

RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

BERT BEISIEGEL

**Eine Charakterisierung einiger einfacher
sporadischer Gruppen**

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 51 (1974), p. 131-165

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1974__51__131_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Eine Charakterisierung einiger einfacher sporadischer Gruppen.

BERT BEISIEGEL (*)

Ziel dieser Arbeit ist der Beweis des folgenden Resultats:

SATZ. *Sei G eine endliche, einfache, nichtabelsche Gruppe mit folgenden Eigenschaften:*

- (1) *Das Zentrum einer Sylow-2-Untergruppe von G ist zyklisch.*
- (2) *Der Zentralisator H einer 2-zentralen Involution ist eine Erweiterung einer normalen 2-Gruppe E mit $|E| \leq 2^7$ durch eine einfache Gruppe, die als Sylow-2-Untergruppe eine Diedergruppe besitzt. Dann ist G isomorph zu einer der folgenden Gruppen:*

$$M_{23}, \quad M_{24}, \quad \text{He}, \quad \text{PSL}(5, 2), \quad J_2, \quad J_3.$$

M_{23} bzw. M_{24} bezeichnet die Mathieu-Gruppe auf 23 bzw. 24 Ziffern, He die von Held entdeckte sporadische Gruppe — Informationen über diese Gruppe findet man in [5] —, J_2, J_3 bezeichnen die Janko-Gruppen, deren Sylow-2-Untergruppen die Ordnung 2^7 haben.

G bezeichne stets eine Gruppe, die die Voraussetzungen des Satzes erfüllt. Die Involution im Zentrum einer fest gewählten Sylow-2-Untergruppe von G nennen wir z_1 . Weiter setzen wir $H = C_G(z_1)$ und $E = O_2(H)$. Ist X eine Teilmenge von H , so bezeichnet \bar{X} das Bild von X unter dem Epimorphismus $H \rightarrow \bar{H} = H/E$, \tilde{X} das Bild von X unter dem Epimorphismus $H \rightarrow \tilde{H} = H/\langle z_1 \rangle$. Ist i eine Invo-

(*) Indirizzo dell'A.: Johannes Gutenberg - Universität, Mathematisches Institut, D-6500 Mainz, Rep. Fed. Tedesca.

lution in H , so bezeichnen wir mit $C_H(i)_2$ eine Sylow-2-Untergruppe von $C_H(i)$.

Die Bezeichnungsweise entspricht im allgemeinen der in [3] vereinbarten. Auf folgende Symbole wird gesondert hingewiesen:

$a \overset{\sim}{\times} b$ ($a \not\overset{\sim}{\times} b$)	Es gibt ein (kein) Element x aus der Gruppe X mit $a^x = b$; gelegentlich wird auch das Symbol $a \overset{x}{\rightarrow} b$ benutzt.
$\Phi(X)$	Frattini-Untergruppe von X .
$\text{Aut } X$	Äußere Automorphismengruppe von X
$ X _2, X _{2'}$	2-bzw. 2'-Anteil der Ordnung von X
$A \Upsilon B$	zentrales Produkt der Gruppen A und B
D_n	Diedergruppe
SD_n	Semidiedergruppe
Z_n	zyklische Gruppe
E_n	elementar-abelsche Gruppe
Q_n	Quaternionen- bzw. verallgemeinerte Quaternionengruppe der Ordnung n

} der Ordnung n

1. Die Struktur von H .

LEMMA 1.1. Es gilt $C_G(E) \subseteq E$.

BEWEIS. In [4] haben D. Gorenstein und J. H. Walter die einfachen Gruppen bestimmt, deren Sylow-2-Untergruppen Diedergruppen sind. Wir unterscheiden die Fälle $\bar{H} = L \cong \text{PSL}(2, q)$, wobei q eine von 9 verschiedene ungerade Primzahlpotenz ist, und $\bar{H} = A$ mit $A \cong A_6$ oder $A \cong A_7$. Natürlich gilt $\langle z_1 \rangle \subseteq E$.

Aus $C_G(E) \not\subseteq E$ folgt $H = E \cdot C_G(E)$. Offenbar ist $C_G(E)$ nicht auflösbar. Sei K das kleinste Glied der Kommutatorreihe von $C_G(E)$. Wegen $\langle 1 \rangle \neq K' = K$ gilt $K \cap E \subseteq K' \cap Z(K)$. Weiter liegt die Isomorphie $K/K \cap E \cong K \cdot E/E = \bar{H}$ vor. Da das Zentrum einer Sylow-2-Untergruppe von G zyklisch ist, erhält man $K \cap E \neq \langle 1 \rangle$. Aus [7, V, Satz 23.5, Beweisteil e] folgt die Existenz eines Epimorphismus des Schur-Multiplikators von H auf $K \cap E$. Dieser hat im Fall $\bar{H} = L$ die Ordnung 2 (siehe z.B. [7, V, Satz 25.7]), im Fall $\bar{H} = A$ die Ordnung 6 (siehe [10 Seite 170]), so daß $K \cap E = \langle z_1 \rangle$ gilt. Sei K_1

eine Untergruppe von H mit $K_1 \cong K$. Die Annahme $K_1 \neq K$ führt zu $K_1 \cap K \triangleleft K_1$, damit zu $|K_1 \cap K| \in \{1, 2\}$, woraus sich der Widerspruch $|K_1 \cdot K| \nmid |H|$ ergibt. Folglich ist K die einzige Untergruppe von H , die zu K isomorph ist. Es gelte $z_1^g \in E$. Dann gilt $K \subseteq C_G(z_1^g)$ und weiter $K^g \subseteq C_G(z_1^g)$. Daraus folgt $g \in N_G(K) \subseteq N_G(Z(K))$. Wegen $Z(K) = \langle z_1 \rangle$ gilt $g \in H$ und z_1 besitzt daher keine G -Konjugierten in $E \setminus \langle z_1 \rangle$. Mit Hilfe eines Resultats von Glauberman [2, Seite 404] folgern wir, daß $z_1 \sim e \cdot k$ mit $e \in E$ und $k \in (T_k \setminus \langle z_1 \rangle)$ gilt, wobei T_k eine Sylow-2-Untergruppe von K bezeichnet.

Im Fall $\bar{H} = L$ gilt $K \cong SL(2, q)$ (siehe [7, V, Satz 25.7]) und daher ist T_k eine Quaternionen- oder eine verallgemeinerte Quaternionengruppe. Dies bleibt auch für den Fall $\bar{H} = A$ richtig. Die Gruppe $Z(T_k)$ ist nämlich zyklisch und enthält $\langle z_1 \rangle$. Wegen $(T_k / \langle z_1 \rangle)' \cong D_8$ gilt $|T_k'| = 4$. Da unter $K / \langle z_1 \rangle$ alle Involutionen in $T_k / \langle z_1 \rangle$ konjugiert sind, ergibt sich $T_k \cong Q_{16}$.

Aus $1 = (e \cdot k)^2 = e^2 \cdot k^2$ folgt $k^2 = z_1$. Man kann \tilde{k} als Element in $Z(T_k / \langle z_1 \rangle)$ wählen. Man berechnet $C_H(e \cdot k)_2 = C_E(e) \cdot C_K(k)_2$ oder

$$C_H(e \cdot k)_2 = C_E(e) \cdot C_K(k)_2 \cdot \langle e_1 k_1 \rangle,$$

wobei $e^{e_1} = e \cdot z_1$ und $k^{k_1} = k \cdot z_1$ gilt. Setze $|C_K(k)_2| = 2^{i+1}$. Sei X eine Untergruppe von $C_G(e \cdot k)$ mit $|X : C_H(e \cdot k)_2| = 2$. Offenbar gilt $\langle z_1 \rangle \subseteq \subseteq \mathcal{C}^i(C_H(e \cdot k)_2) \subseteq E$. Da z_1 keine G -Konjugierten in $E \setminus \langle z_1 \rangle$ besitzt, folgt der Widerspruch $X \subseteq H$, durch den das Lemma bewiesen wird.

LEMMA 1.2. Die Gruppe \bar{H} ist isomorph zu einer der folgenden Gruppen:

- (1) $\text{PSL}(2, 7)$,
- (2) A_5, A_6, A_7 .

BEWEIS. Lemma 1.1 zeigt, daß \bar{H} treu auf $\tilde{E} / \Phi(\tilde{E})$ operiert. Daher ist \bar{H} isomorph zu einer Untergruppe von $\text{GL}(6, 2)$. Aus Ordnungsgründen folgt, daß außer den in der Behauptung angegebenen Gruppen höchstens die Gruppe $\text{PSL}(2, 31)$ auftreten kann. Angenommen, eine Gruppe X , die zu $\text{PSL}(2, 31)$ isomorph ist, operiere treu auf einem 6-dimensionalen Vektorraum V über $\text{GF}(2)$. Es gilt $|X| = 2^5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 31$. Die Menge der maximalen Unterräume von V wird von einem Element der Ordnung 31 aus X in drei Bahnen mit den Längen 31, 31, 1 zerlegt. Deshalb existiert ein maximaler Unterraum V_1 mit $|N_X(V_1)| = 2^5 \cdot 3 \cdot 5$. Setze $N = N_X(V_1)$. Eine Sylow-2-Untergruppe S von N ist Dieder-

gruppe und normalisiert eine Untergruppe $\langle f \rangle$ der Ordnung 5 in N . Wegen $|C_s(f)| \geq 2^3$ gibt es ein Element s der Ordnung 8, das f zentralisiert. Da s auf $C_r(f)$ und auf $[V, f]$ operiert, zentralisiert $s^2 V$, was im Widerspruch zur treuen Operation von X auf V steht.

Die folgenden Lemmata dienen der näheren Bestimmung der Struktur von E im Fall $\bar{H} \cong \text{PSL}(2, 7)$.

LEMMA 1.3. Sei X eine Gruppe der Ordnung 2^6 mit einem Automorphismus s der Ordnung 7. Dann liegt einer der folgenden Fälle vor:

- (1) X ist isomorph zu E_{2^6} oder zu $Z_4 \times Z_4 \times Z_4$ und es gilt $C_X(s) = \langle 1 \rangle$.
- (2) $X = C_X(s) \times [X, s]$, $[X, s] \cong E_8$.
- (3) X ist speziell, $|\Phi(X)| = 8$ und s operiert treu auf $\Phi(X)$.

BEWEIS. Wenn X abelsch ist, gilt $X = C_X(s) \times [X, s]$. Zur Begründung ziehe man z.B. [3, Theorem 5.2.3, Seite 177] heran. Im folgenden gelte daher $X' \neq \langle 1 \rangle$.

Wir zeigen zuerst, daß jede Gruppe Y der Ordnung 2^4 oder 2^5 , die einen Automorphismus s der Ordnung 7 besitzt, abelsch ist, und nehmen dazu $Y' \neq \langle 1 \rangle$ an. Da es keine extraspezielle Gruppe der Ordnung 2^4 gibt, bleibt nur Fall $|Y| = 2^5$ zu betrachten. Falls Y keine charakteristische Untergruppe der Ordnung 2 enthält, sind die Gruppen Y , $Z(Y)$, $\Phi(Y)$ gleich und elementarabelsch der Ordnung 4, was [3, Theorem 5.6.5, Seite 213] widerspricht. Sei Z eine charakteristische Untergruppe von Y mit $|Z| = 2$. Da Y/Z elementarabelsch ist, gilt $Z = Y' = \Phi(Y)$. Die Gruppe Y besitzt $2^4 - 1 = 15$ maximale Untergruppen und s normalisiert eine maximale Untergruppe M , die elementarabelsch ist. Eine Betrachtung der Jordanschen Normalform der Abbildung, die ein Element aus $Y \setminus M$ auf M bewirkt, zeigt $|Z(Y)| \geq 4$. Da s die Kette $\langle 1 \rangle \triangleleft \Phi(Y) \triangleleft Z(Y) \triangleleft M \triangleleft Y$ stabilisiert, folgt der Widerspruch $[Y, s] = \langle 1 \rangle$.

Wir beginnen den Beweis des Lemmas für den Fall $|\Phi(X)| \leq 4$. Die Gruppe X enthält entweder 15 oder 31 maximale Untergruppen und daher normalisiert s eine maximale Untergruppe M . Sei i so als Element der Menge $X \setminus M$ gewählt, daß $[i, s] = 1$ gilt. Man sieht $X = C_X(s) \cdot [M, s]$. Eine Betrachtung der Jordanschen Normalform der Abbildung, die i auf $\Omega_1(M)$ bewirkt, zeigt $Z(X) \cap [M, s] \neq \langle 1 \rangle$ und deshalb $Z(X) \supseteq [M, s]$. Es liegt Fall (2) vor.

