Rendiconti
del
Seminario Matematico
della
Università di Padova

Costantin Nastasescu

La filtrazione di Gabriel - II

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 50 (1973), p. 189-195
<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1973__50__189_0>

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (http://rendiconti.math.unipd.it/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 50 (1973)

La filtrazione di Gabriel - II.

COSTANTIN NASTASESCU (*)

0. Alcune definizioni.

Il presente lavoro continua la ricerca intrapresa in [5]. Siano A un anello commutativo e con unità e Mod A la categoria degli A-moduli unitari.

Si può definire per induzione transfinita su Mod A una filtrazione nel seguente modo: denotiamo con $(\text{Mod } A)_0$ la più piccola categoria localizzante di Mod A [2] contenente tutti gli A-moduli semplici.

(Nel senso di Lambek [4], $(\text{Mod } A)_0$ è la minima teoria della torsione nella quale tutti gli A-moduli semplici sono di torsione).

Se α è un ordinale non limite, allora $(\text{Mod } A)_\alpha$ è la sottocategoria localizzante di Mod A tale che la categoria quoziente $(\text{Mod } A)_\alpha/\text{Mod})_{\alpha-1}$ sia la minima sottocategoria localizzante di $\text{Mod } A/(\text{Mod } A)_{\alpha-1}$ contenente tutti gli oggetti semplici.

Se α è un numero ordinale limite, allora $(\text{Mod } A)_\alpha$ è la più piccola categoria localizzante contenente tutte le sottocategorie $(\text{Mod } A)_\beta$ con $\beta < \alpha$. In questo modo otteniamo una successione transfinita: $(\text{Mod } A)_0 \subseteq \subseteq (\text{Mod } A)_1 \subseteq \ldots \subseteq (\text{Mod } A)_\alpha \subseteq (\text{Mod } A)_{\alpha+1} \subseteq \ldots$ di sottocategorie locallizanti.

È chiaro che, poichè A è un insieme, che esiste un ordinale ξ tale che

$$(\text{Mod } A)_\xi = (\text{Mod } A)_{\xi+1} = \ldots .$$

(*) Indirizzo dell'A.: Universitatea Bucuresti, Facultatea Matematica, Mecanica - Str. Academiei 14 - Romania.

Questo lavoro è stato fatto mentre l'autore usufruiva di una borsa di dircerca per matematici stranieri del C.N.R. presso l'Università di Ferrara.

Se esiste un ordinale α tale $(\mathrm{Mod}\,A)_\alpha = \mathrm{Mod}\,A$ diciamo che l'anello A ha dimensione di Krull *definita*, oppure che A è semi-noetheriano (7).

In tal caso il minimo ordinale α per cui $(\mathrm{Mod}\,A)_\alpha = \mathrm{Mod}\,A$ si chiama la dimensione di Krull di Mod A e lo si denota com $\dim_k A$.

Sia spec A lo spettro primo di A (che noi considereremo senza topologia). In [5] è stata definita su spec A la seguente filtrazione:

$(\mathrm{Spec}\,A)_0$ è l'insieme di tutti gli ideali massimali di A; se α è un ordinale non limite $(\mathrm{Spec}\,A)_\alpha = \{P \mid P \in \mathrm{Spec}\,A;\ \forall Q \in \mathrm{Spec}\,A,\ P \subset Q,\ P \neq Q \Rightarrow Q \in (\mathrm{Spec}\,A)_{\alpha-1}\}$. Se α è un ordinale limite

$$(\mathrm{Spec}\,A)_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} (\mathrm{Spec}\,A)_\beta .$$

È chiaro che esiste un numero ordinale η tale che:

$$(\mathrm{Spec}\,A)_\eta = (\mathrm{Spec}\,A)_{\eta+1} = \dots .$$

Se esiste un ordinale α tale che $(\mathrm{Spec}\,A)_\alpha = \mathrm{Spec}\,A$ si dice [5] che Spec A ha dimensione di Krull definita. In [5] è stato dimostrato che Spec A ha dimensione di Krull definita se e solo se l'anello A verifica la condizione del massimo per gli ideali primi.

