RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

CARMELO TOTARO

Impossibilità dinamica per un corpo asimmetrico pesante di precessioni generalizzate regolari non ellittiche con asse di precessione verticale

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 40 (1968), p. 299-310

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1968__40__299_0>

IMPOSSIBILITÀ DINAMICA PER UN CORPO ASIMMETRICO PESANTE DI PRECESSIONI GENERALIZZATE REGOLARI NON ELLITTICHE CON ASSE DI PRECESSIONE VERTICALE *)

CARMELO TOTARO

1. Richiamo brevemente la definizione cinematica dei movimenti [1]) di cui intendo occuparmi.

Sia $\varepsilon = \| \varepsilon_{rs} \|$ $(r, s = 1, 2, 3)$ una matrice di ordine tre ad elementi indipendenti dal tempo, ω la velocità angolare di un corpo rigido $\mathcal{C}$ nel suo moto intorno ad un punto 0 e rispetto ad un riferimento $\mathcal{S}$, $\mathbf{k}$ un versore solidale con $\mathcal{C}$, $\mathbf{c}$ un versore solidale con $\mathcal{S}$, μ e ν due quantità scalari dipendenti, al più, dal tempo.

Si dicono moti di *precessione generalizzata* [1]) tutti e solo quelli per i quali

$$\varepsilon\omega = \nu\mathbf{c} + \mu\mathbf{k}. \tag{1}$$

In particolare, se ν e μ sono indipendenti dal tempo, si dirà che il movimento è una *precessione generalizzata regolare, o brevemente un moto* $\mathcal{P}$. Senza diminuire la generalità le precessioni generalizzate regolari si possono caratterizzare con la condizione

$$\varepsilon\omega = \mathbf{c} + \mathbf{K}, \tag{2}$$

ove $\mathbf{K}$ è un vettore, in generale non unitario, solidale con $\mathcal{C}$.

---

*) Lavoro eseguito nell'ambito del gruppo di ricerca n. 7 del C.N.R..

Indirizzo dell'Autore: Istituto Matematico, Università di Messina.

[1]) G. GRIOLI, *Qualche teorema di cinematica dei moti rigidi*, « Rend. Acc. Naz. dei Lincei », ser. VIII, vol. XXXIV, fasc. 6 (1963).

Nell'insieme dei moti $\mathcal{P}$ esiste il sottoinsieme dei moti $\mathcal{P}_e$ (= precessioni generalizzate regolari ellittiche) che si ottengono imponendo, oltre alla (2), l'ulteriore condizione che l'estremo di 0, $\boldsymbol{\omega}$ descriva, rispetto a $\mathcal{C}$, un'ellisse [2]. In questa nota proverò che *per un corpo pesante asimmetrico* $\mathcal{C}$ *non sono dinamicamente possibili precessioni generalizzate regolari non ellittiche, con asse di precessione verticale.*

2. Le equazioni fondamentali per la determinazione dei movimenti di $\mathcal{C}$ sono

$$(3)\qquad \begin{cases} \sigma\,\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \wedge \sigma\,\boldsymbol{\omega} = OG^* \wedge \mathbf{c} \\ \dot{\mathbf{c}} + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{c} = 0, \end{cases}$$

per le quali valgono questi due integrali primi

$$(4)\qquad \begin{cases} \sigma\,\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{c} = \mathcal{K}_z \\ \sigma\,\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} - 2\mathbf{c} \times OG^* = 2E. \end{cases}$$

In (3) ed in tutto il seguito, $\mathbf{c}$ ha ormai il significato di versore della verticale discendente; σ è l'omografia d'inerzia; OG^* il prodotto del modulo del peso per la coordinata vettoriale OG del baricentro G di $\mathcal{C}$; $\mathcal{K}_z$ la componente costante del momento delle quantità di moto secondo $\mathbf{c}$; E la costante dell'energia.

