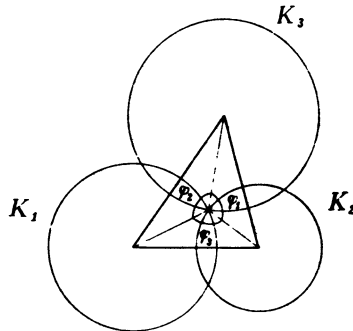


Fig. 1.

Für  $p > 0$  kann man das Infimum in (3) durch das Minimum ersetzen.

Zum Beweis von (1') genügt es zu zeigen, dass

$$(4) \quad t(p) = M(p)$$

ist, unter der Voraussetzung, dass nur Kreise von zwei Größen auftreten. Dabei wird  $\tau(p)$  bzw.  $\tau\left(\frac{1}{p}\right)$  für jedes  $0 < p \leq 1$  nur in einer symmetrischen Lage von zwei kongruenten grossen und einem kleinen Kreis (Fig. 2 a) bzw. von einem grossen und zwei kleinen Kreisen (Fig. 2 b) erreicht, wobei die Homogenität gleich  $p$  ist. Wählt man als Einheit den Radius der gleichen Kreise,

so ist  $x$  der Abstand des gemeinsamen Randpunktes der drei Kreise von der Zentrale der gleichen Kreise.

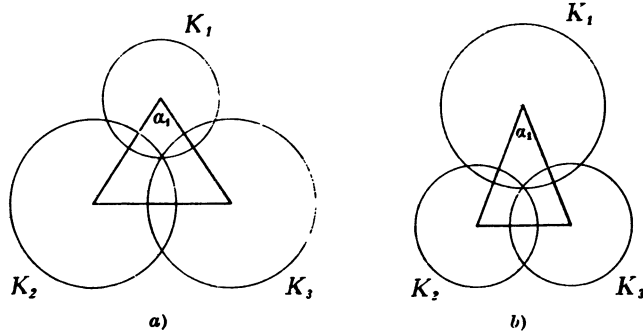


Fig. 2.

Genauere numerische Rechnungen ergeben mit grosser Sicherheit  $\tau(p) < \tau\left(\frac{1}{p}\right)$  für  $0 < p < 1$ .

Wir beweisen zunächst

LEMMA 1: Es sei  $p > 0$  fest; die Funktion

$$f_1(x, p) = \frac{\pi - 2(1 - p^2) \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x + p}}{\sqrt{1 - x^2} (x + p)}$$

erreicht für  $0 \leq x < 1$  an genau einer Stelle  $x$  im Innern dieses Intervalls ihr Minimum. Für

$$\tau(p) = \operatorname{Min}_{0 \leq x < 1} \frac{1}{2} f_1(x, p)$$

gilt

$$(5) \quad \begin{array}{ll} \tau'(p) > 0 & [0 < p < 1], \\ \tau'(p) < 0 & [p > 1]. \end{array}$$

Beweis: Aus

$$(6) \quad \frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{1}{(1-x^2)(x+p)^2} \cdot \left\{ 2(1-p^2)(x+p) \frac{1+px}{(x+p)^2 + (1-x^2)} - \frac{1-px-2x^2}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \left[ \pi - 2(1-p^2) \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x+p} \right] \right\}$$

folgt, dass  $f_1(x, 1)$  sein Minimum für  $x = \frac{1}{2}$  erreicht. Für  $p < 1$ ,  $1 - px - 2x^2 \leq 0$  ist  $\frac{\partial f_1}{\partial x} > 0$ ; gilt  $1 - px - 2x^2 > 0$ , so ergibt sich

$$(7) \quad \frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{2(1-p^2)(1-px-2x^2)}{(1-x^2)^{3/2}(x+p)^2} f_2(x, p),$$

$$f_2(x, p) = \frac{(x+p)(1+px)\sqrt{1-x^2}}{[(x+p)^2 + (1-x^2)](1-px-2x^2)} + \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x+p} - \frac{\pi}{2(1-p^2)}$$

und

$$(8) \quad \frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{\sqrt{1-x^2}(x+p)}{(1-px-2x^2)^2[(x+p)^2 + (1-x^2)]^2} \cdot [2p^3 + 4x + 8p^2x + 14px^2 + 4p^3x^2 + 8p^2x^3] > 0.$$

