RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

FRANCA BUSULINI

Contributo sulle proiettività tra due rette in un piano desarguesiano

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 47 (1972), p. 43-55

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1972__47__43_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 47 (1972)

CONTRIBUTO SULLE PROIETTIVITÀ TRA DUE RETTE IN UN PIANO DESARGUESIANO

FRANCA BUSULINI *)

Questa Nota è un seguito della [3]; sono per essa importanti le definizioni ivi date, di asse proiettante e coppia proiettante.

In un piano grafico desarguesiano si chiama proiettività π tra due rette distinte S, S_2 un prodotto di prospettività. È noto che π si può ottenere come prodotto di due prospettività soltanto: $\pi=\lambda\lambda_1$ [7, 4, 5, 6, 2, 3], tali che la retta intermediaria S_1 sia assegnata in modo generico, mentre i centri s, s_1 di λ, λ_1 (centri di proiezione della π) sono vincolati anche dalla scelta di S_1. La retta $A=s\,s_1$ verrà chiamata *asse prioettante* e la coppia di punti della π in cui A sega S, S_2, ove siano distinti, si dirà *coppia proiettante,* in quanto essi si possono assumere come centri di proiezione della π [3].

Supposto il piano desarguesiano non pascaliano, indicheremo, con K il corpo (non commutativo) delle coordinate affini e con H il gruppo moltiplicativo del centro di K; S, S_2 verranno assunti come assi cartesiani X, Y e generalmente S_1 come retta impropria.

La proprietà sopra richiamata $\pi=\lambda\lambda_1$ e la scelta opportuna della retta intermediaria S_1 consentono di pervenire rapidamente all'equazione della proiettività π (P. 1): $y\alpha x+\beta x+y\gamma+\delta=0$. Sarà molto utile l'osservazione, cfr. (3), che i coefficienti di detta equazione sono individuati a meno di un $r\in H$.

Sussistono le seguenti caratterizzazioni della prospettività (PP. 5, 2, 3):

---

*) Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico, Università, Padova.

Lavoro eseguito nell'ambito dei Gruppi di ricerca del Comitato nazionale per la matematica del C.N.R.

C. n. e s. affinchè una proiettività, $\pi = \lambda\lambda_1$ tra due rette distinte X, Y con il punto comune unito, sia una prospettività è che si verifichi una delle seguenti condizioni

(i) *essa abbia almeno una coppia proiettante;*

(ii) *nella rispettiva equazione $\gamma \in H$;*

(iii) *scelto $S_1 = L_\infty$, le ascisse dei centri di proiezione siano congrue mod H.*

Con riferimento agli assi proiettanti si ha (PP. 6, 7):

In ogni proiettività π tra due rette distinte X, Y con il punto comune o unito, l'insieme dei « coefficienti angolari » dei suoi assi proiettanti per o è un sistema laterale di H rispetto al gruppo moltiplicativo di K;

(i) se la π non è una prospettività, gli unici suoi assi proiettanti sono quelli per o;

(ii) se la π è una prospettività, assi proiettanti, oltre quelli per o, sono le congiungenti ogni coppia di punti corrispondenti distinti della π, e questi soltanto.

La P. 14 completa l'indagine sugli assi proiettanti.

Inoltre (P. 10):

Una proiettività tra due rette distinte X, Y con il punto comune o non unito, assumendo $S_1 = L_\infty$ e i centri di proiezione coppia proiettante, ha l'equazione $y = -\delta x^{-1}\alpha^{-1}$, $\delta \neq 0$; e viceversa. Le sue coppie proiettanti sono $s_1 = (r\alpha^{-1}, 0)$, $s = (0, -r^{-1}\delta)$, $r \in H$, e queste soltanto.

Le PP. 12, 13 ci danno le coppie proiettanti di una qualsiasi proiettività tra due rette distinte X, Y con il punto comune non unito, completando il risultato espresso dalle PP. 1, 10, 11, 12 della [3], cfr. p. 52.

1. Sia Σ un piano grafico desarguesiano e non pascaliano. Ricordiamo che:

Due punteggiate di Σ riferite come *sezioni* di uno stesso fascio di rette di centro s si corrispondono nella *prospettività* λ, di *centro* di prospettività s.

Diremo proiettività π tra due rette di Σ una corrispondenza che sia una prospettività o il prodotto di un numero finito qualsiasi di prospettività.