1. Risultati preliminari.

Se M è un A-modulo qualunque, denotiamo con $\mathrm{Ass}(M)$ l'insieme.

$$\mathrm{Ass}(M) = \{\boldsymbol{p} \mid \boldsymbol{p} \in \mathrm{Spec}\,A,\ \exists x \in M,\ x \neq 0,\ \boldsymbol{p} = \mathrm{Ann}\,(x)\} .$$

TEOREMA 1.1 [5]. *Siano α un numero ordinale ed M un A-modulo; allora le seguenti affermazioni sono equivalenti*:

1) $M \in (\mathrm{Mod}\,A)_\alpha$;
2) $\mathrm{Ass}\,(M/M') \neq \emptyset$ *e* $\mathrm{Ass}\,(M/M') \subseteq (\mathrm{Spec}\,A)_\alpha$ *per ogni* $M' \subseteq M$, $M' \neq M$.

La dimostrazione è data in [5].

COROLLARIO 1.2 [5]. *Sia A un anello commutativo con unità, allora le seguenti affermazioni sono equivalenti.*

1) *A ha dimensione Krull definita (oppure è semi neotheriano)*;

2) $\mathrm{Ass}(M) \neq \emptyset$ *per ogni* $M \neq 0$ $\mathrm{Spec}\, A$ *ha dimensione Krull definita*;
3) $\mathrm{Ass}(M) \neq \emptyset$ *per ogni* $M \neq 0$ *ed* A *verifica la condizione del massimo per gli ideali primi*;
4) *Per ogni ideale* $\boldsymbol{a} \subset A$, $\boldsymbol{a} \neq A$, *esiste* $x \in A$ *tale che* $\{\boldsymbol{a}: x\}$ *è un ideale primo ed* A *verifica la condizione del massimo per ideali primi.*

La dimostrazione è data in [5].

Ricordiamo che l'anello A ha dimensione di Krull (classica) finita se l'estremo superiore delle lunghezze delle catene di ideali primi è finita.

COROLLARIO 1.3 [5]. *Se* A *è un anello con dimensione Krull finita, allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1) A *ha dimensione Krull definita*;
2) $\mathrm{Ass}(M) \neq \emptyset$ *per ogni* $M \neq 0$, $M \in \mathrm{Mod}\, A$.

COROLLARIO 1.4. *Sia* A *un anello di valutazione di altezza* n [1]. *Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1) *Il gruppo di valutazione* $G \simeq \underbrace{\mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \times \ldots \times \mathbf{Z}}_{n}$ (*ordinato lessicografico*).
2) A *ha dimensione Krull definita.*

DIMOSTRAZIONE. $1) \Rightarrow 2)$. Per $n = 1$ risulta a [5]. Supponiamo la affermazione vera per $n - 1$. Se $\boldsymbol{p}$ è un ideale primo tale che $ht(\boldsymbol{p}) = 1$ allora $A/\boldsymbol{p}$ ha dimensione Krull definita (per induzione) e $A\boldsymbol{p}$ è noetheriano. Quindi $\bigcap_{n \geqslant 1} \boldsymbol{p}^n = 0$. Se $\boldsymbol{a}$ è un ideale $\neq 0$ allora esiste $k \geqslant 1$ tale che $\boldsymbol{a} \supseteq \boldsymbol{p}^k$; da qui segue $\mathrm{Ass}\,(A/\boldsymbol{a}) \neq \emptyset$.

Per corollario 1.2 risulta $1) \Rightarrow 2)$.

$2) \Rightarrow 1)$. Per $n = 1$ risulta a [5]. Sia H il gruppo isolato associato all'ideale $\boldsymbol{p}(ht(\boldsymbol{p}) = 1)$. Poichè $A\boldsymbol{p}$ è discreto [5] allora dalla sequenza esatta:

$$0 \to H \to G \to G/H \simeq \mathbf{Z} \to 0$$

segue $G \simeq \mathbf{Z} \times H$ dove $H \simeq \underbrace{\mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \times \ldots \times \mathbf{Z}}_{n-1}$ (per ipotesi di induzione).