Nun gelte $|\Phi(X)| = 8$ und $[\Phi(X), s] = \langle 1 \rangle$. Weiter sei Y eine

nichttriviale charakteristische Untergruppe von X , auf der s treu operiert. Es folgt $|[Y, s]| = 8$ und $[Y, s] \cap \Phi(X) = \langle 1 \rangle$, was zum Widerspruch $X = [Y, s] \cdot \Phi(X)$ führt. Also zentralisiert s jede nichttriviale charakteristische Untergruppe von X . Ein Ergebnis aus [3, Seite 214] zeigt, daß die Gruppe X speziell ist, was [3, Theorem 5.6.5] widerspricht. Somit operiert s treu auf $\Phi(X)$ und es liegt Fall (3) vor.

LEMMA 1.4. Die Gruppe \bar{H} enthalte ein Element \bar{s} der Ordnung 7 und es gelte $|E| = 2^7$. Dann liegt einer der folgenden Fälle vor:

- (1) E ist extraspeziell.
- (2) $E = C \times K$ mit $C = C_x(s)$ und $K = [E, s]$. Die Gruppe K ist isomorph zu E_8 oder zu $Z_4 \times Z_4 \times Z_4$.
- (3) E ist elementar-abelsch, $C_E(s) = \langle z_1 \rangle$.
- (4) $Z(E) = \langle z_1 \rangle$, $\Phi(E) = E' \cong E_{16}$ und s operiert treu auf $Z(E)/\langle z_1 \rangle$.

BEWEIS. Sei $E' \neq \langle 1 \rangle$. Da das Zentrum einer Sylow-2-Untergruppe von G zyklisch ist, gilt $\langle z_1 \rangle \subseteq \Phi(E)$.

Wir beginnen mit dem Fall $\langle z_1 \rangle = E' = \Phi(E)$. Es gilt $\tilde{E} = \tilde{C} \times \tilde{K}$ mit $\tilde{C} = C_{\bar{s}}(\bar{s})$ und $\tilde{K} = [\tilde{E}, \bar{s}]$. Wenn $\tilde{C} = \langle 1 \rangle$ richtig ist, ergibt sich $Z(E) = \langle z_1 \rangle$ oder $|Z(E)| = 2^4$. Im zweiten Fall sei Y ein Komplement von $\langle z_1 \rangle = \Phi(E)$ in der elementar-abelschen Gruppe $Z(E)$. Die Gruppe Y besitzt ein Komplement Y_1 in E , wie man [7, III, Satz 4.4, Seite 278] entnehmen kann. Man erhält $E = Y \times Y_1$ und Y_1 ist extraspeziell der Ordnung 16. Da eine derartige Gruppe nicht existiert, folgt $Z(E) = \langle z_1 \rangle$ und E ist extraspeziell. Nun gelte $|\tilde{C}| = 8$. Mit C bzw. K werden die vollen Urbilder von \tilde{C} bzw. \tilde{K} bezeichnet. Die Gruppe K ist eine normale Untergruppe von $E \cdot \langle s \rangle$. Da in $GL(4, 2) \cong A_8$ jede Untergruppe der Ordnung 7 selbstzentralisierend ist, muß $[C, K] = \langle 1 \rangle$ gelten. Nach Ersetzung von K durch $[K, \bar{s}]$ erhält man Fall (2).

Sei nun $|\Phi(E)| \in \{4, 8\}$. Dann gibt es eine maximale Untergruppe M von E , die von \bar{s} normalisiert wird. Wegen $\langle z_1 \rangle \subseteq \Phi(E) \subseteq M$ gilt $C_M(\bar{s}) \neq \langle 1 \rangle$. Sei zunächst $M = [M, \bar{s}] \times C_M(\bar{s})$ und weiter i als Element der Menge $C_E(\bar{s}) \setminus M$ gewählt. Die Betrachtung der Operation der Gruppe $\langle i, \bar{s} \rangle$ auf $[M, \bar{s}]$ zeigt, daß $[i, [M, \bar{s}]] = \langle 1 \rangle$ und daher $Z(E) \supseteq [M, \bar{s}]$ gilt. Es folgt $E = [E, \bar{s}] \times C_E(\bar{s})$ und wieder liegt Fall (2) vor. Sei jetzt M speziell mit $|\Phi(M)| = 8$. Wegen $\Phi(M) \subseteq \Phi(E)$ folgt aus Ordnungsgründen $\Phi(M) = \Phi(E)$. Lemma 1.3 sagt aus, daß \bar{s} auf M treu operiert. Dies widerspricht der Tatsache $\langle z_1 \rangle \subseteq \Phi(M)$.

Abschließend gelte $|\Phi(E)| = 2^4$. Im Fall $\tilde{E} \cong Z_4 \times Z_4 \times Z_4$ seien x, y, z erzeugende Elemente für die Gruppe E derart, daß $x \xrightarrow{\bar{s}} y \xrightarrow{\bar{s}} z \xrightarrow{\bar{s}} x \cdot z$ gilt. Die Relationen $(x, y) \xrightarrow{\bar{s}} [y, z] \xrightarrow{\bar{s}} [x, z] \xrightarrow{\bar{s}} [x, y] \cdot [z, y]$ führen zu dem Widerspruch $E' = \langle 1 \rangle$. Nun zeigt Lemma 1.3, angewandt für $X = E/\langle z_1 \rangle$, daß \bar{s} treu auf $\Phi(E) = E'$ operiert. Wir folgern $Z(E) = \langle z_1 \rangle$ oder $Z(E) = \Phi(E)$. In zweiten Fall ist die Gruppe $E' = Z(E)$ elementar-abelsch der Ordnung 16 und wird mit drei Elementen erzeugt. Dieser Widerspruch beendet den Beweis des lemmas.

LEMMA 1.5. Falls \bar{H} zu $\text{PSL}(2, 7)$ isomorph ist, so liegt einer der folgenden Fälle vor:

- (1) E ist extraspeziell.
- (2) E ist nicht elementar-abelsch, $E = C \times K$, $K = [E, \bar{s}] \subseteq E_8$ und die möglichen Isomorphietypen von $C = C_E(\bar{s})$ sind:
 - (a) $Z_4, Z_8, Z_{16}, Z_4 \times Z_2 \times Z_2$,
 - (b) Q_8, D_8 ,
 - (c) nichtabelsche Gruppen der Ordnung 16 mit Elementen der Ordnung 8
 - (d) $D_8 \wr Z_4$.
- (3) E ist elementar-abelsch und es gilt
 - (a) $|E| \in \{2^4, 2^7\}$ und $C_E(\bar{s}) = \langle z_1 \rangle$ oder
 - (b) $|E| = 2^6$ und $|C_E(\bar{s})t| = 8$.

Dabei hat \bar{s} dieselbe Bedeutung wie in Lemma 1.4.

BEWEIS. Zuerst soll Fall (4) aus Lemma 1.4 ausgeschlossen werden. Man wählt ein Element \bar{d} der Ordnung 3 aus \bar{H} so, daß $|\langle \bar{d}, \bar{s} \rangle| = 21$ gilt. Wir nehmen die Existenz einer Involution \bar{i} in $\tilde{E} \setminus Z(\tilde{E})$ an. Die Nebenklasse $\bar{i} \cdot Z(\tilde{E})$ enthält dann nur Involutionen. Da \bar{s} die nicht-trivialen Nebenklassen von $Z(\tilde{E})$ transitiv vertauscht, folgt als Widerspruch, daß \tilde{E} elementar-abelsch ist. Damit enthält die Menge $\tilde{E} \setminus Z(\tilde{E})$ nur Elemente der Ordnung 4. Nach Wahl einer geeigneten Basis $\{\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3\}$ von $\tilde{E}/\Phi(\tilde{E})$ gilt

$$\bar{s} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Seien \tilde{x}_i die Urbilder von \tilde{x}_i in \tilde{E} . Wir definieren $\tilde{e}_i = \tilde{x}_i^2$. Dann ist $\{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3\}$ eine Basis von \tilde{E}' , weil andernfalls \bar{s} eine Vierergruppe in \tilde{E} zentralisieren würde. Es ergeben sich die folgenden Relationen: $\tilde{e}_1 \xrightarrow{\bar{s}} \tilde{e}_2 \xrightarrow{\bar{s}} \tilde{e}_3 \xrightarrow{\bar{s}} \tilde{e}_1 \tilde{e}_3 \cdot [\tilde{x}_1, \tilde{x}_3]$ und $[\tilde{x}_1, \tilde{x}_3] = \tilde{e}^\alpha \tilde{e}^\beta \tilde{e}^\gamma$. Bezogen auf die Basis $\{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3\}$ erhält man folgende Operation von \bar{s} :

$$\bar{s} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 + \alpha & \beta & 1 + \gamma \end{bmatrix}.$$

Es muß die Gleichung $\alpha = 0$ gelten. Aus [3, Aufgabe 19, Seite 215] folgt $\beta = \gamma = 1$. Wir nehmen an, daß \bar{d} folgendermaßen auf $\tilde{E}/\Phi(\tilde{E})$ operiert:

$$\bar{d} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ein Vergleich der zu \bar{s} bzw. \bar{d} gehörenden Matrizen zeigt, daß $\bar{s} \xrightarrow{\bar{a}} \bar{s}^2$ gilt. Unter Beachtung von $[\bar{d}, \tilde{x}_1] = [\bar{d}, \tilde{e}_1] = 1$ ergibt sich als Operation von \bar{d} auf $\Phi(\tilde{E})$:

$$\bar{d} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Wir rechnen in E weiter und definieren die Matrix $A = (a_{ij})$ durch $[x_i, e_j] = z_1^{a_{ij}}$. Die Relation $[x_1, e_2] \xrightarrow{\bar{s}} [x_2, e_3] \xrightarrow{\bar{s}} [x_3, e_1 e_2]$ führt zu der Gleichung $a_{12} = a_{23} = a_{31} + a_{32} =: a$. Aus $[x_1, e_3] \xrightarrow{\bar{s}} [x_2, e_1 e_2]$ und $[x_2, e_1] \xrightarrow{\bar{s}} [x_3, e_2]$ erhalten wir $a_{13} = a_{21} = a_{32} = b$ und damit

$$A \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ b & 0 & a \\ a + b & b & 0 \end{bmatrix}.$$

Aus $[x_1, e_2] \xrightarrow{\bar{a}} [x_1, e_3] \xrightarrow{\bar{a}} [x_1, e_2 e_3]$ folgt die Gleichung $a = b = a + b = 0$ und somit der Widerspruch $Z(E) = \Phi(E)$.

Wir untersuchen nun den Fall, in dem $E = C_{\bar{x}}(\bar{s}) \times [E, \bar{s}]$ gilt. Der Fall $[E, \bar{s}] \cong Z_4 \times Z_4 \times Z_4$ kann nicht eintreten, weil sonst $|E| = 2^7$

gilt und \bar{H} auf $\mathcal{O}^1(E)$ operiert, einer Gruppe, die $\langle z_1 \rangle$ nicht enthält. Es folgt die Isomorphie $[E, \bar{s}] \cong E_8$. Wir setzen $Z = \Omega_1(Z(E))$ und wollen $|Z| \notin \{2^5, 2^7\}$ nachweisen. Dazu sei \bar{d} als Element der Ordnung 3 in \bar{H} so gewählt, daß $\langle \bar{s} \rangle^{\bar{d}} = \langle \bar{s} \rangle$ gilt. Außerdem sei $\{\pi, \tau, \tau'\}$ eine Basis von K mit $[\pi, \bar{d}] = 1$ und $[K, \bar{d}] = \langle \tau, \tau' \rangle$. Sei \bar{j} eine Involution in \bar{H} mit $\bar{d} \xrightarrow{\bar{j}} \bar{d}^{-1}$. Da das Zentrum einer Sylow-2-Untergruppe von G zyklisch ist, folgt

- (i) \bar{H} operiert auf keiner Untergruppe von Z , die $\langle z_1 \rangle$ nicht enthält.
- (ii) \bar{j} operiert auf keiner Vierergruppe in $Z(C)$.