Data una proiettività $\pi = \lambda\lambda_1$ fra due rette S, S_2 di « retta intermediaria » S_1 chiameremo (figg. 1, 2, 3):

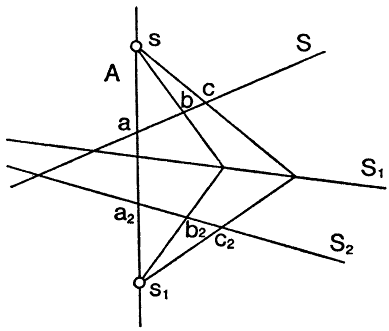

Fig. 1.

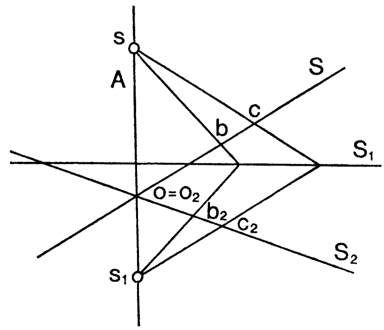

Fig. 2.

1) i punti s, s_1 centri delle λ, λ_1 *centri di proiezione*; ovviamente s, $s_1 \notin S_1$, $s \notin S$, $s_1 \notin S_2$;

2) la retta $A = s\,s_1$ *asse proiettante.*

Rileviamo che l'asse proiettante A sega le rette S, S_2 in una coppia di punti corrispondenti della π. Se in particolare i centri di proiezione sono $s = a_2 \in S_2$ e $s_1 = a \in S$ (quindi $S \neq S_2$) la coppia (a, a_2), dicesi una *coppia proiettante* della π.

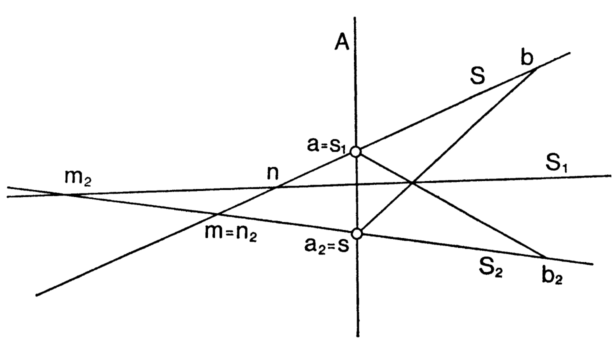

Fig. 3.

Indichiamo con K il corpo (non commutativo) delle coordinate affini e con H il gruppo moltiplicativo del centro di K.

2. Sia π una proiettività tra due rette distinte S, S_2 che assumiamo rispettivamente come assi cartesiani X, Y. È noto che π si può ottenere come prodotto di due prospettività soltanto: $\pi=\lambda\lambda_1$ [7, 4, 5, 6, 2, 3].

Scegliamo la retta impropria L_∞ come retta intermediaria, rimanendo così escluse dalla nostra considerazione le proiettività in cui $(x_\infty\,,\ y_\infty)$ è una coppia di punti corrispondenti.

Poichè, come abbiamo supposto, L_∞ è retta intermediaria, i due centri di proiezione s, s_1 sono punti propri; siano: $s=(a,\ b)$, $s_1=(a_1\,,\ b_1)$, con naturalmente

$$b\neq 0, \qquad a_1\neq 0. \tag{1}$$

Con semplici calcoli si ottiene l'equazione della π:

$$ya_1^{-1}\,x-b_1a_1^{-1}\,x-ya_1^{-1}\,a+b_1a_1^{-1}\,a-b=0, \tag{2}$$

che con le posizioni

$$\alpha=ra_1^{-1}\,, \qquad \beta=-rb_1a_1^{-1}\,, \qquad \gamma=-ra_1^{-1}\,a, \qquad \delta=r(b_1a_1^{-1}\,a-b); \quad r\in H, \tag{3}$$

si scrive

$$y\alpha x+\beta x+y\gamma+\delta=0. \tag{4}$$

Viceversa un'equazione (4) rappresenta una proiettività del tipo della π se essa si può scrivere nella forma (2). Basta perciò invertendo le (3) porre

$$a_1=\alpha^{-1}r, \quad b_1=-\beta\alpha^{-1}, \quad a=-\alpha^{-1}\gamma, \quad b=r^{-1}(\beta\alpha^{-1}\gamma-\delta). \tag{5}$$