Setzt man

$$f_2(0, p) = \frac{p}{1+p^2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{p} - \frac{\pi}{2(1-p^2)} \equiv g(p),$$

so ist

$$g'(p) = -\frac{2p^2}{(1+p^2)^2} - \frac{\pi p}{(1-p^2)^2} < 0$$

und

$$\lim_{p \rightarrow 0} g(p) = 0,$$

also

$$(9) \quad f_2(0, p) < 0$$

in  $0 < p < 1$ . Aus (8), (9) und

$$f_2(x_0 - 0, p) = +\infty$$

mit

$$1 - px_0 - 2x_0^2 = 0, \quad x_0 > 0$$

folgt, dass  $f_2(x, p)$  bei festem  $p$  für wachsende  $x$  in  $(0, x_0)$  zuerst  $< 0$ , dann  $> 0$  ist. Daher ist auch für  $0 \leq x < 1$   $\frac{\partial f_1}{\partial x}$  zuerst  $< 0$ , dann  $> 0$ ; also erreicht  $f_1(x, p)$  bei festem  $p$  sein Minimum an genau einer Stelle  $x$  mit  $0 < x < x_0$ . Analog erreicht  $f_1(x, p)$  bei festem  $p > 1$  sein Minimum an genau einer Stelle  $x$  mit  $x_0 < x < 1$ . In beiden Fällen ist für dieses  $x$  natürlich

$$(10) \quad f_2(x, p) = 0.$$

Daraus ergibt sich daher eindeutig

$$x = x(p),$$

also

$$\tau(p) = \frac{1}{2} f_1(x(p), p);$$

somit ist

$$(11) \quad 2\tau'(p) = \frac{\partial f_1}{\partial p} = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}(x+p)^2} g_1(x(p), p)$$

mit

$$(12) \quad g_1(x, p) = (2px + p^2 + 1) \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x+p} + \\ + \frac{(1-p^2)(p+x)\sqrt{1-x^2}}{(x+p)^2 + (1-x^2)} - \frac{\pi}{2}$$

Wir zeigen nun, dass die Gleichungen

$$(13 a) \quad f_2(x, p) = 0$$

$$(13 b) \quad g_1(x, p) = 0$$

für  $0 < p < 1$ ,  $0 < x < x_0$  nicht gleichzeitig bestehen können.

Aus (13 a) folgt nämlich

$$\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x+p} = -\frac{(x+p)(1+px)\sqrt{1-x^2}}{[(x+p)^2+(1-x^2)](1-px-2x^2)} + \frac{\pi}{2(1-p^2)};$$

setzt man dies in (13 b) ein, so ergibt sich

$$(14) \quad g_2(x, p) = (p+x) \cdot \left\{ -2 \frac{(p+x)^2 \sqrt{1-x^2}}{[(x+p)^2+(1-x^2)](1-px-2x^2)} + \frac{\pi p}{1-p^2} \right\} = 0.$$

Benützt man dies, so geht (13 a) über in

$$(15) \quad \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x+p} - \frac{\pi}{2} \frac{x}{x+p} = 0,$$

woraus mit

$$\frac{\sqrt{1-x^2}}{x+p} = \operatorname{tg} \alpha = u$$

folgt

$$(16) \quad x = \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi^2 \operatorname{tg}^2 \alpha + 4\alpha^2}}, \quad p = \frac{\pi - 2\alpha}{\sqrt{\pi^2 \operatorname{tg}^2 \alpha + 4\alpha^2}},$$

wobei  $\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{2}$  gilt. Damit geht  $g_2(x, p)$  über in