Sei $|Z| = 2^5$ und $\Omega_1(C) = \langle z_1, z_2 \rangle$. Aus (ii) folgt $[z_2, \bar{j}] \neq 1$. Wegen (i) gilt $[\pi, \bar{j}] \neq 1$. Da \bar{j} auf $\Omega_1(E) \cap C(\bar{d}) = \langle z_1, z_2, \pi \rangle$ operiert, also einen Fixpunkt in $\langle z_2, \pi \rangle^\#$ besitzt, erhalten wir $(z_2 \pi)^{\bar{j}} = z_2 \pi$. Die Annahme $\pi^{\bar{j}} = z_1 \pi$ bringt $z_2^{\bar{j}} = z_2 \pi \pi^{\bar{j}} = z_1 z_2$, mit (ii) folglich einen Widerspruch. Da \bar{H} auf der Gruppe $\langle \pi, \pi^{\bar{j}} \rangle \times \langle \tau, \tau' \rangle$ operiert, ergibt sich ein Widerspruch zu (i). Nun gelte $|Z| = 2^7$ und $C = \langle z_1, z_2, z_3, z_4 \rangle$. Im Fall $[C, \bar{d}] = \langle 1 \rangle$ operiert \bar{j} auf $C \times \langle \pi \rangle$ und es folgt ein Widerspruch zu (ii). Im verbleibenden Fall $C_2(\bar{d}) = \langle z_1, z_2, \pi \rangle$ erhält man denselben Widerspruch wie oben.

Wenn E eine Ordnung kleiner als 2^6 hat, so ist E abelsch, wie im Beweis von Lemma 1.3 gezeigt wurde. Es liegt daher entweder Fall (2) (a), wobei $C \cong Z_4$ gilt, oder Fall (3)(a) vor.

Ist die Ordnung von E 2^6 , so kann nur die zweite der in Lemma 1.3 angegebenen Möglichkeiten auftreten. Wir erhalten die Fälle (2)(a), wobei $C \cong Z_8$ gilt, (2)(b) und (3)(b).

Abschließend gelte $|E| = 2^7$. Wir wenden Lemma 1.4 an und haben noch die Einschränkung der dort unter (2) angegebenen Möglichkeiten zu begründen. Ist C nichtabelsche Gruppe der Ordnung 16 ohne Elemente der Ordnung 8, so muß C , weil $Z(C)$ keine Vierergruppe ist, isomorph sein zu $D_8 \wr Z_2$, wie man [7, Seite 349] entnehmen kann.

Die abschließenden Lemmata diese Paragraphen bestimmen die Struktur von E in den Fällen $\bar{H} \cong A_5$, $\bar{H} \cong A_6$ und $\bar{H} \cong A_7$.

Lemma 1.6. Sei X eine Gruppe der Ordnung 2^6 mit einem Automorphismus f der Ordnung 5. Dann liegt einer der folgenden Fälle vor:

- (1) $X = [X, f] \times C_X(f)$, $[X, f] \cong E_{16}$.
- (2) $X = [X, f] \cdot Z(X)$, $[X, f] \cong D_8 \wr Q_8$, $[Z(X), f] = \langle 1 \rangle$.
- (3) X ist speziell, $|\Phi(X)| = 4$.

BEWEIS. Sei M eine nichttriviale Untergruppe von X , auf der f treu operiert. M ist entweder elementar-abelsch oder extraspeziell der Ordnung 2^5 . Im Fall $M \cong D_8 \wr D_8$ enthält M genau 19 Involutionen, was zum Widerspruch $[M, f] = \langle 1 \rangle$ führt.

Wir dürfen $X' \neq \langle 1 \rangle$ annehmen. Sei $|\Phi(X)| = 2$, so daß f auf einer maximalen Untergruppe M von X operiert. Im Fall $M' = \langle 1 \rangle$ stabilisiert f die Kette $\langle 1 \rangle \triangleleft \Phi(X) \triangleleft Z(X) \triangleleft M \triangleleft X$ und f operiert nicht treu auf M . Es gilt daher $M \cong D_8 \wr Q_8$. Wähle i in der Menge $X \setminus M$ so, daß $[i, f] = 1$ gilt. Wegen $\text{Aut } M \cong \Sigma_5$ (siehe z.B. [8]) kann man i weiter so wählen, daß i die Gruppe M zentralisiert und somit Fall (2) vorliegt. Im Fall $|\Phi(X)| = 4$ ergib die Anwendung eines Resultats aus [3, Seite 214], daß die Gruppe X speziell ist.

LEMMA 1.7. Die Gruppe \bar{H} enthalte ein Element \bar{f} der Ordnung 5, es gelte $|E| = 2^7$ und $Z(E)$ sei zyklisch. Dann gilt

$$E = [E, \bar{f}] \wr C_x(f) \quad \text{und} \quad [E, \bar{f}] \cong D_8 \wr Q_8 .$$

BEWEIS. Man darf $E' \neq \langle 1 \rangle$ annehmen. Wenn $|\Phi(E)| = 8$ gilt, ist E speziell, insbesondere ist die Gruppe $Z(E)$ nichtzyklisch. Es folgt, daß $|\Phi(E)| \in \{2, 4\}$ gilt und \bar{f} auf einer maximalen Untergruppe M von E operiert, die nichtabelsch ist. Sei M zunächst speziell und weiter i ein Element der Menge $C_x(\bar{f}) \setminus M$. Wegen $\Phi(M) = \Phi(E)$ gilt $[i, M/\Phi(M)] = \langle 1 \rangle$, so daß sich $C(i) \cap (M \setminus \Phi(M)) \neq \emptyset$ ergibt. Da f auf $M/\Phi(M)$ irreduzibel operiert, erhalten wir $[i, M] = \langle 1 \rangle$. Da die Vierergruppe $Z(M)$ in $Z(E)$ liegt, haben wir einen Widerspruch zu einer Voraussetzung des Lemmas erhalten. Folglich gilt $M = [M, \bar{f}] \cdot Z(M)$, wobei die Isomorphie $[M, \bar{f}] \cong D_8 \wr Q_8$ vorliegt. Für ein Element i aus der Menge $C_x(\bar{f}) \setminus M$ folgt wie im Beweis von Lemma 1.6 die Aussage $[i, [M, \bar{f}]] = \langle 1 \rangle$.

LEMMA 1.8. Wenn \bar{H} zu A_5 , A_6 oder A_7 isomorph ist, gilt $E = E_1 \wr C$ mit $E_1 \cong D_8 \wr Q_8$. Dabei ist C isomorph zu einer der folgenden Gruppen:

$$\begin{array}{ll} Z_2, Z_4, Z_8, D_8, Q_8 & \text{falls } \bar{H} \cong A_5 \text{ gilt,} \\ Z_4, Z_8, D_8, Q_8, & \text{falls } \bar{H} \cong A_6 \text{ gilt,} \\ Q_8, & \text{falls } \bar{H} \cong A_7 \text{ gilt.} \end{array}$$

BEWEIS. Angenommen, $Z(E)$ sei nichtzyklisch. Wir definieren $Z = \Omega_1(Z(E))$ und setzen $|Z| = 2^n$. Da \bar{H} treu auf Z operiert, muß

$|Z| \geq 2^5$ gelten. Im Fall $\bar{H} \cong A_5$ sei \bar{T} eine Sylow-2-Untergruppe von \bar{H} . Die Betrachtung der Jordanschen Normalformen der Abbildungen, die zwei vertauschbare Involutionen aus \bar{T} auf Z bewirken, zeigt den Widerspruch $|C_Z(\bar{T})| \geq 4$. Sei nun \bar{H} zu A_6 oder zu A_7 isomorph und weiter Ω die Menge der maximalen Untergruppen von Z , die $\langle z_1 \rangle$ nicht entralten. Man berechnet $|\Omega| = (2^n - 1) - (2^{n-1} - 1) = 2^{n-1}$. Die Gruppe \bar{H} operiert auf Ω und ein Element \bar{j} der Ordnung 5 aus \bar{H} besitzt einen Fixpunkt F in Ω . Wäre $N_{\bar{H}}(F)$ eine $2'$ -Gruppe, so hätte F unter der Wirkung von \bar{H} mindestens $(2^3 \cdot 3^2 \cdot 5) : 5 = 72$ konjugierte, was der Mächtigkeit von Ω widerspricht. Sei \bar{i} eine Involution in \bar{H} , die F normalisiert. Wir sehen, daß $[Z, \bar{i}] \subseteq [F, \bar{i}] \subseteq F$ gilt. Sei $\bar{D} \subseteq \bar{H}$, $\bar{D} \cong D_8$ und $\langle \bar{i} \rangle = Z(\bar{D})$. Da \bar{D} auf $[Z, \bar{i}]$ operiert erhält man $|C(\bar{D}) \cap F| \neq 1$ und damit den Widerspruch $|C(\bar{D}) \cap Z| \geq 4$. Somit ist $Z(E)$ zyklisch. Die Anwendung der Lemmata 1.6 und 1.7 ergibt $E = E_1 \rtimes C$, $E_1 = [E, \bar{j}] \cong D_8 \rtimes Q_8$ und $C = C_E(f)$.

Sei $C = Z(E)$ zyklisch. Dann ist E/C als Vektorraum über $\text{GF}(2)$ mit symplektischem Skalarprodukt zu $E_1/\langle z_1 \rangle$ isomorph. Wegen $\text{SP}(4, 2) \cong \Sigma_6$ (siehe [7, II, Satz 9.22, Seite 227]) gilt $\bar{H} \not\cong A_7$. Im Fall $C \cong Z_2$ gilt $\text{Aut } E \cong \Sigma_5$ und deshalb $\bar{H} \cong A_6$.

Im Fall $C \cong \bar{H}_8$ schließlich ist $(\text{Aut } E)'$ zu $\text{PSP}(4, 3)$ isomorph (siehe z.B. [8, Seite 221]), so daß $\bar{H} \cong A_7$ folgt.

2. Der Fall: $\bar{H} \cong \text{PSL}(2, 7)$, E nicht elementar-abelsch.

In diesem Paragraphen werden die in Lemma 1.5 unter (1) und (2) angegebenen Fälle untersucht. Wir beginnen mit Fall (2) und behalten bis einschließlich Lemma 2.7 die folgenden Bezeichnungen bei: $E = C \times K$ mit $C = C_E(s)$ und $K = [E, s]$, wobei s ein fest gewähltes Element der Ordnung 7 in H ist. Wir setzen $K^* = K \times \langle z_1 \rangle$. Weiter ist d ein Element der Ordnung 3 in H mit $\langle s \rangle^d = \langle s \rangle$, $\{\pi, \tau, \tau'\}$ eine Basis von K mit $C_K(d) = \langle \tau' \rangle$ und j ein Element der Menge $H \setminus E$ mit $j^2 \in E$ und $d^j = d^{-1}$.

LEMMA 2.1. Der Fall (2) (a) tritt nicht auf.

BEWEIS. Sei zuerst C zu $Z_4 \times Z_2 \times Z_2$. Wir setzen $C = \langle x \rangle \times \langle z_2, z_3 \rangle$. Dabei gilt $x^2 = z_1$ und x ist so gewählt, daß x d zentralisiert. Im Fall $[C, d] = \langle 1 \rangle$ operiert j auf $(C \times \langle \tau' \rangle) / \langle z_1 \rangle$, hat also einen nicht-trivialen Fixpunkt in $\langle z_1, z_2, z_3 \rangle / \langle z_1 \rangle$. Eine Vierergruppe in C wird deshalb von $\langle s, j \rangle$ normalisiert, liegt somit im Zentrum von H . Dies ist nicht möglich, weil das Zentrum einer Sylow-2-Untergruppe von G

zyklisch ist. Die Involution j operiert auf $\Omega_1(E) \cap C(d) = \langle z_1, \tau' \rangle$ und es gilt $[\tau', j] \neq 1$, weil andernfalls eine Diedergruppe der Ordnung 8 in \bar{H} eine Vierergruppe in $\Omega_1(E)$ zentralisieren müßte. Die Annahme $x^j \in \langle x \rangle \tau'$ bringt den Widerspruch $x = x^{j^2} = x \cdot z_1$. Es ergibt sich $\langle x \rangle \triangleleft E \cdot \langle s, j \rangle = H$ und $\langle x \rangle \subseteq Z(H)$. Wenn $C = \langle x \rangle$ zyklisch ist, folgt ebenfalls $\langle x \rangle \subseteq Z(H)$.