Però dovendo la (2) soddisfare alle condizioni (1), la (4) dovrà soddisfare alla condizione

$$\beta\alpha^{-1}\gamma-\delta\neq 0. \tag{6}$$

3. Sia ora π una proiettività tra le due rette distinte X, Y con la coppia di punti corrispondenti (x_∞, y_∞).

Per determinarne l'equazione, la supporremo (come ci è lecito) generata dal prodotto di due prospettività con retta intermediaria S_1 di equazione $\xi = 1$; ne segue che il centro di proiezione s dovrà essere improrio. Siano: $s_\infty = (m)$, $s_1 = (a_1, b_1)$, con naturalmente

(7) $$m \neq 0, \qquad a_1 \neq 0,\ 1.$$

Con semplici calcoli si ottiene l'equazione della π:

(8) $$mx + y(1 - a_1^{-1}) + ba_1^{-1} - m = 0,$$

che con le posizioni

(9) $$\beta = rm, \qquad \gamma = r(1 - a_1^{-1}), \qquad \delta = r(b_1 a_1^{-1} - m); \qquad r \in H,$$

si scrive

(10) $$\beta x + y\gamma + \delta = 0.$$

Viceversa un'equazione (10) rappresenta una proiettività del tipo della π se essa si può scrivere nella forma (8). Basta perciò invertendo le (9) porre

(11) $$\begin{gathered} m = r^{-1}\beta, \qquad a_1 = (1 - r^{-1}\gamma)^{-1}, \\ b_1 = r^{-1}(\beta + \delta)(1 - r^{-1}\gamma)^{-1}; \qquad r \neq \gamma^{-1}. \end{gathered}$$

Però dovendo la (8) soddisfare alle condizioni (7), la (10) dovrà soddisfare alle condizioni

(12) $$\beta,\ \gamma \neq 0.$$

Come conclusione:

P. 1. *Una proiettività fra due rette distinte X, Y è rappresentata da un'equazione* [1]:

$$y\alpha x + \beta x + y\gamma + \delta = 0,$$

con

$$\beta\alpha^{-1}\gamma-\delta\neq 0$$

oppure

$$\alpha=0, \qquad \beta,\ \gamma\neq 0.$$

4. Sia π una prospettività fra le due rette distinte X, Y di centro di prospettività proprio $\bar{s}=(a,\ b)$. Naturalmente

$$a,\ b\neq 0. \tag{13}$$

Con semplici calcoli si ottiene l'equazione della π

$$ya^{-1}x-ba^{-1}x-y=0, \tag{14}$$

che con le posizioni

$$\alpha=ra^{-1}, \qquad \beta=-rba^{-1}, \qquad \gamma=-r; \qquad r\in H, \tag{15}$$

si scrive

$$y\alpha x+\beta x+y\gamma=0; \qquad \gamma\in H. \tag{16}$$

Viceversa si ha per le coordinate di $\bar{s}$

$$a=-\gamma\alpha^{-1}, \qquad b=-\beta\alpha^{-1}; \qquad \gamma\in H. \tag{17}$$

Dovendo la (14) soddisfare alle condizioni (13), la (16) dovrà soddisfare alle condizioni

$$\alpha,\ \beta\neq 0. \tag{18}$$

Se la prospettività ha come centro il punto improprio della retta $\eta=n\xi$, $n\neq 0$, la sua equazione è

$$nx+y=0, \qquad n\neq 0, \tag{19}$$

o più in generale

$$(20) \qquad \beta x + y\gamma = 0, \qquad \gamma \in H, \qquad \beta \neq 0.$$

Viceversa la (20) rappresenta la prospettività di centro improprio $(n) = (\beta\gamma^{-1})$.

Come conclusione:

P. 2. *Una prospettività fra due rette distinte X, Y è rappresentata da un'equazione*

$$y\alpha x + \beta x + y\gamma = 0, \qquad \text{con } \gamma \in H, \qquad \beta \neq 0;$$

e viceversa.