$$(17) \quad \varphi(\alpha) = -\frac{\pi}{(\pi u^2 - 2\alpha)[\pi(u^2 - 1) + 4\alpha]} \varphi_1(\alpha),$$

$$(17') \quad \varphi_1(\alpha) = -4\alpha^2 +$$

$$+ \left[ 2\pi(1+u^2) + \frac{8u}{1+u^2} \right] \alpha + \left[ -\pi^2 u^2 + 2\pi \frac{u(u^2-1)}{1+u^2} \right],$$

wobei der Nenner in (17) positiv ist. Weiter findet man

$$(18) \quad \varphi_1'(\alpha) = 4u \frac{\pi(1+u^2)^2 - 4u}{1+u^2} \varphi_2(\alpha),$$

$$(18 a) \quad \varphi_2(\alpha) = \alpha - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi u^3 + \pi u + 2}{\pi(1+u^2)^2 - 4u},$$



$$(18\ b) \quad \varphi_2'(\alpha) = 2[\pi(1 + u^2)^2 - 4u]^{-2} \cdot [\pi^2 u^6 - 12\pi u^5 + \\ + 3\pi^2 u^4 - 20\pi u^3 + (3\pi^2 + 12)u^2 - 8\pi u + \pi^2 + 4].$$

Eine Untersuchung der Ableitungen des zweiten Klammerausdruckes nach absteigenden Ordnungen zeigt (man vgl. die analoge Überlegung im Beweis zu Satz 2 in <sup>1)</sup>), dass er mit wachsendem  $u$  von positiven zu negativen und dann wieder zu positiven Werten übergeht. Da ferner der erste Klammerausdruck in (18 *b*) positiv und

$$\varphi_2\left(\frac{\pi}{6}\right) > 0, \quad \lim_{\alpha \rightarrow (\pi/2)} \varphi_2(\alpha) = 0$$

ist, geht  $\varphi_2(\alpha)$  und daher auch  $\varphi_1'(\alpha)$  mit wachsendem  $\alpha$  von positiven zu negativen Werten über. Wegen  $\varphi_1\left(\frac{\pi}{6}\right) = \lim_{\alpha \rightarrow (\pi/2)} \varphi_1(\alpha) = 0$  ist  $\varphi_1(\alpha) > 0$  und daher  $\varphi(\alpha) < 0$  in  $\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ . Somit ist auch  $g_2(x, p) < 0$ , im Widerspruch zu (14); also sind (13 *a*) und (13 *b*) nicht gleichzeitig erfüllbar. Daraus ergibt sich schliesslich nach (10) und (11), dass  $\tau'(p) \neq 0$  in  $(0,1)$ , also wegen der Stetigkeit entweder stets positiv oder stets negativ ist. Da nun  $\lim_{p \rightarrow 1} \tau(p) = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} > 1$  und  $\lim_{p \rightarrow 0} \tau(p) = 1$  ist, muss in  $(0,1)$  gelten

$$\tau'(p) > 0.$$

Ganz analog zeigt man den zweiten Teil von (5).

**LEMMA 2:** Wir bewegen drei Kreise  $K_i$  mit den festen Radien  $r_1, r_2 = r_3$  so, dass sie stets einen gemeinsamen Randpunkt, aber keinen gemeinsamen inneren Punkt besitzen (Fig. 1).

Die Grösse

$$\delta = \frac{\alpha_1 r_1^2 + \alpha_2 r_2^2 + \alpha_3 r_3^2}{2\Delta}$$

( $\alpha_i$  = Winkel,  $\Delta$  = Flächeninhalt des Mittelpunktdreiecks) er-

reicht ihr Minimum stets in einer symmetrischen Lage der Kreise (Fig. 2 a, b).