Sei e eine Involution in $E \setminus \langle z_1 \rangle$, X_2 eine Sylow-2-Untergruppe von $C_H(e)$ und 2^{t+1} die Ordnung von x . Offenbar ist $\langle z_1 \rangle = \mathcal{O}^i(Z(X_2))$ eine charakteristische Untergruppe von X_2 , so daß $z_1 \sim e$ folgt. Wir schließen, daß z_1 zu einer Involution in $H \setminus E$ konjugiert ist, und insbesondere, daß die Menge $H \setminus E$ Involutionen enthält. Wir wählen Involutionen i_1 und i_2 in H derart, daß $\langle \bar{i}_1, \bar{i}_2 \rangle \cong \bar{H}_8$ und $\langle \bar{j} \rangle = Z(\langle \bar{i}_1, \bar{i}_2 \rangle)$ gilt. Weiter betrachten wir zuerst die Möglichkeit, daß H über E zerfällt, und nehmen $j^2 = 1$ an. Sei e ein fest gewähltes Element der Ordnung 4 in $\langle x \rangle$. Die Involutionen in jE haben die Form $j \cdot e$ oder $j \cdot c \cdot \tau' \cdot e$, wobei e ein beliebiges Element in $C(j) \cap \Omega_1(E)$ ist. Die Menge $H \setminus E$ enthält 8.21 Involutionen, wenn C zyklisch ist, 16.21 Involutionen, falls C zu $Z_4 \times Z_2 \times Z_2$ isomorph ist. Diese Involutionen bilden zwei H -Klassen. Sei $j^* \in jE$ ein Klassenvertreter. Dann ist $C_H(j^*)$ eine Erweiterung von $C_E(j)$ mit einer Diedergruppe der Ordnung 8. Aus $\langle x, j^* \rangle = Z(C_H(j^*))$ folgt der Widerspruch $z_1 \sim j^*$.

Nun zerfalle H nicht über E . Zuerst sei j^2 eine Involution in E . Wegen $j^2 \in Z(E \langle i_1, i_2 \rangle)$ gilt $j^2 = z_1$. Die Involutionen in jE haben die Form $j \cdot \tau' \cdot e$ oder $j \cdot c \cdot e$, wobei wieder $e \in \Omega_1(E) \cap C(j)$ gilt. Wir sehen $j \cdot \tau' \sim j \cdot c$ und erhalten einen Widerspruch wie im obigen Fall. Schließlich gelte $j^2 \neq 1$. Falls $j \cdot e$ eine Involution in jE ist, so ist wegen $j^2 \cdot e^j \cdot e = 1$ das Element $e^j \cdot e$ keine Involution, so daß $C \cong Z_8$ oder $C \cong Z_{16}$ gelten muß. Da H auf K^* operiert, kann man lemma 2.2 anwenden, nachdem man i_1 durch y , i_2 durch r und j durch t ersetzt. Aus den Gleichungen $j^2(j^2)^{i_1} = 1$ und $j^2(j^2)^{i_2} = 1$ folgert man $j^2 \in \langle x, \pi \rangle$ und daher den Widerspruch $[j^2, i_2] = 1$.

LEMMA 2.2. Die Gruppe H normalisiert K^* und es gibt Elemente r, d in H mit folgender Operation auf K^* (bezüglich der Basis $\{z_1, \pi, \tau, \tau'\}$):

$$r \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad d \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

Wir definieren $y = r^d$ und $t = (r \cdot y)^2$. Dann gilt $\bar{d}^3 = 1$, $\langle \bar{r}, \bar{y} \rangle \cong D_8$

$$y \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 + \alpha & 1 & 1 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad t \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 + \alpha & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

BEWEIS. Offenbar gilt $K^* = \Omega_1(Z(E))$. Da d die Gruppe $K = [E, s]$ normalisiert, kann man eine Basis $\{\pi, \tau, \tau'\}$ von K so wählen, daß d in der angegebenen Weise operiert. Durch H wird die volle Automorphismengruppe von $K^*/\langle z_1 \rangle$ induziert, so daß in H ein Element r existiert, das in der angegebenen Weise auf $K^*/\langle z_1 \rangle$ operiert. Man rechnet nach, daß $\bar{r}^2 = (\bar{r} \cdot \bar{r}^d)^4 = 1$ gilt und weiter

$$r \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ b & 0 & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{K^*}.$$

Wegen $r^2 \in E$ gilt $b = 0$. Da das Zentrum einer Sylow-2-Untergruppe von G zyklisch ist, ergibt sich $|C_{K^*}(r)| \neq 8$ und daher $a = 1$.

LEMMA 2.3. Es gilt $C \not\cong Q_8$.

BEWEIS. Setze $C = \langle v_1, v_2 \rangle$ mit $v_i^2 = z_1$.

Falls z_1 keine G -Konjugierten in der Menge $H \setminus E$ besitzt, gilt $z_1 \sim \pi$ und alle Involutionen in E sind unter $N(\Omega_1(E))$ zu z_1 konjugiert. Die Gleichung $C(\Omega_1(E)) = E$ zeigt, daß $N(\Omega_1(E)) = N(E)$ gilt. Aus $\mathcal{C}^1(E) = \langle z_1 \rangle$ folgt als Widerspruch $N(\Omega_1(E)) = H$. Daher ist z_1 zu einer Involution in $H \setminus E$ konjugiert. Sei j eine Involution in der Menge $H \setminus E$. Wie in Lemma 2.1 folgern wir $v_i^2 \in \langle v_i \rangle$, $C \triangleleft H$ und $C \cdot C_\sigma(C) = H$. Wir wählen $\langle r, y \rangle$ als Untergruppe von $C_\sigma(C)$. Wenn die Nebenklasse $r \cdot K$ keine Involutionen enthält, gibt es ein Element c in C mit $1 = (r \cdot k \cdot c)^2$. Es folgt $(r \cdot k)^2 \in Z(C) = \langle z_1 \rangle$, so daß wir in $r \cdot k \cdot \pi$ doch eine Involution in rK gefunden haben. Man kann daher $\langle r, y \rangle$ als Diedergruppe in $C_\sigma(C)$ ansehen. Wie in Lemma 2.1 folgt $t^2 = z_1^\beta$ ($\beta \in \{0, 1\}$). Vertreter der H -Involutionenklassen in der Menge

$H \setminus E$ sind

$$t\tau^\beta, \quad tv_1\tau^{1+\beta}, \quad tv_2\tau^{1+\beta}, \quad tv_1v_2\tau^{1+\beta}.$$

Setze $X = C_H(t\tau^\beta)_2 = \langle C, \pi \rangle \langle r\tau^\beta, y(\tau, \tau')^\beta \rangle$. Angenommen, es existiere eine Gruppe X^* mit $X^* \subseteq C_\sigma(t\tau^\beta)$ und $|X^*:X| = 2$. Die Gruppe X enthält genau 96 Elemente der Ordnung 4, und zwar 64, deren Quadrat z_1 ist, und 32, deren Quadrate in der Nebenklasse tE liegen. Unter X^* sind dann zwei nicht unbedingt verschiedene Elemente mit Quadrat z_1 konjugiert, was zum Widerspruch $X^* \subseteq H$ führt. Da somit X eine Sylow-2-Untergruppe von $C_\sigma(t\tau^\beta)$ ist, folgt $z_1 \sim t\tau^\beta$ und wir können jetzt $z_1 \sim tv_1\tau^{1+\beta}$ annehmen. Setze

$$X = C_H(tv_1\tau^{1+\beta})_2 = \langle v_1, v_2\tau, \pi \rangle \langle r\tau^\beta, y\tau^\beta\tau'^{1+\beta} \rangle.$$

Man prüft nach, daß $Z(X) = \langle z_1, tv_1\tau^{1+\beta} \rangle$ und $X^1 = \langle z_1, \pi, tv_1\tau^{1+\beta} \rangle$ gilt. Es folgt der Widerspruch $\langle z_1 \rangle = Z(X) \cap X'$, durch den der Beweis des Lemmas vervollständigt wird.

LEMMA 2.4. Es gilt $C \cong D_8$.

BEWEIN. Setze $C = \langle i_1, i_2 \rangle$ mit $i_1^2 = i_2^2 = 1$. Zuerst soll die Annahme, daß keine Involution in E zu einem Element in $H \setminus E$ konjugiert ist, zu einem Widerspruch geführt werden. In E gibt es vier, fünf oder sechs H -Klassen von Involutionen. Vertreter der Klassen und ihre Längen sind der folgenden Aufstellung zu entnehmen.

$$\begin{array}{ll} z_1(1), & \pi(14) \\ i_1(2), & i_1\pi(14) \quad (\text{auch der Fall } i_1 \underset{H}{\sim} i_1\pi \text{ kann eintreten}) \\ i_2(2), & i_2\pi(14) \quad (\text{auch der Fall } i_2 \underset{H}{\sim} i_2\pi \text{ kann eintreten}). \end{array}$$

Es gilt $z_1 \sim \pi$, weil andernfalls aus $\pi^\sigma = z_1$ die Gleichung $E = C_E(\pi)^\sigma = E^\sigma$ folgte, also der Widerspruch $g \in N(E) = H$. Es genügt, $z_1 \sim i_1$ und $z_1 \sim i_1\pi$ nachzuweisen. Wir wählen i aus der Menge $\{i_1, i_1\pi\}$ und X als Untergruppe von $C_\sigma(i)$ so, daß $|X:C_H(i)_2| = 2$ gilt. Setze $F = C_E(i) = K^* \times \langle i \rangle$. Die Gruppe $N = \langle H, X \rangle$ ist Untergruppe von $N_\sigma(F)$. Wegen $17 \nmid |\text{GL}(5, 2)|$ folgt $i_1 \sim i_1\pi$. Im Fall $z_1 \sim i_1\pi$ gilt $\{i_1, i_1z_1\} \triangleleft N$ und $|N| = 2^9 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$. Diese beiden Aussagen widersprechen einander. Im Fall $z_1 \sim i_1$ gibt es ein Element d^* mit $z_1 \xrightarrow{d^*} i_1$ und $[\pi, d^*] = 1$. Daraus folgt der Widerspruch $z_1\pi \xrightarrow{d^*} i_1\pi$.

Wir können r und y als Involutionen wählen, so daß $\langle r, y \rangle$ eine Diedergruppe in $C_\sigma(C)$ ist und $t^2 = z_1^\beta$ mit $\beta \in \{0, 1\}$ gilt. Weiter sind $z_1, i_1, i_1\pi, i_2, i_2\pi$ Vertreter der H -Involutionsklassen in E , so daß für jede Involution e in E gilt: $2^8 |C_\sigma(e)|$. Vertreter der H -Involutionsklassen in $H \setminus E$ sind:

$$t\tau^\beta, \quad ti_1\tau^\beta, \quad ti_2\tau^\beta, \quad ti_1i_2\tau^{1+\beta}.$$

Setze $X = C_H(t\tau^\beta)_2 = \langle C, \pi \rangle \cdot \langle r\tau^\beta, y(\tau\tau')^\beta \rangle$. Wenn X keine Sylow-2-Untergruppe von $C_\sigma(t\tau^\beta)$ ist, dann existiert ein Element x in der Menge $(C_\sigma(t\tau^\beta) \cap N(X)) \setminus H$. Da x die Gruppe $Z(X) = \langle z_1, t\tau^\beta \rangle$ normalisiert, gilt $z_1 \xrightarrow{x} z_1 t\tau^\beta$. Die Gruppe X enthält 64 Elemente der Ordnung 4, und zwar 32 mit z_1 als Quadrat und 32, deren Quadrate in der Nebenklasse tE liegen, wobei verschiedene Involutionen in tE als Quadrate vorkommen. Dies ist jedoch nicht möglich, weil x jedem Element der Gruppe X , dessen Quadrat z_1 ist, ein Element mit Quadrat in tE zuordnen muß. Wie im Beweis von Lemma 2.3 rechnet man nach, daß für jedes Element e der Menge $\{ti_1\tau^\beta, ti_2\tau^\beta, ti_1i_2\tau^{1+\beta}\}$ die Ordnung einer Sylow-2-Untergruppe von $C_\sigma(e)$ 2^7 beträgt. Damit ist ein Widerspruch zur Tatsache erreicht, daß mindestens eine Involution in E zu einem Element in $H \setminus E$ konjugiert ist.

In den Fällen (2) (c) und (2) (d) werden mit ähnlichen Argumenten Widersprüche erzielt. Deshalb sind die Beweise der folgenden Lemmata weniger ausführlich aufgeschrieben.

Liegt Fall (2) (e) vor, so ist C isomorph zu D_{16}, SD_{16}, Q_{16} , oder zu der folgendermaßen bestimmten Gruppe M :

$$M = \langle x, i | x^8 = 1^2 = 1, x^i = x^5 \rangle.$$

LEMMA 2.5. Es gilt $C \not\cong D_{16}$, $C \not\cong SD_{16}$ und $C \not\cong Q_{16}$.