Come conseguenza della P. 2, tenuto conto delle espressioni di γ date dalle (3), (9):

$$\gamma = -r a_1^{-1} a, \qquad \gamma = r(1 - a_1^{-1}),$$

si ha che

P. 3. *C. n. e s. affinchè una proiettività $\pi = \lambda\lambda_1$ fra due rette distinte X, Y con il punto comune unito sia una prospettività è che*

(i) *scelto $S_1 = L_\infty$, le ascisse dei centri di proiezione siano congrue mod H;*

(ii) *se (x_∞, y_∞) è coppia della π, l'ascissa del centro di proiezione proprio appartenga ad H.*

Osservazione. La condizione $\beta \neq 0$ della P. 2 porta in forza delle (3) a $b_1 \neq 0$. Inoltre $\delta = 0$, $b_1 \neq 0 \Rightarrow a_1^{-1} a = b_1^{-1} b$; ne segue con riferimento alla (i) della P. 3: $a_1^{-1} a \in H \Leftrightarrow b_1^{-1} b \in H$.

Come corollario della precedente P. 3, (i) si ha (fig. 4)

P. 4. *Date due rette A, S_1, tre punti o, s, $s_1 \in A$ e $\notin S_1$, due punti u, $v_2 \in S_1$ e $\notin A$, detto x_1 un punto generico di S_1; introdotto sulla retta A un sistema di ascisse di origine o e punto improprio $A \cap S_1$, tutti gli esagoni $s_1\, u\, o\, v_2\, s\, x_1$ sono pascaliani se e solo se le ascisse di s, s_1 sono congrue mod H.*

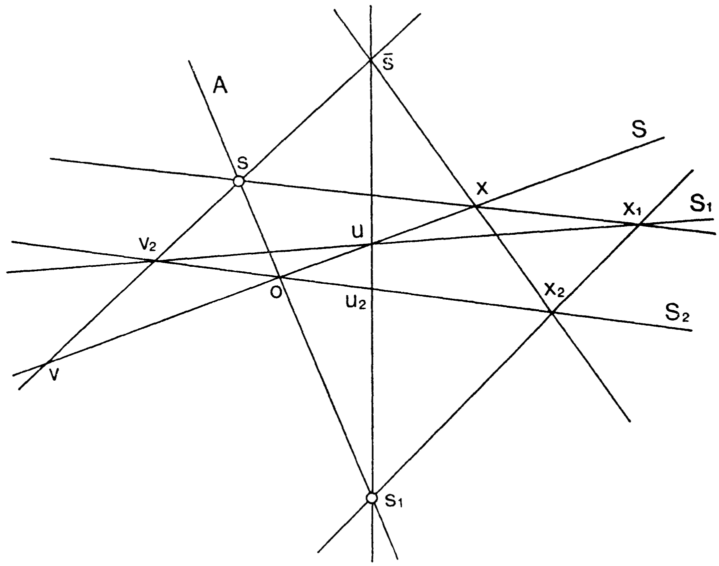

Fig. 4.

Infatti, posto $S=o\,u$, $S_2=o\,v_2$, dire che tutti gli esagoni $s_1\,u\,o\,v_2\,s\,x_1$ sono pascaliani equivale a dire che la π fra S, S_2, generata mediante i centri di proiezione s, s_1 e retta intermediaria S_1, è una prospettività (fig. 4).

Infine da [3, PP. 1, 10], cfr. p. 52, segue

P. 5. *C. n. e s. affinchè una proiettività tra due rette distinte con il punto comune unito sia una prospettività è che essa abbia almeno una coppia proiettante.*

5. Passiamo ora a studiare le proiettività tra due rette distinte con il punto comune unito.

Facciamo dapprima tale ipotesi con riferimento alla π di equazione (2). Detta $\eta=n\xi$ $(n\neq0)$ l'equazione di un asse proiettante per $o=X\cap Y$, risulta $s=(a,\,na)$, $s_1=(n^{-1}b_1\,,\,b_1)$; a, $b_1\neq0$, (abbiamo fissati a e b_1 perchè univocamente determinati dalla equazione della π, cfr. (5)).

Pertanto l'equazione (2) diviene

$$yb_1^{-1}nx - nx - yb_1^{-1}na = 0, \tag{21}$$

cioè $y\alpha x + \beta x + y\gamma = 0$ con

$$\alpha = rb_1^{-1}n, \qquad \beta = -rn, \qquad \gamma = -rb_1^{-1}na; \qquad r \in H. \tag{22}$$

Viceversa

$$n = -r^{-1}\beta, \qquad b_1 = -\beta\alpha^{-1}, \qquad a = -\alpha^{-1}\gamma. \tag{23}$$

L'ipotesi che o è unito facciamola ora nella π di equazione (8). L'equazione di un asse proiettante A per o è $\eta = m\xi$ $(m \neq 0)$, inoltre $s_\infty = (m)$, $s_1 = (a_1, ma_1)$ con $a_1 \neq 0, 1$.