Indichiamo con la F_α la topologia additiva (oppure il sistema topologizzante ed idempotente nel senso di [2]) associata alla sottocategoria localizzante $(\mathrm{Mod}\, A)_\alpha$, cioè

$$F = \{\boldsymbol{a} | \boldsymbol{a} \subseteq A, \ A/\boldsymbol{a} \in (\mathrm{Mod}\, A)_\alpha\}$$

PROPOSIZIONE 1.5. *Sia A un anello commutativo ed $\boldsymbol{a} \subset A$ un ideale; allora le affermazioni che seguono sono equivalenti*:

1) $\boldsymbol{a} \in F_\alpha$;

2) *per ogni ideale $\boldsymbol{b} \subset A$, $\boldsymbol{a} \subseteq \boldsymbol{b}$, esiste un elemento $x \in A$, tale che $(\boldsymbol{b} : x)$ è un ideale primo e*

$$(\boldsymbol{b} : x) \in (\operatorname{Spec} A)_\alpha ;$$

3) *$A/\boldsymbol{a}$ è un anello con dimensione Krull definita e* $\dim_k A/\boldsymbol{a} \leqslant \alpha$.

DIMOSTRAZIONE. 1) $\Rightarrow$ 2) Se $\boldsymbol{b} \subseteq A$; $\boldsymbol{a} \subseteq \boldsymbol{b}$, allora $\boldsymbol{b} \in F_\alpha$; dunque $A/\boldsymbol{b} \in (\operatorname{Mod} A)_\alpha$. Poichè $\operatorname{Ass}(A/\boldsymbol{b}) \neq \emptyset$ esiste un elemento $\hat{x} \in A/\boldsymbol{b}$, tale che $\hat{x} \neq 0$ e $\operatorname{Ann}(\hat{x})$ è un ideale primo. È chiaro che $\operatorname{Ann}(\hat{x}) = (\boldsymbol{b} : x)$ e $(\boldsymbol{b} : x) \in (\operatorname{Spec} A)_\alpha$.

2) $\Rightarrow$ 3) Sia M un $A/\boldsymbol{a}$-modulo, $M \neq 0$; allora M è un A-modulo non-nullo. Consideriamo $m \in M$, $m \neq 0$. È chiaro che $\operatorname{Ann}(m) \supseteq \boldsymbol{a}$ e $\operatorname{Ann}(m) \neq A$. Supponiamo che esista $x \in A$ tale che $\boldsymbol{p} = (\operatorname{Ann}(m) : x)$ sia un ideale primo appartenente a $(\operatorname{Spec} A)_\alpha$.

Essendo $A/\boldsymbol{a} \cdot m \simeq A/\operatorname{Ann}(m)$, allora $\boldsymbol{p} \in \operatorname{Ass} A/\boldsymbol{a}(M)$.

Dal teorema 1.1 e dal Corollario 1.2 segue che $A/\boldsymbol{a}$ è un anello con dimensione di Krull definita e $\dim_k A/\boldsymbol{a} \leqslant \alpha$ 3) $\Rightarrow$ 1) Se ottiene dal teorema 1.1.

Della teorema 1.1. segue:

PROPOSIZIONE 1.6. *Sia $M \in (\operatorname{Mod} A)_{\alpha_0}$, allora esiste una filtrazione $(M_\alpha)_{\alpha \in W}$ indicata con un insieme di numeri ordinali, con le seguenti proprietà*:

1) $$M_0 = \sum_{\substack{x \in M \\ \operatorname{Ann}(x) \text{ primo}}} Ax = \sum_{\substack{x \in M \\ \operatorname{Ann}(x) \in (\operatorname{Spec} A)_{\alpha_0}}} Ax ,$$