BEWEIS. Sei $\langle x \rangle$ die einzige zyklische Untergruppe der Ordnung 8 von C und $A = \langle x \rangle \times K$ die einzige abelsche Untergruppe der Ordnung 2^6 von E , so daß $A \triangleleft H$ gilt. Sei weiter i ein Element aus $C \setminus \langle x \rangle$ und, falls C keine verallgemeinerte Quaternionengruppe ist, i eine Involution. Da H/E die zyklische Gruppe A/K zentralisiert, während E/A invertierend operiert, folgt $H/A = \langle i \rangle \times \hat{L}$ mit $\hat{L} \cong \text{PSL}(2, 7)$. Sei L das volle Urbild von \hat{L} . Wie im Beweis von Lemma 2.1 sieht man $[\langle x \rangle, L] = \langle 1 \rangle$. Die Gruppe $A \langle i, y, t \rangle$ ist eine Sylow-2-Untergruppe von $C_H(\pi)$ derart, daß $A \langle i, y, t \rangle / A$ elementarabelsch ist. Man berechnet $\langle z_1 \rangle = \mathcal{C}^1((A \langle i, y, t \rangle)')$ woraus $z_1 \sim \pi$ folgt. Es gibt vier,

fünf oder sechs H -Klassen von Involutionen in der Gruppe E . Vertreter dieser Klassen und ihre Längen sind der folgenden Aufstellung zu entnehmen.

- $z_1(1), \quad \pi(14),$
- $i(4), \quad i\pi(28)$ (im Fall $C \cong Q_{16}$; auch $i \sim_H i\pi$ ist möglich),
- $ix(4), \quad ix\pi(28)$ (im Fall $C \cong D_{16}$; auch $ix \sim_H ix\pi$ ist möglich).

Wie in Lemma 2.4 beweist man, daß mindestens eine Involution in E zu einer in $H \setminus E$ konjugiert ist. Außerdem gilt $C \triangleleft H$ und $C \cdot C_\alpha(C) = H$. Wir können $\langle r, y \rangle$ als Diedergruppe in $C_\alpha(C)$ wählen, so daß $t^2 = z_1$ mit $\beta \in \{0, 1\}$ gilt. Es gibt nun genau sechs H -Klassen von Involutionen in E . Die folgende Tabelle gibt eine Übersicht über die H -Klassen von Involutionen in $H \setminus E$.

Konj Zahl	Vertreter * und Sylow-2-Untergruppe X von $C_H(*)$		
	$C \cong D_{16}$	$C \cong SD_{16}$	$C \cong Q_{16}$
4·21	$t\tau^\beta$	$t\tau^\beta$	$t\tau^\beta$
8·21	$C\langle\pi\rangle\langle r\tau^\beta, y(\tau\tau')^\beta \rangle$	$ti\tau^\beta$	$ti\tau^{1+\beta}$
8·21	$\langle i, \tau x^2, \pi \rangle \cdot \langle r\tau^\beta, y(\tau\tau')^\beta \rangle$	$ti\tau^{1+\beta}$	$\langle i, \tau x^2, \pi \rangle \cdot \langle r\tau^\beta, y\tau^\beta\tau^{1+\beta} \rangle$
4·21	$ti\tau^\beta$	$\langle ix, \tau x^2, \pi \rangle \cdot \langle r\tau^\beta, y(\tau\tau')^\beta \rangle$	$ti\tau^{1+\beta}$
4·21	$\langle ix, \tau x^2, \pi \rangle \cdot \langle r\tau^\beta, y(\tau\tau')^\beta \rangle$	$ti\tau^{1+\beta}$	$ti\tau^{1+\beta}$
	$tx^2\tau^{1+\beta}$	$\langle ix, \tau x^2, \pi \rangle \cdot \langle r\tau^\beta, y\tau^\beta\tau^{1+\beta} \rangle$	$tx^2\tau^{1+\beta}$
	$\langle x, i\tau, \pi \rangle \cdot \langle r\tau^\beta, y\tau^\beta\tau^{1+\beta} \rangle$	$tx^2\tau^{1+\beta}$	$tx^2\tau^{1+\beta}$

Man rechnet nach, daß $\langle r\tau^\beta, y\tau^\beta\tau^{1+\beta} \rangle$ das Element $t\tau^{1+\beta}$ enthält. Sei t^* eine Involution in der Menge $\{ti\tau^{1+\beta}, ti\tau^{1+\beta}, tx^2\tau^{1+\beta}\}$. Dann gilt

$$\mathcal{O}^1(C_H(t^*)) = \langle z_1 \rangle \quad \text{und} \quad C_H(t^*)$$

ist eine Sylow-2-Untergruppe von $C_\alpha(t^*)$. Ist t^* zu einer Involution in E konjugiert, so muß diese Konjugation mit einem Element aus H erfolgen. Dies ist nicht möglich. Aus der Gleichung $\mathcal{O}^1(C_H(t\tau^\beta)) = \mathcal{O}^1(\langle x^2 \rangle \times \langle t\tau^\beta \rangle) = \langle z_1 \rangle$ folgt, daß $C_H(t\tau^\beta)$ eine Sylow-2-Untergruppe

von $C_a(t\tau^\beta)$ ist, und weiter, daß $t\tau^\beta$ zu keiner Involution in E konjugiert ist. Setze abschließend $X = C_H(t\tau^\beta)$. Unter Beachtung der Gleichungen $X' = \langle z_1, \pi, t\tau^\beta \rangle$ und $Z(X) = \langle z_1, t\tau^\beta \rangle$ erhält man $\langle z_1 \rangle = Z(X) \cap X'$, so daß auch $t\tau^\beta$ zu keiner Involution in E konjugiert ist. Das Lemma ist bewiesen.

LEMMA 2.6. Es gilt $C \not\cong M$.

BEWEIS. Sei x ein Element der Ordnung 8 aus C und i eine Involution aus $C \setminus \langle x \rangle$. Aus $Z(E) = \langle x^2 \rangle \times K$ folgert man wie im Beweis von Lemma 2.1, daß $\langle x^2 \rangle \subseteq Z(H)$ gilt. Angenommen, z_1 sei zu keiner Involution in $H \setminus E$ konjugiert. Es gibt drei bzw. vier H -Involutionenklassen in E . Vertreter dieser Klassen und ihre Längen sind der folgenden Aufstellung zu entnehmen.

$$\begin{array}{ll} z_1(1), & \pi(14), \\ i(2), & i\pi(14), \quad (\text{auch der Fall } i \underset{H}{\sim} i\pi \text{ kann auftreten}). \end{array}$$

Die Gruppe $X = E \langle y, t \rangle$ ist eine Sylow-2-Untergruppe von $C_H(\pi)$. Aus $\langle z_1 \rangle = \mathcal{O}^1(E(X))$ folgt $z_1 \sim \pi$. Im Fall $i \sim i\pi$ ist $X_1 = \langle x^2, i \rangle \times K$ eine Sylow-2-Untergruppe von $C_H(i)$. Wegen $\mathcal{O}^1(X_1) = \langle z_1 \rangle$ gilt $z_1 \sim i$. Es liegt der Fall $i \underset{H}{\not\sim} i\pi$ vor. Sei i^* eine Involution aus der Menge $\{i, i\pi\}$. Aus der Gleichung $\langle z_1 \rangle = \mathcal{O}^1(Z(C_H(i^*)_2))$ folgt $z_1 \sim i^*$. Somit muß z_1 zu einer Involution in $H \setminus E$ konjugiert sein und es gibt in der Menge $H \setminus E$ vier H -Klassen von Involutionen mit jeweils $4 \cdot 21 = 84$ Elementen. Setze $X = C_H(t^*)$, wobei y^* einen Klassenvertreter in $H \setminus E$ bezeichnet. Unter Beachtung von $\langle x^2 \rangle \subseteq Z(H)$ prüft man leicht nach, daß $\langle z_1 \rangle = \mathcal{O}^1(Z(X))$ gilt. Damit ist das Lemma bewiesen.

LEMMA 2.7. Es gilt $C \not\cong D_8 \wr Z_4$.

BEWEIS. Setze $\langle z \rangle = Z(C)$. Mit i_1, i_2 werden Involutionen in C bezeichnet, die eine Diedergruppe der Ordnung 8 erzeugen. In E gibt es fünf, sechs, sieben oder acht H -Klassen von Involutionen. Vertreter dieser Klassen und ihre Längen sind der folgenden Aufstellung zu entnehmen.

$$\begin{array}{lll} z_1(1), & \pi(14), & \\ i_1(2), & i_1\pi(14), & (\text{auch der Fall } i_1 \underset{H}{\sim} i_1\pi \text{ kann auftreten}), \\ i_2(2), & i_2\pi(14), & (\text{auch der Fall } i_2 \underset{H}{\sim} i_2\pi \text{ kann auftreten}), \\ i_1 i_2 x(2), & i_1 i_2 x\pi(14), & (\text{auch der Fall } i_1 i_2 x \underset{H}{\sim} i_1 i_2 x\pi \text{ kann auftreten}). \end{array}$$

Im Fall $i_1 \not\sim_{\bar{H}} i_1\pi$ sind $\langle i_1, x \rangle$ bzw. $\langle i_1\pi, x \rangle$ Zentren von Sylow-2-Untergruppen von $C_H(i_1)$ bzw. $C_H(i_1\pi)$. Es folgt $z_1 \sim i_1$ und $z_1 \sim i_1\pi$. Wenn $i_1 \sim_{\bar{H}} i_1\pi$ gilt, so ist $X = \langle i_1, x \rangle \times K$ eine Sylow-2-Untergruppe von $C_H(i_1)$ und aus der Gleichung $\langle z_1 \rangle = \mathcal{O}^1(X)$ folgt $z_1 \sim i_1$. In jedem Fall besitzt z_1 keine G -Konjugierten in $E \setminus \langle z_1 \rangle$. Deshalb enthält die Menge $H \setminus E$ Involutionen und es gilt $C \triangleleft H$ und $C \cdot C_G(C) = H$. Wir wählen $\langle r, y \rangle$ als Diedergruppe in $C_G(C)$ mit $t^2 = z_1^\beta$ und $\beta \in \{0, 1\}$. Die Menge $H \setminus E$ enthält acht H -Klassen von Involutionen mit jeweils $4 \cdot 21 = 84$ Elementen. Vertreter dieser Klassen sind:

$$\begin{aligned} & \tau\tau^\beta, \quad ti_1\tau^\beta, \quad ti_2\tau^\beta, \quad ti_1i_2x\tau^\beta, \\ & tx\tau^{1+\beta}, \quad ti_1i_2\tau^{1+\beta}, \quad ti_1x\tau^{1+\beta}, \quad ti_2x\tau^{1+\beta}. \end{aligned}$$

Wie in Lemma 2.6 folgt ein Widerspruch zu Glauberman's Satz, durch den das Lemma bewiesen wird.

LEMMA 2.8. Die Gruppe \bar{H} sei zu $\text{PSL}(2, 7)$ isomorph und E sei nicht elementar-abelsch. Dann ist G zu einer der folgenden Gruppen isomorph: M_{24} , He , $\text{PSL}(5, 2)$.

BEWEIS. Die vorausgegangenen Lemmata zeigen, daß Fall (2) aus Lemma 1.5 nicht auftritt, daß E also extraspeziell ist. Das Resultat [6, Theorem, Seite 289] liefert nun die Behauptung.

3. Der Fall: $\bar{H} \cong \text{PSL}(2, 7)$, E elementar-abelsch.

In diesem Paragraphen wird der in Lemma 1.5 (3) angegebene Fall untersucht.

LEMMA 3.1. Falls $|E| \neq 2^4$ gilt, so besitzt z_1 keine G -Konjugierten in der Menge $E \setminus \langle z_1 \rangle$.

BEWEIS. Angenommen, z_1^q liege in E . Dann folgt $E^{q-1} \subseteq H$. Da E die einzige abelsche Untergruppe der Ordnung $|E|$ von H ist, gilt $g \in N_G(E)$. Es genügt, in einem Widerspruchsbeweis $N_G(E) = H$ nachzuweisen. Wir definieren dazu $\bar{N} = N_G(E)/E$.