Beweis: Wir halten zunächst  $0 < \varphi_1 \leq \pi$  fest. Dann ist mit  $\frac{r_1}{r_2} = p_1$

$$\alpha_1 = \operatorname{arctg} \frac{p_1 - \cos \varphi_2}{\sin \varphi_2} + \operatorname{arctg} \frac{p_1 - \cos \varphi_3}{\sin \varphi_3}$$

und

$$\delta = \frac{\pi + \alpha_1(p_1^2 - 1)}{p_1(\sin \varphi_2 + \sin \varphi_3) + \sin \varphi_1}.$$

Wir untersuchen

$$f(\varphi_2) = [p_1(\sin \varphi_2 + \sin \varphi_3) + \sin \varphi_1](\delta - \tau(p_1))$$

und bilden

$$f'(\varphi_2) = p_1(\cos \varphi_2 - \cos \varphi_3) \cdot \left[ \frac{(1 - p_1^2)^2}{(1 + p_1^2 - 2p_1 \cos \varphi_2)(1 + p_1^2 - 2p_1 \cos \varphi_3)} - \tau(p_1) \right].$$

Wegen  $0 \leq \varphi_2, \varphi_3 \leq \pi$  und  $\varphi_2 + \varphi_3 \geq \pi$  ist

$$\begin{aligned} (1 + p_1^2 - 2p_1 \cos \varphi_2)(1 + p_1^2 - 2p_1 \cos \varphi_3) &\geq \\ &\geq (1 + p_1^2)^2 - 4p_1^2 \cos^2 \varphi_2 \geq (1 - p_1^2)^2, \end{aligned}$$

also der Ausdruck in der eckigen Klammer negativ wegen  $\tau(p_1) > 1$ .

Somit erreicht  $f(\varphi_2)$  sein Minimum für  $\varphi_2 = \varphi_3$ . Mit  $\cos \frac{\varphi_1}{2} = x$  wird aber dann

$$\delta = \frac{1}{2} f_1(x, p_1) \geq \tau(p_1);$$

also gilt stets

$$\delta \geq \tau(p_1)$$

mit Gleichheit nur für  $\varphi_2 = \varphi_3$  bei dem nach Lemma 1 eindeutig bestimmten Winkel  $\varphi_1$ .

Mit Hilfe von Lemma 1 und 2 vervollständigt man sofort

den Beweis von (4) und damit von (1'):

$$t(p) = \underset{\nu \leq \nu_1 \leq 1/p}{\text{Min}} \tau(p_1) = M(p),$$

wobei über das Minimum die Aussage unter (4) gilt.

Anmerkung: J. Molnár fand für einzelne Werte  $p$  Kreisüberdeckungen der Ebene, deren Dichten sich von  $M(p)$  überraschend wenig unterscheiden (4) (S. 39). Da für  $p = 0,5$  und  $p = 0,25$  die Differenz weniger als  $10^{-5}$  beträgt, liegt die Frage nahe, ob die Dichten dieser zwei Überdeckungen mit den Werten  $M(0,5) = \tau(0,5)$  bzw.  $M(0,25) = \tau(0,25)$  und daher auch mit  $D(0,5)$  bzw.  $D(0,25)$  exakt übereinstimmen. Dies wäre genau dann richtig, wie man aus Fig. 5 bzw. 6 in 4) entnimmt, wenn  $\tau(0,5)$  bzw.  $\tau(0,25)$  beim Winkel  $\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$  bzw.  $\alpha_1 = \frac{2\pi}{3}$  einträte (Fig. 2 a). Dies ist jedoch unmöglich, wie man folgendermassen einsieht:

Es sei  $0 < p < 1$  und  $p$  algebraisch. Dann ist der Winkel  $\alpha_1$ , bei dem  $\tau(p)$  erreicht wird, nicht von der Form  $r\pi$  mit rationalem  $r$ .

Wäre nämlich  $\alpha_1 = 2 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x+p} = r \cdot \pi$ , so wäre  $\frac{\sqrt{1-x^2}}{x+p}$  und folglich auch  $x$  algebraisch. Daher hätte nach (7)  $f_2(x, p)$  die Form  $a + b\pi$  mit algebraischen Zahlen  $a \neq 0$  und  $b$ ; es wäre also  $f_2(x, p) \neq 0$ , im Widerspruch zur Bedingung (10) für das Minimum.