Si sostituisca la (2) in (3) e (4):

$$(3')\qquad \begin{cases} \sigma\,\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \wedge \sigma\,\boldsymbol{\omega} = OG^* \wedge (\varepsilon\,\boldsymbol{\omega} - \mathbf{K}) \\ \varepsilon\,\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \wedge (\varepsilon\,\boldsymbol{\omega} - \mathbf{K}) = 0 \end{cases}$$

$$(4')\qquad \begin{cases} \sigma\,\boldsymbol{\omega} \times (\varepsilon\,\boldsymbol{\omega} - \mathbf{K}) = \mathcal{K}_z \\ \sigma\,\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} - 2\,(\varepsilon\,\boldsymbol{\omega} - \mathbf{K}) \times OG^* = 2E. \end{cases}$$

---

[2] C. Totaro, *Precessioni generalizzate regolari ellittiche per un solido pesante asimmetrico,* « Rend. del Sem. Mat. dell'Uninersità di Padova » vol. XL (1968).

Dalle (3′), mediante eliminazione di $\dot{\omega}$, si ottiene

$$(5)\qquad \varepsilon\sigma^{-1}\left[\sigma\,\omega \wedge \omega + OG^* \wedge (\varepsilon\,\omega - \mathbf{K})\right] + \omega \wedge (\varepsilon\,\omega - \mathbf{K}) = 0.$$

Sia $\mathcal{T} = 0\xi\eta\zeta$ la terna cartesiana levogira costituita con gli assi principali d'inerzia di $\mathcal{C}$ relativi ad 0 e siano A, B, C $(A < B < C)$ i rispettivi momenti principali d'inerzia.

Con riferimento ai detti assi si ponga

$$(6)\qquad \omega \equiv (p, q, r), \quad \mathbf{K} \equiv (K_1, K_2, K_3), \quad OG^* \equiv (\xi, \eta, \zeta).$$

Poichè le uniche componenti non nulle di σ sono quelle della diagonale principale si ha

$$(7)\qquad \varepsilon\sigma^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{\varepsilon_{11}}{A} & \frac{\varepsilon_{12}}{B} & \frac{\varepsilon_{13}}{C} \\ \frac{\varepsilon_{21}}{A} & \frac{\varepsilon_{22}}{B} & \frac{\varepsilon_{23}}{C} \\ \frac{\varepsilon_{31}}{A} & \frac{\varepsilon_{32}}{B} & \frac{\varepsilon_{33}}{C} \end{vmatrix}.$$

Dopo ciò, è possibile esprimere scalarmente ed in forma più esplicita, la (5) e le (4′), ottenendo così cinque equazioni che risultano essere di secondo grado rispetto a p, q, r.

Nello spazio cartesiano Opqr tali equazioni rappresentano cinque quadriche che, per brevità, si indicheranno con Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5.

Con qualche sviluppo si ottiene:

$$Q_1 \left\{ \begin{aligned} &\varepsilon_{32}q^2 - \varepsilon_{23}r^2 + \\ &+ \left(\frac{B-C}{A}\varepsilon_{11} + \varepsilon_{33} - \varepsilon_{22}\right)qr + \left(\frac{C-A}{B}\varepsilon_{12} - \varepsilon_{21}\right)rp + \left(\frac{A-B}{C}\varepsilon_{13} + \varepsilon_{31}\right)pq + \\ &+ \left[\frac{\varepsilon_{11}(\eta\varepsilon_{31} - \zeta\varepsilon_{21})}{A} + \frac{\varepsilon_{12}(\zeta\varepsilon_{11} - \xi\varepsilon_{31})}{B} + \frac{\varepsilon_{13}(\xi\varepsilon_{21} - \eta\varepsilon_{11})}{C}\right]p + \\ &+ \left[\frac{\varepsilon_{11}(\eta\varepsilon_{32} - \zeta\varepsilon_{22})}{A} + \frac{\varepsilon_{12}(\zeta\varepsilon_{12} - \xi\varepsilon_{32})}{B} + \frac{\varepsilon_{13}(\xi\varepsilon_{22} - \eta\varepsilon_{12})}{C} - K_3\right]q + \\ &+ \left[\frac{\varepsilon_{11}(\eta\varepsilon_{33} - \zeta\varepsilon_{23})}{A} + \frac{\varepsilon_{12}(\zeta\varepsilon_{13} - \xi\varepsilon_{33})}{B} + \frac{\varepsilon_{13}(\xi\varepsilon_{23} - \eta\varepsilon_{13})}{C} + K_2\right]r + \\ &+ \frac{\varepsilon_{11}}{A}(\zeta K_2 - \eta K_3) + \frac{\varepsilon_{12}}{B}(\xi K_3 - \zeta K_1) + \frac{\varepsilon_{13}}{C}(\eta K_1 - \xi K_2) = 0 \end{aligned} \right.$$