2) *Se α è un numero ordinale non limite, allora*

$$M_\alpha / M_{\alpha-1} = \sum_{\substack{x \in M/M_\alpha - 1 \\ \operatorname{Ann}(x) \text{ primo}}} Ax = \sum_{\substack{x \in M/M_\alpha - 1 \\ \operatorname{Ann}(x) \in (\operatorname{Spec} A)_{\alpha_0}}} Ax ,$$

Se α è un numero ordinale limite, allora

$$M_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} M_\beta .$$

3) $$M = \bigcup_{\alpha \in W} M_\alpha .$$

2. La filtrazione di Gabriel associata ad un anello di polinomi.

Sia A un anello commutativo con unità, denotiamo con $A[x_1, \ldots, x_n]$ l'anello di polinomi in n-variabili a coefficienti in A.

Se M è un A-modulo poniamo:

$$M[X_1, X_2, \ldots, X] = M \otimes_A A[X_1, \ldots, X_n] .$$

TEOREMA 2.1. *Siano A un anello commutativo ed $\alpha = \theta + n$, un numero ordinale (θ ordinale limite ed n un numero naturale) Se M è un A-modulo tale che $M \in (\mathrm{Mod}\, A)_\alpha$, allora:*

$$M[x] \in (\mathrm{Mod}\, A[x])_\theta \quad \textit{se} \quad n = 0$$

$$M[x] \in (\mathrm{Mod}\, A[x])_{\theta+k} \quad \textit{dove} \quad n \neq 0, \; n+1 \leqslant k \leqslant 2n+1$$

Se $\alpha = 0$ allora $M \in (\mathrm{Mod}\, A)_0$, quindi M è uno A-modulo semi-artiniano [6] e per il teorema 3.5. di [5], $M[X] \in (\mathrm{Mod}\, A[x])_1$.

Supponiamo che la nostra affermazione vera per ogni numero ordinale $\beta < \alpha$ e dimostriamola per α. Sia $M \in (\mathrm{Mod}\, A)_\alpha$; per la proposizione 1.6., possiamo supporre M della forma $M = A/\boldsymbol{p}$ dove $\boldsymbol{p} \in (\mathrm{Spec}\, A)_\alpha$. Indichiamo con B, l'anello $A/\boldsymbol{p}$ e con K il corpo delle frazioni di B. Se S è l'insieme di tutti elementi non-nulli din B, allora $K = B_s$ e dunque

$$K[X] = (B[X])_s .$$

Abbiamo la sequenza esatta di categorie:

$$(*) \qquad 0 \to \mathcal{A} \to \mathrm{Mod}\, B[X] \to \mathrm{Mod}\, K[X] \to 0$$

dove $\mathrm{Mod}\, K[X]$ è una categoria quoziente dalla $\mathrm{Mod}\, B[X]$ e $\mathcal{A}$ una categoria localizzata dello $\mathrm{Mod}\, B[X]$, cioè:

$$\mathcal{A} = \{M \in M \in \mathrm{Mod}\, B[X], \; \forall x \in M, \, x \neq 0, \; \mathrm{Ann}(x) \cap S \neq \emptyset\} .$$

Sia $M \in \mathcal{A}$ ed $x \in M$, $x \neq 0$, poniamo:

$$\boldsymbol{a} = \mathrm{Ann}(x) \quad \text{e} \quad \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \cap B .$$

Poichè $\boldsymbol{a} \cap S \neq \emptyset$, allora $\boldsymbol{b} \neq 0$ e quindi l'anello $B/\boldsymbol{b}$ è con dimensione Krull definita ed inoltre:

$$\beta = \dim_k B/\boldsymbol{b} < \alpha .$$

Da qui risulta che $B/\boldsymbol{b}[X]$ è un anello con dimensione Krull definita e quindi $B/b[X]$ è un $A[X]$-modulo che appartiene a $(\mathrm{Mod}\, A[X])_{\beta+1}$.

Della sequenza esatta di $A[X]$-moduli

$$B/b[X] \to B[X]/\boldsymbol{a} \to 0$$

otteniamo che $B[X]/\boldsymbol{a} \in (\mathrm{Mod}\, B[X])_{\beta+l}$ e quindi $\mathcal{A} \subseteq (\mathrm{Mod}\, B[X])_{\beta+l}$, cioè $\mathcal{A}$ è una categoria con dimensione Krull definita.