Pertanto l'equazione (8) non presenta variazioni, salvo l'ovvia scomparsa del termine noto.

Tenuto conto delle espressioni dei coefficienti angolari n, m in entrambi i casi considerati, cfr. (23), (11), possiamo concludere con la

P. 6. *In ogni proiettività π tra due rette distinte con il punto comune o unito, l'insieme dei « coefficienti angolari » dei suoi assi proiettanti per o è un sistema laterale di H rispetto al gruppo moltiplicativo di K.*

Questo risultato è particolarmente interessante nel caso delle proiettività tra due rette distinte con il punto comune unito e che non siano prospettività. Come noto [7, 5] esse esistono in un piano desarguesiano e non pascaliano quale è il nostro. Per tali proiettività gli unici assi proiettanti sono quelli per o, come risulta dalla proprietà seguente

P. 7. *In ogni proiettività π tra due rette distinte con il punto comune o unito*

(i) *che non sia una prospettività, gli unici assi proiettanti sono quelli per o;*

(ii) *che sia una prospettività, assi proiettanti, oltre quelli per o, sono le congiungenti ogni coppia di punti corrispondenti distinti della π, e questi soltanto.*

Infatti la P. 6 appena verificata garantisce l'esistenza di assi proiettanti per o. Per proseguire ci richiameremo ad alcune proprietà della Nota [3].

La (i) è vera, giacchè se vi fosse un altro asse proiettante esso segherebbe le due rette distinte secondo una coppia proiettante [3, PP. 6, 7], in contrasto con [3, P. 10].

La (ii) è vera, giacchè in forza della [3, P. 1] ogni retta congiungente una coppia di punti corrispondenti distinti è asse proiettante e, oltre quelli per o, non ve ne sono ovviamente altri.

Le proprietà della Nota 3 intervenute nella dimostrazione sono le seguenti:

P. 1. In una prospettività fra due rette distinte ogni coppia di punti corrispondenti distinti è proiettante.

PP. 6, 7. Ogni proiettività fra due rette distinte è individuata da due coppie di punti corrispondenti e da un asse proiettante non contenente alcuna di queste coppie; in quanto si può scegliere come centri di proiezione della π una coppia di punti generici dell'asse proiettante A, in particolare se $a \neq a_2$ la coppia proiettante (a, a_2), (fig. 3).

P. 10. Le uniche proiettività tra due rette distinte non dotate di coppie proiettanti sono quelle con il punto comune unito, che non siano prospettività.

6. Ogni proiettività tra due rette distinte X, Y con il punto comune o non unito è dotata di coppia proiettante [3, P. 10]. Assumendo questi punti come centri di proiezione, la retta intermediaria $S_1 \not\ni o$ sega X, Y nei corrispondenti di o (fig. 3).

L'equazione di una tale π^* con $S^*_1 = L_\infty$, $s^* = (0, b)$, $s^*_1 = (a_1, 0)$; a_1, $b \neq 0$ è (cfr. (2)): $y a_1^{-1} x - b = 0$, cioè

$$y = b x^{-1} a_1 . \tag{24}$$

Viceversa ogni equazione del tipo della (24) rappresenta una proiettività tra gli assi cartesiani X, Y con la coppia proiettante (s^*_1, s^*) e retta intermediaria L_∞.

Conveniamo di indicare la coppia proiettante (s^*_1, s^*) con (a_1, b). Si ha che

P. 8. *C. n. e s. affinchè*

$$y = bx^{-1}a_1, \qquad y = \bar{b}x^{-1}\bar{a}_1 \tag{25}$$

rappresentino la medesima proiettività tra due rette distinte X, Y è

$$a_1^{-1}\bar{a}_1 = b\bar{b}^{-1} = r \in H. \tag{26}$$

Infatti, la condizione è sufficiente: $\bar{b}x^{-1}\bar{a}_1 = r^{-1}bx^{-1}a_1 r = bx^{-1}a_1$. La condizione è necessaria: se le (25) rappresentano la medesima π^*, allora $a_1^{-1} = r\bar{a}_1^{-1}$, $b = r\bar{b}$; $r \in H$, quindi la tesi.