$$
Q_2 \left\{
\begin{aligned}
& -\varepsilon_{31} p^2 + \varepsilon_{13} r^2 + \\
& \quad + \left(\frac{B-C}{A}\varepsilon_{21} + \varepsilon_{12}\right) qr + \left(\frac{C-A}{B}\varepsilon_{22} + \varepsilon_{11} - \varepsilon_{33}\right) rp + \left(\frac{A-B}{C}\varepsilon_{23} - \varepsilon_{32}\right) pq + \\
& \quad\quad + \left[\frac{\varepsilon_{21}(\eta\varepsilon_{31} - \zeta\varepsilon_{21})}{A} + \frac{\varepsilon_{22}(\zeta\varepsilon_{11} - \xi\varepsilon_{31})}{B} + \frac{\varepsilon_{23}(\xi\varepsilon_{21} - \eta\varepsilon_{11})}{C} + K_3\right] p + \\
& \quad\quad + \left[\frac{\varepsilon_{21}(\eta\varepsilon_{32} - \zeta\varepsilon_{22})}{A} + \frac{\varepsilon_{22}(\zeta\varepsilon_{12} - \xi\varepsilon_{32})}{B} + \frac{\varepsilon_{23}(\xi\varepsilon_{22} - \eta\varepsilon_{12})}{C}\right] q + \\
& \quad\quad + \left[\frac{\varepsilon_{21}(\eta\varepsilon_{33} - \zeta\varepsilon_{23})}{A} + \frac{\varepsilon_{22}(\zeta\varepsilon_{13} - \xi\varepsilon_{33})}{B} + \frac{\varepsilon_{23}(\xi\varepsilon_{23} - \eta\varepsilon_{13})}{C} - K_1\right] r + \\
& \quad\quad + \frac{\varepsilon_{21}}{A}(\zeta K_2 - \eta K_3) + \frac{\varepsilon_{22}}{B}(\xi K_3 - \zeta K_1) + \frac{\varepsilon_{23}}{C}(\eta K_1 - \xi K_2) = 0
\end{aligned}
\right.
$$

$$
Q_3 \left\{
\begin{aligned}
& \varepsilon_{21} p^2 - \varepsilon_{12} q^2 + \\
& \quad + \left(\frac{B-C}{A}\varepsilon_{31} - \varepsilon_{13}\right) qr + \left(\frac{C-A}{B}\varepsilon_{32} + \varepsilon_{23}\right) rp + \left(\frac{A-B}{C}\varepsilon_{33} + \varepsilon_{22} - \varepsilon_{11}\right) pq + \\
& \quad\quad + \left[\frac{\varepsilon_{31}(\eta\varepsilon_{31} - \zeta\varepsilon_{21})}{A} + \frac{\varepsilon_{32}(\zeta\varepsilon_{11} - \xi\varepsilon_{31})}{B} + \frac{\varepsilon_{33}(\xi\varepsilon_{21} - \eta\varepsilon_{11})}{C} - K_2\right] p + \\
& \quad\quad + \left[\frac{\varepsilon_{31}(\eta\varepsilon_{32} - \zeta\varepsilon_{22})}{A} + \frac{\varepsilon_{32}(\zeta\varepsilon_{12} - \xi\varepsilon_{32})}{B} + \frac{\varepsilon_{33}(\xi\varepsilon_{22} - \eta\varepsilon_{12})}{C} + K_1\right] q + \\
& \quad\quad + \left[\frac{\varepsilon_{31}(\eta\varepsilon_{33} - \zeta\varepsilon_{23})}{A} + \frac{\varepsilon_{32}(\zeta\varepsilon_{13} - \xi\varepsilon_{33})}{B} + \frac{\varepsilon_{33}(\xi\varepsilon_{23} - \eta\varepsilon_{13})}{C}\right] r + \\
& \quad\quad + \frac{\varepsilon_{31}}{A}(\zeta K_2 - \eta K_3) + \frac{\varepsilon_{32}}{B}(\xi K_3 - \zeta K_1) + \frac{\varepsilon_{33}}{C}(\eta K_1 - \xi K_2) = 0
\end{aligned}
\right.
$$