Zuerst gelte $|E| = 2^7$. Da für jedes Element s der Ordnung 7 aus H die Gleichung $C_E(s) = \langle z_1 \rangle$ gilt und das Zentrum einer Sylow-2-Untergruppe von G zyklisch ist, ist die Anzahl der G -Konjugierten

von z_1 in E kongruent 1 modulo 14. Die Ordnung von $\text{GL}(7, 2)$ erlaubt folgende Möglichkeiten $|N:H| = 127$ und $|N:H| = 15$. Im ersten Fall ist eine Sylow-127-Untergruppe von \bar{N} normal in \bar{N} . Dies widerspricht jedoch der Tatsache, daß eine solche Gruppe in $\text{GL}(7, 2)$ selbstzentralisierend ist. Im zweiten Fall gilt $|\bar{N}| = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$. Wenn $O_2(\bar{N})$ nicht-trivial ist, existiert ein 2'-Element $\bar{n} \in N$, so daß $\langle \bar{n} \rangle$ von einer Diedergruppe \bar{D} der Ordnung 8 in \bar{N} normalisiert wird. Das volle Urbild von \bar{D} ist eine Sylow-2-Untergruppe von G und operiert auf $C_E(\langle \bar{n} \rangle)$ und auf $[E, \langle d \rangle]$, so daß $Z(D)$ eine Vierergruppe enthält. Dies steht im Widerspruch zu einer Voraussetzung unseres Satzes. Es folgt $O_2(\bar{N}) = \langle 1 \rangle$ und $\bar{N} \cong A_7$. Die Gruppe \bar{N} enthält eine Untergruppe der Ordnung 3, die von einer Diedergruppe der Ordnung 8 in \bar{N} normalisiert wird. Wir haben erneut einen Widerspruch erhalten.

Im Fall $|E| = 2^6$ gilt $E = C \times K$ mit $C_E(s) = C \cong E_8 \cong K = [E, s]$, wobei s ein festgewähltes Element der Ordnung 7 aus H bezeichnet. Für ein Element d der Ordnung 3 aus $N_H(\langle s \rangle)$ ergibt sich wie im Beweis von Lemma 2.1 die Gleichung $C_C(d) = \langle z_1 \rangle$. Daher enthält $E \setminus \langle z_1 \rangle$ drei H -Klassen mit den Längen 14, 24, 24. Es bestehen die Möglichkeiten $|N:H| = 63$ und $|N:H| = 15$. Da \bar{H} die Gruppe $O_2(\bar{N})$ zentralisiert, gibt es im Fall $O_2(\bar{N}) \neq \langle 1 \rangle$ ein Element \bar{n} in \bar{N} derart, daß $[E, \bar{n}] \neq \langle 1 \rangle \neq C_E(\bar{n})$ gilt. Wir schließen $O_2(\bar{N}) = \langle 1 \rangle$ und weiter $\bar{N} \cong A_7$. Sei e eine Involution in E , die 24 H -Konjugierte besitzt. Aus $|C_N(e)| = 3 \cdot 5 \cdot 7$ folgt ein Widerspruch, weil A_7 keine Untergruppe dieser Ordnung enthält.

LEMMA 3.2. Es gilt $|E| \neq 2^6$.

BEWEIS. Die Anwendung von Lemma 3.1 ergibt, daß z_1 zu einer Involution t in $H \setminus E$ konjugiert ist. Wegen $|C_E(t)| = 8$ gibt es genau 8 Involutionen in der Nebenklasse tE , die alle unter E konjugiert sind, so daß t Vertreter der einzigen H -Klasse von Involutionen in der Menge $H \setminus E$ ist. Wir wählen $g \in G$ mit $t^g = z_1$. Die Gruppe $C_E(t)$ wird von Involutionen erzeugt, die nicht zu z_1 konjugiert sind, deren G -Konjugierte in H also sämtlich in der Menge $E \setminus \langle z_1 \rangle$ liegen. Es folgt $C_E(t)^g \subseteq E$ und damit $z_1^g \in E$, also der Widerspruch $g \in H$.

Wir vereinbaren die folgenden Bezeichnungen.

HYPOTHESE (H1). Die Gruppe E ist elementar-abelsch der Ordnung 2^7 und \bar{H} operiert reduzibel auf \bar{E} .

HYPOTHESE (H2). Die Gruppe E ist elementar-abelsch der Ordnung 2^7 und \bar{H} operiert irreduzibel auf \bar{E} .

Ist Hypothese (H1) erfüllt, so bezeichnet E_1 einen Normalteiler von H , der eine Untergruppe von E ist und eine Basis $\{z_1, z_2, z_3, z_4\}$ besitzt. Weiter sind r und d Elemente in H , deren Operation auf E_1 durch die folgenden Matrizen angegeben wird.

$$\bar{r} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{d} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Die Elemente \bar{r}, \bar{d} erfüllen die Relationen $\bar{r}^2 = \bar{d}^3 = (\bar{r} \cdot \bar{d})^7 = (\bar{r} \cdot \bar{r}^d)^4 = 1$. Dies sind erzeugende Relationen für $\text{PSL}(2, 7)$, was man z.B. [1, Seite 96] entnehmen kann. Wir setzen $\hat{E} = E/E_1$.

Offensichtlich gilt $|C_{\hat{E}}(\bar{r})| = 4$, $|C_{\hat{E}}(\bar{d})| = 2$ und $C_{\hat{E}}(\bar{r}) \cap C_{\hat{E}}(\bar{d}) = \langle 1 \rangle$. Sei $\{\pi, \tau, \tau'\}$ eine Basis von \hat{E} derart, daß $[\bar{r}, \langle \hat{\pi}, \hat{\tau} \rangle] = \langle 1 \rangle$ und $[\bar{d}, \hat{\tau}'] = 1$. Wir bezeichnen mit $\hat{\tau}$ die Involution in $\langle \hat{\pi}, \hat{\tau} \rangle$, für die $\hat{\tau}' \xrightarrow{\bar{r}} \hat{\tau} \cdot \hat{\tau}'$ gilt, und mit $\hat{\pi}$ die Involution, für die $\hat{\pi} \xrightarrow{\bar{d}} \hat{\tau}$ modulo $\langle \hat{\tau}' \rangle$ gilt. Nach diesen Vereinbarungen erhalten wir die folgenden Matrizen:

$$\bar{r} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{\hat{E}}, \quad \bar{d} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & a^* \\ 1 & 1 & b^* \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{\hat{E}}.$$

Die Relation $(\bar{r}, \bar{d})^7 = 1$ erzwingt $b^* = 1 + a^*$.

Wir zeigen zuerst, daß der Fall $a^* = 1$ nicht auftreten kann. Wir wählen $\langle \pi, \tau, \tau' \rangle$ als d -invariante Untergruppe von E und erhalten unter Ausnutzung der Relationen $\bar{r}^2 = (\bar{r} \cdot \bar{d})^7 = (\bar{r} \cdot \bar{r}^{\bar{d}})^4 = 1$ im Fall $a^* = 1$:

$$\bar{r} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 1 & & \\ 0 & a & 0 & & \\ 0 & b & 0 & r_{\hat{E}} & \\ a & b & b & & \end{bmatrix}_{\hat{E}}.$$

Die Gruppe $\langle \bar{r}, \bar{r}^{\bar{a}-1} \rangle$ ist Diedergruppe der Ordnung 8 in \bar{H} und es gilt

$$\bar{r} \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \\ \alpha & 0 & 1 & 1 & \\ \hline \beta & 0 & a & 0 & \\ \gamma & 0 & b & 0 & \\ \delta & a & b & b & \end{array} \right]_E, \quad \bar{r}^{\bar{a}-1} \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \\ \alpha & 0 & 0 & 1 & \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \\ \alpha & 1 & 0 & 0 & \\ \hline \gamma + \delta & a & a & a + b & 0 & 0 & 1 \\ \beta + \gamma & a + b & 0 & a + b & 0 & 1 & 0 \\ \delta & a + b & a & a & 1 & 0 & 0 \end{array} \right]_E,$$

Aus $\tau' \xrightarrow{\bar{r}^2} \tau'$ folgt die Gleichung $a + \alpha \cdot b + \gamma = 0$. Man prüft nun leicht die Richtigkeit der folgenden Relation nach:

$$[\langle \bar{r}, \bar{r}^{\bar{a}-1} \rangle, z_2^a \cdot z_3^{\beta+a(1+\alpha)} z_4^b \tau] = 1.$$

Das Zentrum einer Sylow-2-Untergruppe von G ist also nichtzyklisch. Dieser Widerspruch beweist, daß $a^* = 0$ gilt.

Nachdem $\{\pi, \tau, \tau'\}$ wieder als d -invariante Untergruppe von E gewählt ist, berechnet man die folgende Operation von \bar{r} auf E :

$$\bar{r} \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \\ \alpha & 0 & 1 & 1 & \\ \hline \beta & 0 & 0 & 0 & \\ \gamma & 0 & 0 & 0 & \\ \delta & b & 0 & 0 & \end{array} \right]_E.$$

Im Fall $\beta = 0$ ergibt sich der Widerspruch $[\langle \bar{r}, \bar{r}^{\bar{a}-1} \rangle, z_3^2 \pi] = \langle 1 \rangle$. Wir setzen $y = r^{a-1}$ und $t = (r \cdot y)^2$. Man erhält folgende Operation der

Diedergruppe $\langle \bar{r}, \bar{y} \rangle$ auf E :

$$\bar{r} \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & & & \\ 1 & 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & & \\ \alpha & 0 & 1 & 1 & & & \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \delta & b & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right], \quad \bar{y} \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & & & \\ \alpha & 0 & 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & 1 & 0 & & & \\ \alpha & 1 & 0 & 0 & & & \\ \hline b & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1+\beta+\delta & b & b & b & 1 & 1 & 0 \\ \delta & b & b & b & 1 & 0 & 1 \end{array} \right],$$

$$\bar{r}\bar{y} \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & & & \\ 1+\alpha & 0 & 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & 1 & 0 & & & \\ 1 & 1 & 1 & 0 & & & \\ \hline 1+b & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1+\delta & b & b & b & 1 & 1 & 0 \\ \frac{1+b}{1+b+\delta} & 0 & 0 & b & 0 & 1 & 1 \end{array} \right], \quad \bar{t} \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & & & \\ \alpha & 1 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & & \\ 1+\alpha & 0 & 1 & 1 & & & \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1+\alpha b & 0 & b & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1+b+\delta & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right].$$

LEMMA 3.3. Hypothese (H1) sei erfüllt. Dann zerfällt die Gruppe H über E .

BEWEIS. Aufgrund der Aussage von Lemma 3.1 kann man r als Involution in H wählen, so daß $\langle r, y \rangle$ eine Diedergruppe ist. Im Fall $|\langle r, y \rangle| = 8$ folgt die Behauptung mit Hilfe von [7, I, Satz 17.4, Seite 121]. Ist t keine Involution, so hat man $t^2 \in E^\# \cap Z(\langle r, y \rangle)$ und daher $t^2 = z_1$. Man rechnet nach, daß $\langle r, yz_3^{1+b}\tau\tau' \rangle$ eine Diedergruppe der Ordnung 8 ist, woraus wiederum die Behauptung folgt.

Wir wählen $\langle r, y \rangle$ als Diedergruppe der Ordnung 8 und berechnen $C_H(t) = \langle z_1, z_3, \pi, z_2^{1+b}z_4\tau \rangle \langle r, y \rangle$. Die Restklasse tE enthält 16 Involutionen, von denen 8 in H zu t und weitere 8 zu $t^* = tz_2^{1+b}z_4$ konjugiert sind, und zwar gilt

$$t \sim t, tz_1, tz_3, tz_1z_3, t\pi, tz_1\pi, tz_3\pi, tz_1z_3\pi;$$

$$t^* \sim t^*, t^*z_1, t^*z_3, t^*z_1z_3, t^*\pi, t^*z_1\pi, t^*z_3\pi, t^*z_1z_3\pi;$$

Die folgende Tabelle gibt die H -Klassen von Involutionsen in H an.

Vertreter *	Konj. Zahl	Sylow-2-U.G. von $C_H(*)$	$ C_H(*) $
z_1	1	$\langle \bar{r}, \bar{y} \rangle$	$2^{10} \cdot 3 \cdot 7$
z_3	14	$\langle \bar{r}, \bar{t} \rangle$	$2^9 \cdot 3$
$z_3^b \pi$	14	$\langle \bar{y}, \bar{t} \rangle$	$2^9 \cdot 3$
$z_3^{1+b} \pi$	42	$\langle \bar{r}, \bar{y} \rangle$	2^9
$z_2 \pi$	28	$\langle \bar{r} \rangle$	$2^8 \cdot 3$
$z_1 z_2 \pi$	28	$\langle \bar{r} \rangle$	$2^8 \cdot 3$
t	168	$\langle \bar{r}, \bar{y} \rangle$	2^7
t^*	168		2^7

LEMMA 3.4. Hypothese (H1) ist nicht erfüllt.