D'altra parte dalla proposizione 1 ([2] chap. IV) e della sequenza esatta $(*)$ si ottiene che l'anello $B[X]$ è con dimensione Krull definita e

$$\dim_k B[X] \leqslant \beta + l + \dim_k K[X] = \beta + l + 2$$

$(K[X]$ essendo un anello principale).

Ora se $n = 0$, allora $\alpha = \theta$ e $\beta + l + 2 < \alpha$ quindi $M[X] = B[X] \in \in (\mathrm{Mod}\, A[X])_\theta$.

Se $n \neq 0$, possiamo supporre che $M = A/p \in (\mathrm{Mod}\, A)_\alpha$ e $M \notin \notin (\mathrm{Mod}\, A)_{\alpha-1}$. In questo caso $\beta \leqslant \alpha - 1 = \theta + n - 1$ Allora per ipotesi $\mathcal{A} \subseteq (\mathrm{Mod}\, A[X])_{\theta+k'}$, dove $n \leqslant k' \leqslant 2n - 1$.

Dalla sequenza esatta $(*)$ e dalla prop 1 ([2], chap IV) risulta che $M[X] = B[X] \in (\mathrm{Mod}\, A[X])_{\theta+k}$, dove $n + 1 \leqslant k \leqslant 2n + 1$.

COROLLARIO 2.2. *Sia A un aχello commutativo, allora le affermazioni che seguono sono equivalenti*:

1) *A ha dimensione Krull definita*;
2) *$A[X_1, \ldots, X_n]$ ha dimensione Krull definita.*

DIMOSTRAZIONE. 1) $\Rightarrow$ 2). Ragionando per induzione su n, basta provare il corollario per $n = 1$.

Poichè A ha dimensione Krull definita, allora esiste un numero ordinale α tale che $\mathrm{Mod}\, A = (\mathrm{Mod}\, A)_\alpha$.

Consideriamo un $A[X]$-Modulo P ed il morfismo

$$\varphi_\alpha\, P[X] \to P$$

così definita

$$\varphi(p \otimes Q(x)) = Q(x) \cdot p \qquad \text{con } p \in P \text{ e } Q(X) \in A[x]$$

è surettivo. D'altra parte $P \in (\mathrm{Mod}\, A)_\alpha$ e per il teorema 2.1., $P[X] \in (\mathrm{Mod}\, A[X])_{\alpha+k}$, pertanto $P \in (\mathrm{Mod}\, A[X])_{\alpha+1}$ (la sottocategoria $(\mathrm{Mod}\, A[X])_{\alpha+k}$ è localizzante). (k nuero naturale, $k \geqslant 0$)

2) $\Rightarrow$ 1). Poichè $A \cong A[X_1, \ldots, X_n]/(X_1, \ldots, X_n)$ allora otteniamo da [5] che A è un anello con dimensione Krull definita.

BIBLIOGRAFIA

[1] N. Bourbaki, *Algèbre commutative*, chap. 6, Paris, Hermann.
[2] P. Gabriel, *Des catègories abéliennes*, Bull. Soc. Math. France, **90** (1962), 323-448.
[3] J. Kaplansky, *Commutative Rings*, Lectures in Mathematics, Chicago.
[4] J. Lambek, *Tonsion theories, Additive semantics and Rings of Quotienst*, Lecture Notes on Math., Springer-Verlag, 177.
[5] C. Nastasescu, *La filtration de Gabriel I*, Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa (in corso di stampa).
[6] C. Nastasescu - N. Popescu, *Anneaux semi-artinien*, Bull. Soc. Math. France, **96** (1968), 357-368.
[7] N. Popescu, *La decomposition primaires des anneaux semi-noetheriens*, Journal of Algebra, **23**, no. 3 (1972).

Manoscritto pervenuto in redazione il 31 gennaio 1973.