$$
Q_4 \left\{
\begin{aligned}
& A\varepsilon_{11} p^2 + B\varepsilon_{22} q^2 + C\varepsilon_{33} r^2 + (B\varepsilon_{23} + C\varepsilon_{32}) qr + (C\varepsilon_{31} + A\varepsilon_{13}) rp + \\
& \qquad\qquad + (A\varepsilon_{12} + B\varepsilon_{21}) pq - AK_1 p - BK_2 q - CK_3 r - \mathcal{K}_z = 0
\end{aligned}
\right.
$$

$$
Q_5 \left\{
\begin{aligned}
& Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 - \\
& \quad - 2(\varepsilon_{11}\xi + \varepsilon_{21}\eta + \varepsilon_{31}\zeta) p - 2(\varepsilon_{12}\xi + \varepsilon_{22}\eta + \varepsilon_{32}\zeta) q - \\
& \quad - 2(\varepsilon_{13}\xi + \varepsilon_{23}\eta + \varepsilon_{33}\zeta) r + 2(\xi K_1 + \eta K_2 + \zeta K_3) - 2E = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

Si osservi preliminarmente che l'intersezione della Q_5 col piano improprio è una conica immaginaria. La Q_5 è quindi un ellissoide che risulta reale se il suo discriminante è minore di zero, cioè affinchè il problema meccanico abbia soluzioni è necessario che risulti

$$
(8) \qquad 2OG^* \times K < 2E + \\
+ \frac{(\varepsilon_{11}\xi + \varepsilon_{21}\eta + \varepsilon_{31}\zeta)^2}{A} + \frac{(\varepsilon_{12}\xi + \varepsilon_{22}\eta + \varepsilon_{32}\zeta)^2}{B} + \frac{(\varepsilon_{13}\xi + \varepsilon_{23}\eta + \varepsilon_{33}\zeta)^2}{C}.
$$

3. Esistono soluzioni del problema dinamico posto, cioè moti $\mathcal{P}$, se le cinque quadriche Q_i hanno una curva in comune. Tale curva può essere una loro intersezione parziale oppure l'intersezione completa.

L'unico caso, meccanicamente significativo, di intersezione parziale è quello dei moti $\mathcal{P}_e$ di cui mi sono occupato, come ho già detto, in una nota precedente ottenendo movimenti dinamicamente possibili [2]).

Pertanto, il solo caso che resta da studiare è quello in cui le Q_i potrebbero eventualmente avere in comune la loro *intersezione completa* senza escludere a priori, i casi eccezionali di una o più Q_J ($J = 1, 2, 3, 4$) che si riducono a zero per l'annullarsi di tutti i coefficienti.

In questo n. mostrerò che *non esiste* l'intersezione completa di tutte le Q_i e rimando ai nn. successivi di questa nota la considerazione dei casi eccezionali. In altri termini, qui, impongo le condizioni che Q_1, Q_2, Q_3 debbano appartenere al fascio di quadriche individuato da Q_4 e Q_5.

Siano λ_s e μ_s i coefficienti della combinazione lineare $\lambda_s Q_4 + \mu_s Q_5$ che dà luogo al primo membro di Q_s ($s = 1, 2, 3$):

$$
(9) \quad \left\{
\begin{aligned}
&\lambda_s Q_4 + \mu_s Q_5 \equiv \\
&\quad \equiv A(\lambda_s \varepsilon_{11} + \mu_s) p^2 + B(\lambda_s \varepsilon_{22} + \mu_s) q^2 + C(\lambda_s \varepsilon_{33} + \mu_s) r^2 + \\
&+ \lambda_s (B\varepsilon_{23} + C\varepsilon_{32}) qr + \lambda_s (C\varepsilon_{31} + A\varepsilon_{13}) rp + \lambda_s (A\varepsilon_{12} + B\varepsilon_{21}) pq - \\
&- [\lambda_s AK_1 + 2\mu_s(\varepsilon_{11}\xi + \varepsilon_{21}\eta + \varepsilon_{31}\zeta)] p - \\
&- [\lambda_s BK_2 + 2\mu_s(\varepsilon_{12}\xi + \varepsilon_{22}\eta + \varepsilon_{32}\zeta)] q - \\
&- [\lambda_s CK_3 + 2\mu_s(\varepsilon_{13}\xi + \varepsilon_{23}\eta + \varepsilon_{33}\zeta)] r - \\
&- \lambda_s \mathcal{K}_z + 2\mu_s(\xi K_1 + \eta K_2 + \zeta K_3 - E).
\end{aligned}
\right.
$$