Come immediato corollario

P. 9. *La (26) è c. n. e s. affinchè (a_1, b) e $(\bar{a}_1, \bar{b})$ siano coppie proiettanti di una proiettività tra due rette con il punto comune non unito* [con riferimento ad un sistema di coordinate avente le due rette come assi cartesiani e la retta impropria come retta intermediaria], [3, PP. 11, 12].

Pertanto

P. 10. *Una proiettività tra due rette distinte X, Y con il punto comune o non unito, assumendo $S_1 = L_\infty$ e i centri di proiezione coppia proiettante, ha l'equazione $y = -\delta x^{-1}\alpha^{-1}$, $\delta \neq 0$; e viceversa. Le sue coppie proiettanti sono $s_1 = (r\alpha^{-1}, 0)$, $s = (0, -r^{-1}\delta)$, $r \in H$, e queste soltanto.*

Si verificano le

P. 11. *C. n. e s. affinchè (x_∞, y_∞) sia coppia proiettante della proiettività tra due rette distinte X, Y di equazione $\beta x + y\gamma + \delta = 0$* (P. 1) *è $\gamma \in H$. In particolare se $\delta = 0$ la proiettività è una prospettività,* PP. 2, 5.

P. 12. *Le coppie proiettanti (a_1, b) della proiettività tra due rette distinte X, Y di equazione $\beta x + y\gamma + \delta = 0$* (P. 1), *$\delta \neq 0$, sono*

$$\text{(i)} \quad \begin{cases} a_1 = -\beta^{-1}\delta(r^{-1}\gamma + 1)^{-1}, \\ b = -r^{-1}\delta(r^{-1}\gamma + 1)^{-1} = \delta\gamma^{-1}[(r^{-1}\gamma + 1)^{-1} - 1], \; r \in H. \end{cases}$$

e queste soltanto.

P. 13. *Le coppie proiettanti* (a_1, b) *della proiettività tra due rette distinte* X, Y *di equazione* $y\alpha x+\beta x+y\gamma+\delta=0$ $(\beta\alpha^{-1}\gamma-\delta\neq 0$, P. 1), $\delta\neq 0$, *sono*

$$\text{(ii)} \begin{cases} a_1=-[(r^{-1}\gamma+1)\delta^{-1}\beta-r^{-1}\alpha]^{-1}, \\ b=-r^{-1}\delta(r^{-1}\gamma+1)^{-1}=\delta\gamma^{-1}[(r^{-1}\gamma+1)^{-1}-1], \quad r\in H, \end{cases}$$

e queste soltanto.

OSSERVAZIONE. Una diversa rappresentazione degli stessi insiemi di coppie proiettanti (i), (ii) si ottiene cambiando r in $-r$.

Abbiamo così completato l'esame delle coppie proiettanti per una qualsiasi proiettività tra due rette distinte X, Y con il punto comune non unito. La P. 10 contiene ovviamente un caso particolare notevole della P. 13.

Le PP. 1, 10 della [3], cfr. p. 52, ci danno l'informazione sulle coppie proiettanti per ogni altra proiettività tra due rette distinte.

Infine è immediato che [3, PP. 6, 7], cfr. p. 52.

P. 14. *Gli assi proiettanti di una proiettività tra due rette distinte con il punto comune non unito sono le congiungenti le sue coppie proiettanti, e questi soltanto.*

Questa proprietà completa l'indagine sugli assi proiettanti di una proiettività tra due rette distinte espressa dalle PP. 6, 7.

BIBLIOGRAFIA

[1] BARLOTTI, A.: *Alcune osservazioni relative ai gruppi di proiettività su di una retta nei piani grafici*, Atti Conv. teoria gruppi finiti, Firenze (1960), pp. 153-154.

[2] BUSULINI, F.: *Geometria dello spazio basata sul concetto di affinità fra rette*, Atti Ist. Ven., t. 121 (1962-63), pp. 341-383.

[3] BUSULINI, F.: *Alcuni nuovi aspetti del teorema fondamentale della geometria proiettiva in un piano desarguesiano*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, t. 41 (1968), pp. 1-11.

[4] HESSEMBERG, G.: *Grundlagen der Geometrie,* Berlin (1930).
[5] PICKERT, G.: *Projective Ebenen,* Springer, Berlin (1955).
[6] ROBINSON, G.: *The foundations of Geometry,* Toronto (1959).
[7] SCHUR, F.: *Grundlagen der Geometrie,* Teubner, Leipzig (1909).

Manoscritto pervenuto in redazione il 24 settembre 1971.