BEWEIS. Lemma 3.1 zeigt, daß $E\langle r, t \rangle$ eine Sylow-2-Untergruppe von $C_G(z_3)$ und $E\langle ry \rangle$ eine Sylow-2-Untergruppe von $C_G(z_3^{1+b} \pi)$ ist. Da $E\langle r, t \rangle$ und $E\langle ry \rangle$ nicht isomorph sind, folgt $z_3 \sim z_3^{1+b} \pi$. Analog folgt $z_3^b \pi \sim z_3^{1+b} \pi$, so daß $z_1 \sim t$ oder $z_1 \sim t^*$ gelten muß. Wir beschränken uns auf die Untersuchung des Falls $z_1 \sim t$, weil im anderen Fall der Beweis analog verläuft. Setze $X = C_H(t)$. Man berechnet $Z(X) = \langle z_1, t \rangle$ und $X' = \langle z_1, z_3, \pi, t \rangle$. Man wählt Gruppen $X_1 \subseteq H$ und $X_2 \subseteq C_G(t)$ derart, daß $|X_i : X| = 2$ gilt. Die Gruppe $N = \langle X_1, X_2 \rangle$ normalisiert $\langle z_1, t \rangle$. Wegen $z_1 \sim_{X_1} z_1 t \sim_{X_2} t$ gilt $|N| = 2^8 \cdot 3$. Weiter normalisiert N die Menge $X \setminus Z(X)$. Diese Menge ist folgendermaßen in H -Klassen von Involutionsen zerlegt:

$$\begin{aligned}
 &tz_3, tz_1 z_3, t\pi, tz_1 \pi, tz_3 \pi, tz_1 z_3 \pi; \\
 &z_3, z_1 z_3; \\
 &z_3^b \pi, z_1 z_3^b \pi; \\
 &z_3^{1+b} \pi, z_1 z_3^{1+b} \pi;
 \end{aligned}$$

Daher normalisiert N die Menge $\{z_3^{1+b} \pi, z_1 z_3^{1+b} \pi\}$. Ist d^* ein Element der Ordnung 3 aus N , so gilt $d^* \in C_G(\langle z_3^{1+b} \pi, z_1 z_3^{1+b} \pi \rangle)$, was der Widerspruch $d^* \in H$ bringt.

Falls Hypothese (H2) erfüllt ist, wählen wir wieder Elemente r, d in der Menge $H \setminus E$ mit $\bar{r}^2 = \bar{d}^3 = (\bar{r} \cdot \bar{d})^7 = (\bar{r} \cdot \bar{d}^2)^4 = 1$. Die Annahme $|C_E(\bar{d})| = 2^5$ führt zu dem Widerspruch $|C_E(\langle r, \bar{d} \rangle)| \geq 4$. Im Fall $C_E(\bar{d}) = \langle z_1 \rangle$ gibt es ein Element j mit $j^2 \in E$ und $d^j = d^{-1}$, für das $[E, j] \subseteq [E, d]$ folgt. Die Diedergruppe $C_{\bar{H}}(\bar{j})$ operiert auf $[E, j]$, einer

Gruppe, die $\langle z_1 \rangle$ nicht enthält. Dies ist nicht möglich, weil das Zentrum einer Sylow-2-Untergruppe von G zyklisch ist. Nach Wahl einer geeigneten Basis $\{z_1, z_2, z_3, z_4, p, \tau, \tau'\}$ von E operiert \bar{d} daher folgendermaßen auf E :

$$\bar{d} \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & & & \\ & 0 & 0 & 1 & 0 & & \\ & 0 & 1 & 1 & 0 & & \\ & 0 & 0 & 0 & 1 & & \\ \hline & & & & & 0 & 1 & 0 \\ & & 0 & & & 1 & 1 & 0 \\ & & & & & 0 & 0 & 1 \end{array} \right].$$

Wir rechnen zuerst in $\tilde{E} = E/\langle z_1 \rangle$. Die Jordansche Normalform der Abbildung, die das Element r auf E bewirkt, enthält drei zweidimensionale und ein eindimensionales Kästchen. Wegen $\langle z_1 \rangle \subseteq [E, r]$ enthält die Jordansche Normalform der Abbildung, die r auf \tilde{E} bewirkt, zwei zweidimensionale und zwei eindimensionale Kästchen. Es folgt $|C_{\tilde{E}}(r) \cap [\tilde{E}, d]| \geq 4$. Man kann \tilde{z}_2 in der Gruppe $C_{\tilde{E}}(r)$ wählen und hat dann $z_3 = z_a^3$ zu definieren. Natürlich gilt $\langle \tilde{z}_3, \tilde{\pi}, \tilde{\tau} \rangle \cap C_{\tilde{E}}(r) \neq \langle 1 \rangle$. Da \tilde{H} nicht auf $\langle \tilde{z}_2, \tilde{z}_3 \rangle$ operiert, folgt $\tilde{z}_3 \notin C_{\tilde{E}}(r)$. Wir wählen $\tilde{\pi}$ in $\langle \tilde{\pi}, \tilde{\tau} \rangle$ so aus, daß $\tilde{z}_3^a \tilde{\pi} \in C_{\tilde{E}}(r)$ gilt. Liegt der Fall $\alpha = 1$ vor, so ersetzt man $\tilde{\pi}$ durch $z_3 \tilde{\pi} = \tilde{\pi}^*$ und $\tilde{\tau}$ durch $\tilde{z}_2 \tilde{z}_3 \tilde{\tau} = \tilde{\tau}^*$. Wir können nun $\alpha = 0$ annehmen. Wegen $[\tilde{E}, r] \cdot [\tilde{E}, d] = \tilde{E}$ gilt $[\tilde{E}, r] = \langle \tilde{z}_4 \tilde{e}_1, \tilde{\tau}' \tilde{e}_2 \rangle$, wobei $\tilde{e}_1 = \tilde{z}_2^a \tilde{z}_3^a \tilde{\pi}^a \tilde{\tau}^a$ und $\tilde{e}_2 = \tilde{z}_2^b \tilde{z}_3^b \tilde{\pi}^b \tilde{\tau}^b$ gesetzt wird. Die Annahme $\tilde{z}_3^r \in \langle \tilde{z}_2, \tilde{z}_3, \tilde{\pi}, \tilde{\tau} \rangle$ führt zum Widerspruch $[\tilde{z}_3, r] \in [\tilde{E}, r] \cap \langle \tilde{z}_2, \tilde{z}_3, \tilde{\pi}, \tilde{\tau} \rangle = \langle 1 \rangle$. Wir wählen \tilde{z}_4 in $\langle \tilde{z}_4, \tilde{\tau}' \rangle$ so aus, daß $\tilde{z}_3^r = \tilde{z}_3(\tilde{z}_4 \tilde{e}_1)$ gilt. Aus $\tilde{\tau}^r = \tilde{\tau} \tilde{z}_4 \tilde{e}_1$ und $[\tilde{z}_4 \tilde{e}_1, r] = \langle 1 \rangle$ folgt die Aussage $\tilde{z}_4^r \in \langle \tilde{z}_2, \tilde{z}_3, \tilde{z}_4, \tilde{\pi}, \tilde{\tau} \rangle < \tilde{H}$. Diese widerspricht Hypothese (H2). Wir wählen nun $\tilde{\tau}'$ aus der Menge $\{\tilde{\tau}', \tilde{z}_4 \tilde{\tau}'\}$ so aus, daß $\tilde{\tau}^r = \tilde{\tau} \tilde{\tau}' \tilde{e}_2$ gilt und erhalten

$$\bar{r} \rightarrow \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & 1+a_3 & 1 & a_5 & a_6 & 0 \\ a_2 a_3 + a_6 b_2 & a_3 + a_6 b_3 & 1+a_3 & a_3 a_5 + a_6 b_5 & a_6(a_3 + b_6) & a_6 \\ 0 & 0 & 1+a_3 & 1 & 0 & 0 \\ b_2 & b_3 & 0 & b_5 & 1+b_6 & 1 \\ a_2 b_3 + b_2 b_3 & (a_3 + b_6) b_3 & b_3 & a_5 b_3 + b_5 b_6 & b_6 + a_6 b_3 & 1+b_6 \end{array} \right]_{\tilde{E}}$$

Da \bar{H} irreduzibel auf \bar{E} operiert, gilt $(a_5, a_6) \neq (0, 0) \neq (b_2, b_3)$. Unter Beachtung der angegebenen Relationen führt eine Matrizenrechnung zu $a_3 = b_6 = 0$, $a_6 = b_3 = 1$, $b_2 = 1 + a_5$ und $b_5 = 1 + a_2$. Falls $a_5 = 1$ gilt, vertauschen wir $\langle \bar{z}_2, \bar{z}_3, \bar{z}_4 \rangle$ mit $\langle \bar{\pi}, \bar{\tau}, \bar{\tau}' \rangle$. Somit können wir $a_5 = 0$ annehmen. Wir betrachten hier nur den Fall $a_2 = 0$, weil der Fall $a_2 = 1$ entsprechend behandelt wird. Wir setzen $y = r^a$ und $t = (r \cdot y)^2$. Die Operation der Diedergruppe $\langle \bar{r}, \bar{y} \rangle$ auf \bar{E} ist durch die folgenden Matrizen bestimmt.

$$\bar{r} \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \beta & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \beta & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 + \alpha & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right], \quad \bar{y} \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 1 + \beta & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 + \alpha & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right],$$

$$\bar{t} \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 + \alpha & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \beta & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline \alpha + \beta & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right].$$

Vertreter der vier H -Klassen von Involutionsen in $E \setminus \langle z_1 \rangle$, ihre Längen und die Ordnungen der Zentralisatoren der angegebenen Vertreter in der Gruppe H sind der folgenden Aufstellung zu entnehmen.

$$\begin{aligned} z_2 &\sim z_4 \pi \tau (42, 2^9), \\ z_4 &\sim z_2 z_3 \tau' (14, 2^9 \cdot 3), \\ z_4 \tau &\sim z_2 z_3 z_4 \pi \tau \tau' (14, 2^9 \cdot 3), \\ &\pi (56, 2^7 \cdot 3). \end{aligned}$$

LEMMA 3.5. Hypothese (H2) sei erfüllt. Dann zerfällt die Gruppe H über E .

BEWEIS. Die Gruppe H zerfalle nicht über E . Dann berechtigt die Aussage des Lemmas 3.1, $\langle r, y \rangle$ als Diedergruppe der Ordnung 16 in H zu wählen. Man sieht, daß $t^2 = z_1$ gilt und t^* eine Involution ist. Die Nebenklasse t^*E enthält genau 16 Involutionen, die unter H alle zu t^* konjugiert sind, so daß t^* ein Vertreter der einzigen Involutionenklasse in $H \setminus E$ ist. Aus der Gleichung $C_H(t^*) = C_E(t) \cdot \langle t^*, rz_2 \rangle$ folgt $\langle z_1 \rangle \subseteq C_H(t^*)' \subseteq E$ und damit der gewünschte Widerspruch $z_1 \sim t^*$.

Lemma 3.6. Hypothese (H2) ist nicht erfüllt.

BEWEIS. Angenommen, es gelte $z_2 \sim z_4$. Dann sind $\langle z_1, z_2 \rangle$ und $\langle z_1, z_4 \rangle$ als Zentren von Sylow-2-Untergruppen von $C_G(z_2)$ bzw. $C_G(z_4)$ konjugiert und diese Konjugation erfolgt, der Aussage von Lemma 3.1 entsprechend, mit einem Element der Gruppe H . Dieser Widerspruch zeigt, daß $z_2 \sim z_4$ gilt. Die Elemente z_2, z_4 und $z_4\tau$ sind Vertreter verschiedener G -Klassen von Involutionen. Wir setzen $X = C_H(t) = \langle z_1, z_2z_3\tau, z_4\pi\tau, \tau\tau' \rangle \langle r, y \rangle$ und berechnen $Z(X) = \langle z_1, t \rangle$ und $X' = \langle z_1, z_2z_3\tau', z_4\pi\tau, t \rangle$. Wie im Beweis von Lemma 3.4 erhält man jetzt einen Widerspruch, indem man die Konjugation der Elemente der Menge $X \setminus Z(X)$ betrachtet.