Ponendo in (9) $s = 1, 2, 3$ ed identificando con Q_1, Q_2, Q_3 si ottengono trenta condizioni di cui se ne trascrivono solo diciotto perchè le altre non sono essenziali ai fini del ragionamento che segue:

$$(10')\quad\begin{cases} \lambda_1\varepsilon_{11} + \mu_1 = 0, \quad B(\lambda_1\varepsilon_{22} + \mu_1) = \varepsilon_{32}, \quad C(\lambda_1\varepsilon_{33} + \mu_1) = -\varepsilon_{23} \\ \lambda_1(B\varepsilon_{23} + C\varepsilon_{32}) = \dfrac{B-C}{A}\varepsilon_{11} + \varepsilon_{33} - \varepsilon_{22} \\ \lambda_1(C\varepsilon_{31} + A\varepsilon_{13}) = \dfrac{C-A}{B}\varepsilon_{12} - \varepsilon_{21} \\ \lambda_1(A\varepsilon_{12} + B\varepsilon_{21}) = \dfrac{A-B}{C}\varepsilon_{13} + \varepsilon_{31} \end{cases}$$

$$(10'')\quad\begin{cases} A(\lambda_2\varepsilon_{11} + \mu_2) = -\varepsilon_{31}, \quad \lambda_2\varepsilon_{22} + \mu_2 = 0, \quad C(\lambda_2\varepsilon_{33} + \mu_2) = \varepsilon_{13} \\ \lambda_2(B\varepsilon_{23} + C\varepsilon_{32}) = \dfrac{B-C}{A}\varepsilon_{21} + \varepsilon_{12} \\ \lambda_2(C\varepsilon_{31} + A\varepsilon_{13}) = \dfrac{C-A}{B}\varepsilon_{22} + \varepsilon_{11} - \varepsilon_{33} \\ \lambda_2(A\varepsilon_{12} + B\varepsilon_{21}) = \dfrac{A-B}{C}\varepsilon_{23} - \varepsilon_{32} \end{cases}$$

$$(10''')\quad\begin{cases} A(\lambda_3\varepsilon_{11} + \mu_3) = \varepsilon_{21}, \quad B(\lambda_3\varepsilon_{22} + \mu_3) = -\varepsilon_{12}, \quad \lambda_3\varepsilon_{33} + \mu_3 = 0 \\ \lambda_3(B\varepsilon_{23} + C\varepsilon_{32}) = \dfrac{B-C}{A}\varepsilon_{31} - \varepsilon_{13} \\ \lambda_3(C\varepsilon_{31} + A\varepsilon_{13}) = \dfrac{C-A}{B}\varepsilon_{32} + \varepsilon_{23} \\ \lambda_3(A\varepsilon_{12} + B\varepsilon_{21}) = \dfrac{A-B}{C}\varepsilon_{33} + \varepsilon_{22} - \varepsilon_{11} \end{cases}$$

Da $(10'_{1\cdot2\cdot3})$, $(10''_{1\cdot2\cdot3})$ e $(10'''_{1\cdot2\cdot3})$ si ha

$$(11) \quad \begin{cases} \varepsilon_{23} = C\lambda_1 (\varepsilon_{11} - \varepsilon_{33}) & \varepsilon_{32} = B\lambda_1 (\varepsilon_{22} - \varepsilon_{11}) \\ \varepsilon_{31} = A\lambda_2 (\varepsilon_{22} - \varepsilon_{11}) & \varepsilon_{13} = C\lambda_2 (\varepsilon_{33} - \varepsilon_{22}) \\ \varepsilon_{12} = B\lambda_3 (\varepsilon_{33} - \varepsilon_{22}) & \varepsilon_{21} = A\lambda_3 (\varepsilon_{11} - \varepsilon_{33}). \end{cases}$$

Sostituendo le (11) in $(10'_4)$, $(10''_5)$, $(10'''_6)$ segue

$$(12) \quad \begin{cases} (C - B)\,\varepsilon_{11} + A\,(BC\lambda_1^2 + 1)\,\varepsilon_{22} - A\,(BC\lambda_1^2 + 1)\,\varepsilon_{33} = 0 \\ B\,(AC\lambda_2^2 + 1)\,\varepsilon_{11} + (C - A)\,\varepsilon_{22} - B\,(AC\lambda_2^2 + 1)\,\varepsilon_{33} = 0 \\ C\,(AB\lambda_3^2 + 1)\,\varepsilon_{11} - C\,(AB\lambda_3^2 + 1)\,\varepsilon_{22} + (B - A)\,\varepsilon_{33} = 0. \end{cases}$$

Il determinante dei coefficienti del sistema omogeneo (12) è

$$(13) \quad \begin{cases} -ABC\,\{(C - B)\,[ABC\lambda_2^2\lambda_3^2 + C\lambda_2^2 + B\lambda_3^2] - \\ \quad - (C - A)\,[ABC\lambda_3^2\lambda_1^2 + A\lambda_3^2 + C\lambda_1^2] + \\ \quad + (B - A)\,[ABC\lambda_1^2\lambda_2^2 + B\lambda_1^2 + A\lambda_2^2]\}. \end{cases}$$

Per la compatibilità delle (12) occorre e basta che (13) sia nullo. Ciò si può ottenere scegliendo λ_2^2 in modo da soddisfare la seguente equazione

$$(14) \quad \begin{cases} [(C - B)\,C\,(AB\lambda_3^2 + 1) + (B - A)\,A\,(BC\lambda_1^2 + 1)]\,\lambda_2^2 = \\ = (C - A)\,ABC\lambda_3^2\lambda_1^2 + [(C - A)\,A - (C - B)\,B]\,\lambda_3^2 + \\ + [(C - A)\,C - (B - A)\,B]\,\lambda_1^2. \end{cases}$$

Questa equazione in λ_2 ammette sempre radici reali perchè i vari termini, comprese le parentesi quadre al secondo membro, sono tutti maggiori di zero. Tutte le soluzioni di (12) sono proporzionali ai minori complementari del secondo ordine che si possono estrarre dal determinante dei coefficienti; ad esempio, ai minori complementari degli elementi della prima orizzontale:

$$
(15) \qquad \begin{cases} \varepsilon_{11} = \varrho \{ABC[ABC\lambda_2^2\lambda_3^2 + C\lambda_2^2 + B\lambda_3^2] + A\alpha\} \\ \varepsilon_{22} = \varrho \{ABC[ABC\lambda_2^2\lambda_3^2 + \alpha\lambda_2^2 + B\lambda_3^2] + B\alpha\} \\ \varepsilon_{33} = \varrho \{ABC[ABC\lambda_2^2\lambda_3^2 + C\lambda_2^2 + \alpha\lambda_3^2] + C\alpha\}, \end{cases}
$$

ove si è posto $\alpha = -A + B + C$, mentre ϱ è un coefficiente di proporzionalità.

Queste espressioni delle ε_{ss} $(s = 1, 2, 3)$ non possono essere, in nessun caso, nulle perché tutti i termini hanno sempre lo stesso segno. Ciò, in altri termini, equivale ad escludere l'eventualità che la matrice dei coefficienti di (12) possa avere caratteristica minore di 2.

Sostituendo le (15) in (11) si ha

$$
(16) \quad \begin{cases} \varepsilon_{23} = -C(C-A)M_3\lambda_1 & \varepsilon_{32} = B(B-A)M_2\lambda_1 \\ \varepsilon_{31} = A(B-A)M_2\lambda_2 & \varepsilon_{13} = C[(C-A)M_3-(B-A)M_2]\lambda_2 \\ \varepsilon_{12} = B[(C-A)M_3-(B-A)M_2]\lambda_3, & \varepsilon_{21} = -A(C-A)M_3\lambda_3, \end{cases}
$$

ove si è posto

$$
(17) \qquad \begin{cases} M_2 = \varrho\,(ABC\lambda_2^2 + \alpha) \\ M_3 = \varrho\,(ABC\lambda_3^2 + \alpha). \end{cases}
$$

Dal confronto di $(10_4'')$ con $(10_4''')$ e di $(10_5')$ con $(10_5''')$ segue ordinatamente

$$
(18) \qquad \begin{cases} B\,(B-A)\,M_2 - C\,(C-A)\,M_3 = 0 \\ (B-A)\,M_2 - CM_3 = 0. \end{cases}
$$

Poichè il determinante dei coefficienti è diverso da zero l'unica soluzione di (18) è quella identica

$$
(19) \qquad M_2 = M_3 = 0.
$$

Ovviamente le (19) non sono compatibili con valori reali di λ_2 e λ_3 e quindi si conclude che *non è possibile determinare i parametri di cui si dispone per far sì che le cinque quadriche Q_i appartengano ad un medesimo fascio.*

4. In questo n., discuto il caso di Q_1, Q_2, Q_3, identicamente uguali a zero per l'annullarsi di tutti i coefficienti.

Questa ipotesi, con riferimento ai termini quadratici in p, q, r dà:

$$\varepsilon_{32} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{31} = \varepsilon_{13} = \varepsilon_{21} = \varepsilon_{12} = 0. \tag{20}$$

Dopo ciò, dai termini rettangolari in p, q, r, si ha

$$\left\{\begin{aligned} (B - C)\,\varepsilon_{11} - A\,\varepsilon_{22} + A\,\varepsilon_{33} &= 0 \\ B\,\varepsilon_{11} + (C - A)\,\varepsilon_{22} - B\,\varepsilon_{33} &= 0 \\ -C\,\varepsilon_{11} + C\,\varepsilon_{22} + (A - B)\,\varepsilon_{33} &= 0. \end{aligned}\right. \tag{21}$$

L'eventualità che la matrice dei coefficienti di (21) abbia caratteristica minore di 2 non ha interesse. Quindi tutte le soluzioni di (21) sono del tipo

$$\frac{\varepsilon_{11}}{A} = \frac{\varepsilon_{22}}{B} = \frac{\varepsilon_{33}}{C} = \varrho', \tag{22}$$

ove ϱ' è un coefficiente diverso da zero, se si esclude la soluzione identica, non significativa.

Tenendo conto di (20) e (22), dai coefficienti dei termini lineari in p, q, r si ha

$$\left\{\begin{aligned} &B\varrho'^2\zeta + K_3 = 0, \qquad C\varrho'^2\eta + K_2 = 0, \qquad C\varrho'^2\xi + K_1 = 0 \\ &A\varrho'^2\zeta + K_3 = 0, \qquad A\varrho'^2\eta + K_2 = 0, \qquad B\varrho'^2\xi + K_1 = 0. \end{aligned}\right. \tag{23}$$

Queste ultime sei equazioni sono incompatibili con l'asimmetria di $\mathcal{C}$.

Concludo che *non si trovano movimenti $\mathcal{P}$ supponendo nulli tutti i coefficienti di Q_1, Q_2, e Q_3.*

5. Ponendo uguali a zero tutti i coefficienti di Q_1 e Q_2 si trovano sedici equazioni di cui se ne trascrivono solo otto

$$(24') \qquad \begin{cases} \varepsilon_{32} = 0, \qquad \varepsilon_{23} = 0 \\ (B - C)\,\varepsilon_{11} - A\,\varepsilon_{22} + A\,\varepsilon_{33} = 0 \\ (C - A)\,\varepsilon_{12} - B\,\varepsilon_{21} = 0 \end{cases}$$

$$(24'') \qquad \begin{cases} \varepsilon_{31} = 0, \qquad \varepsilon_{13} = 0 \\ B\,\varepsilon_{11} + (C - A)\,\varepsilon_{22} - B\,\varepsilon_{33} = 0 \\ A\,\varepsilon_{12} + (B - C)\,\varepsilon_{21} = 0. \end{cases}$$

Poichè, per l'esistenza di moti $\mathcal{P}$, Q_3 deve coincidere con la combinazione lineare $\lambda_3\,Q_4 + \mu_3\,Q_5$, si hanno altre otto equazioni di cui basta considerare le prime quattro

$$(25) \qquad \begin{cases} A\,(\lambda_3\,\varepsilon_{11} + \mu_3) = \varepsilon_{21}\,, \quad B\,(\lambda_3\,\varepsilon_{22} + \mu_3) = -\,\varepsilon_{12}\,, \quad \lambda_3\,\varepsilon_{33} + \mu_3 = 0 \\ C\,\lambda_3\,(A\,\varepsilon_{12} + B\,\varepsilon_{21}) = -\,C\,\varepsilon_{11} + C\,\varepsilon_{22} + (A - B)\,\varepsilon_{33}\,. \end{cases}$$

Per la compatibilità delle equazioni $(24'_4)$ e $(24''_4)$ dev'essere

$$(26) \qquad C = A + B.$$

Dopo ciò si ha

$$(27) \qquad \varepsilon_{12} = \varepsilon_{21}\,.$$

Da $(24'_2)$ o $(24''_2)$ e da (25_1) e (25_2) combinate con (25_3) segue

$$(28) \qquad \varepsilon_{11} = \frac{1}{B}\,\frac{\varepsilon_{12}}{\lambda_3}\,, \quad \varepsilon_{22} = -\,\frac{1}{A}\,\frac{\varepsilon_{12}}{\lambda_3}\,, \quad \varepsilon_{33} = \left(\frac{1}{B} - \frac{1}{A}\right)\frac{\varepsilon_{12}}{\lambda_3}\,.$$

Sostituendo in (25_4) e tenendo conto che il caso $\varepsilon_{12} = 0$ non ha interesse, si ottiene

$$(29) \qquad C^2\,\lambda_3^2 = -\,4$$

che è assurda.

Pertanto concludo che, *anche se* $\mathcal{C}$ si riduce ad una piastra $(C = A + B)$, nelle condizioni poste $(Q_1 = Q_2 \equiv 0)$, *non sono possibili moti* $\mathcal{P}$ *per il solido pesante asimmetrico.*

6. Nel caso Q_1 identicamente uguale a zero segue:

$$(30)\quad \begin{cases} \varepsilon_{32} = 0, \ \varepsilon_{23} = 0, & \dfrac{B-C}{A}\varepsilon_{11} + \varepsilon_{33} - \varepsilon_{22} = 0 \\ \dfrac{C-A}{B}\varepsilon_{12} - \varepsilon_{21} = 0, & \dfrac{A-B}{C}\varepsilon_{13} + \varepsilon_{31} = 0. \end{cases}$$

Tenendo conto di ($30_{1\cdot2}$) la ($10_4''$) e la ($10_6''$) si semplificano e quindi, associando pure la (30_4), si può scrivere

$$(31)\quad \begin{cases} (C-A)\,\varepsilon_{12} - B\,\varepsilon_{21} = 0 \\ A\ \varepsilon_{12} + (B-C)\,\varepsilon_{21} = 0 \\ A\ \varepsilon_{12} + B\,\varepsilon_{21} = 0. \end{cases}$$

Questo sistema ammette come unica soluzione quella identica:

$$(32)\quad \varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = 0.$$

In modo analogo, da (30_5), ($10_4'''$) e ($10_5'''$), si trova

$$(33)\quad \varepsilon_{13} = \varepsilon_{31} = 0.$$

Successivamente da ($10_{1\cdot2\cdot3}''$), segue

$$(34)\quad \varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = -\frac{\mu_2}{\lambda_2}.$$

Ma tali valori non sono compatibili con ($10_5''$) perchè si ha $\mu_2 = 0$ e quindi tutte le $\varepsilon_{rs} = 0$.

Concludo che anche nel caso della *sola Q_1 identicamente uguale a zero non ci sono moti $\mathcal{P}$ per il corpo $\mathcal{C}$ asimmetrico.*

7. Se si pensa Q_4 identicamente uguale a zero, si trova

$$(35)\quad \begin{cases} \varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = K_1 = K_2 = K_3 = 0, \ \mathcal{K}_z = 0 \\ \varepsilon_{23} = -\dfrac{C}{B}\varepsilon_{32}, \quad \varepsilon_{13} = -\dfrac{C}{A}\varepsilon_{31}, \quad \varepsilon_{12} = -\dfrac{B}{A}\varepsilon_{21}. \end{cases}$$

Supponendo identicamente nulla assieme a Q_4 qualche altra Q_s $(s = 1, 2, 3)$ si riconosce subito che *non si possono ottenere soluzioni del problema dinamico.*

Infine con un procedimento analogo a quello del n. 3 e con calcoli molto più semplici si trova che *non* si possono neppure determinare i parametri disponibili in modo che Q_1, Q_2, Q_3, Q_5 appartengano ad un medesimo fascio di quadriche.

I casi eccezionali considerati, nel n. 4 e seguenti, esauriscono tutti quelli possibili perchè nelle deduzioni non si è mai fatto uso delle disuguaglianze tra i momenti d'inerzia A, B, C.

Manoscritto pervenuto in redazione il 5 marzo 1968.