LEMMA 3.7. Ist die Gruppe \bar{H} isomorph zu $\text{PSL}(2, 7)$ und weiter E elementar-abelsch, so ist G isomorph zu M_{23} .

BEWEIS. Die vorausgegangenen Lemmata zeigen, daß E elementar-abelsch der Ordnung 16 ist. Die Behauptung folgt nun mit Hilfe des Resultats [9, Theorem, Seite 20].

4. Der Fall: $\bar{H} \cong A_6$ oder $\bar{H} \cong A_7$.

Mit f wird ein fest gewähltes Element der Ordnung 5 aus H bezeichnet. Lemma 1.8 zeigt $E = E_1 \vee C$ und $E_1 = [E, f] \cong D_8 \vee Q_8$. Die Gruppe $C = C_E(f)$ ist dabei isomorph zu einer der folgenden Gruppen: Z_4, Z_8, D_8, Q_8 .

LEMMA 4.1. Die Gruppe C ist nicht zyklisch.

BEWEIS. Da \bar{H} auf $C = Z(E)$ operiert, folgt $C \subseteq Z(H)$. Sei i eine beliebige Involution aus $H \setminus \langle z_1 \rangle$. Aus $C \subseteq Z(C_H(i)_2)$ folgt $z_1 \sim i$, womit wir einen Widerspruch zu Glauberman's Satz erhalten haben.

Es bleibt in diesem Paragraphen die Möglichkeit zu untersuchen, daß E extraspeziell der Ordnung 2^7 ist. Es gibt zwei Isomorphietypen solcher Gruppen, nämlich das zentrale Produkt dreier Diedergruppen,

gibt sich $\bar{t}^2 = 1$, $\langle \bar{t}, \bar{r} \rangle \langle \bar{d} \rangle \cong A_4$ und

$$\bar{t} \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & & \\ 1 & 1 & 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & & \\ \hline & & & & 1 & 0 \\ & & & & 0 & 1 \end{array} \right]_{\bar{E}}, \quad \bar{r} \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & & \\ 1 & 1 & 0 & 1 & & \\ 1 & 0 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & \\ \hline & & & & 1 & 0 \\ & & & & 0 & 1 \end{array} \right]_{\bar{E}}.$$

Wähle $\bar{y} \in \bar{A}$ mit $\bar{y}^2 = 1$, $[t, \bar{y}] = 1$ und $\bar{d}^{\bar{y}} = \bar{d}^{-1}$. Das Element \bar{y} operiert auf $C_{\bar{E}}(\bar{t})$, $[\bar{E}, \bar{t}]$, $C_{\bar{E}}(\bar{d})$ und $[\bar{E}, \bar{d}]$. Offenbar gelten die Gleichungen $(\tilde{q}_4, \bar{y}) = [\tilde{q}_1, \bar{y}] = \tilde{d}_1, \bar{y}] = 1$ und $\tilde{q}_2^{\bar{y}} = \tilde{q}_1 \tilde{q}_2$. Wegen $(\text{Aut } E_1)' \cong A_5$ operiert \bar{y} nicht auf E_1 , so daß $\bar{d}_2^{\bar{y}}$ eine Involution in der Menge $C_E(q_4) \setminus E_1$ ist. Daraus folgt $\bar{d}_2^{\bar{y}} = \tilde{d}_1 \tilde{d}_2 \tilde{q}_4$. Aus $\bar{t} \sim_{\bar{H}} \bar{y}$ ergibt sich $[\bar{E}, \bar{y}] = \langle \tilde{q}_1, \tilde{d}_1 \tilde{q}_4 \rangle$ und daher $\tilde{q}_3^{\bar{y}} = \tilde{d}_1 \tilde{q}_3 \tilde{q}_4$. Da \bar{A} nicht auf $E_1 = C_E(\langle q_3, q_4 \rangle)$ operiert, folgt mit $\tilde{q}_3^{\bar{y}} = \tilde{d}_1 \tilde{q}_3 \tilde{q}_4$ der letzte Teil der Behauptung.

LEMMA 4.3. Die Gruppe E sei zu $D^{(3)}$ isomorph. Dann ist $T = E \langle r, y \rangle$ eine Sylow-2-Untergruppe von G und es gelten die Relationen $r^2 = y^2 = 1$, $t = (ry)^2$, $t^2 = \bar{d}_1^2$ oder $t^2 = z_1$,

$$r \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & \\ \hline \beta & & & & 1 & 0 \\ & 0 & & & & \\ \gamma & & & & 0 & 1 \end{array} \right], \quad y \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|cc} 1 + \alpha & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline \beta^* & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right],$$

$$t \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \\ 1 + \gamma & 1 & 1 & 1 & 0 & \\ 1 + \alpha & 0 & 0 & 1 & 0 & \\ 1 + \alpha & 1 & 0 & 0 & 1 & \\ \hline \gamma & & & & 1 & 0 \\ & 0 & & & & \\ 0 & & & & 0 & 1 \end{array} \right].$$

Diese Kästchen geben die Bilder von $d_1, d_2, q_1, \dots, q_4$ unter den Abbildungen an, die r, y, t auf E bewirken, Sie sind nicht Matrizen linearer Abbildungen. Die folgende Tabelle gibt eine Übersicht über die H -Klassen von Involuntionen.

Vertreter	$C_H(*)_2$	Konj. Zahl		Bemerkungen
		$X \cong A_6$	$X \cong A_7$	
z_1	T	1	1	—
d_1	$\langle d_1, q_1, q_2, q_3, q_4 \rangle$ $\cdot \langle r, y d_2^{1+\alpha} \rangle$	30	70	—
$q_1 q_3$	$\langle d_1, d_2, q_1, q_3, q_2 \cdot q_4 \rangle$ $\cdot \langle t q_2^{1+\alpha+\gamma} \rangle$	40	—	—
Falls $t^2 = d_1^\alpha$: $t_1 = t(q_2 q_4)^\alpha$	$\langle z_1, d_1, q_4, q_1^{\gamma+\alpha} q_3 \rangle$ $\cdot \langle r(q_2 q_3)^\alpha, y(d_2 q_1^\gamma)^\alpha \rangle$	8 in tE	8 oder 24 in tE	mehr als 8 Inv. gibt es im Fall $\gamma = 1 + \alpha$
$t_2 = t q_2^\alpha q_3$ Falls $t^2 = zt$:	—	16 in tE	24 in tE	
$t q_4$	$\langle z_1, d_1, q_1^{1+\gamma} q_3, q_4 \rangle$ $\cdot \langle r q_3, y q_4 \rangle$	8 in tE	8 oder 24 in tE	mehr als 8 Inv. gibt es im Fall $\gamma = 0$
$t q_3$	—	16 in tT	24 in tE	

BEWEIS. Falls $H \setminus E$ keine Involuntionen enthält, folgt aus der Gleichung $C_E(d_1) = \Omega_1(G_H(d_1)_2)$, daß $\langle z_1 \rangle$ eine charakteristische Untergruppe von $C_H(d_1)_2$ ist und daher $z_1 \sim d_1$. Im Fall $\bar{H} \cong A_6$ ist $q_1 q_3$ Vertreter der dritten H -Klasse von Involuntionen. Wieder folgt $z_1 \sim q_1 q_3$ und damit ein Widerspruch zu Glauberman's Satz.

Wir wählen r, y als Urbilder von \bar{r}, \bar{y} in H mit $r^2 = y^2 = 1$ und setzen $t = (ry)^2$. Wegen $t^2 \in C_E(\langle d_1, q_1, q_3, q_4 \rangle) = \langle d_1, q_1 \rangle$ und $\langle t^2 \rangle \triangleleft \triangleleft \langle r, y \rangle$ folgt $t^2 \in \langle z_1, d_1 \rangle$, so daß die Fälle $t^2 = d_1^\alpha$ mit $\alpha \in \{0, 1\}$ und $t^2 = z_1$ zu untersuchen sind. Mit der in der Behauptung vereinbarten Bezeichnung ergibt sich:

$$r \rightarrow \left[\begin{array}{cccccc|c} \alpha_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & & \\ \beta_1 & 1 & 1 & 0 & 1 & & \\ \gamma_1 & 1 & 0 & 1 & 0 & & 0 \\ \delta_1 & 0 & 0 & 0 & 1 & & \\ \hline \gamma & & & & & 0 & 1 \\ \beta & & 0 & & & 1 & 0 \end{array} \right], \quad y \rightarrow \left[\begin{array}{cccccc|cc} \alpha_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ \beta_2 & 1 & 1 & 0 & 0 & & 0 & 1 \\ \gamma_2 & 0 & 0 & 1 & 0 & & 0 & 0 \\ \delta_2 & 0 & 0 & 1 & 1 & & 0 & 0 \\ \hline \beta^* & 1 & 0 & 0 & 0 & & 1 & 1 \\ \gamma^* & 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 1 \end{array} \right].$$

BEWEIS. Die Gruppe E besitzt genau 54 nichtzentrale Involutionen. In $C_{\bar{H}}(d_4)$ liegt eine zu A_5 isomorphe Gruppe \bar{A} . Diese Gruppe normalisiert $\bar{E} = E/\langle z_1, d_4 \rangle$. In \bar{E} gibt es genau 5 Elemente, die als Mengen in E nur Involutionen enthalten, nämlich $\bar{d}_1, \bar{d}_2, \bar{d}_1\bar{d}_2\hat{q}_1, \bar{d}_1\bar{d}_2\hat{q}_2, \bar{d}_1\bar{d}_2\hat{q}_1\hat{q}_2$. Man wählt ein Element \bar{d} der Ordnung 3 aus $C_{\bar{A}}(d_1)$ und rechnet wie im Beweis von Lemma 4.2 nach, daß \bar{f} und \bar{d} Abbildungen auf \bar{E} bewirken, zu denen die angegebenen Matrizen gehören. Die Elemente \bar{t}, \bar{r} werden wie im Beweis von Lemma 4.2 definiert. Sei \bar{y} ein Element aus \bar{H} mit $\bar{y}^3 = 1$, $[\bar{t}, \bar{y}] = 1$ und $\bar{d}^{\bar{y}} = \bar{d}^{-1}$. Da \bar{y} die Gruppen $C_{\bar{E}}(\bar{t})$, $[\bar{E}, \bar{t}]$, $C_{\bar{E}}(\bar{d})$ und $[\bar{E}, \bar{d}]$ normalisiert, gilt $[\bar{d}_1, \bar{y}] = [\bar{q}_1, \bar{y}] = 1$ und $\bar{q}_2^{\bar{y}} = \bar{q}_1\bar{q}_2$. Da \bar{y} weiter $\langle \bar{d}_1, \bar{d}_3, \bar{d}_4 \rangle$ normalisiert, besitzt \bar{y} einen Fixpunkt in $\langle \bar{d}_3, \bar{d}_4 \rangle^\#$. Die Annahme $\bar{d}_4^{\bar{y}} \in \langle \bar{d}_1, \bar{d}_4 \rangle$ erzwingt, daß \bar{H} die Gruppe $\langle z_1, \bar{d}_4 \rangle = Z(E_1 \langle d_4 \rangle)$ normalisiert, daß $\bar{H} \cong \cong A_6$ also auf \bar{E} operiert, was nicht möglich ist. Da \bar{H} nicht auf $\langle \bar{d}_3, \bar{d}_4 \rangle$ operiert, erhält man $\bar{d}_3^{\bar{y}} = \bar{d}_1\bar{d}_4$, $[\bar{d}_3\bar{d}_4, \bar{y}] = 1$ und $\bar{d}_4^{\bar{y}} = \bar{d}_1\bar{d}_3$. Aus $[\bar{E}, \bar{y}] = \langle \bar{q}_1, \bar{d}_1\bar{d}_3\bar{d}_4 \rangle$ folgt schließlich $\bar{d}_3^{\bar{y}} = \bar{d}_1\bar{d}_2\bar{d}_3\bar{d}_4$.

LEMMA 4.7. Die Gruppe \bar{H} ist weder zu A_6 noch zu A_7 isomorph.

BEWEIS. Es bleibt die Möglichkeit auszuschließen, daß die Isomorphismen $\bar{H} \cong A_6$ und $E \cong D^{(2)}Q$ gelten. Man geht dazu wie im Beweis von Lemma 4.4 vor und sieht, daß die Menge $H \setminus E$ Involutionen enthält. Die Gruppe $T_1 = \langle z_1, d_1, d_2, q_1, q_2, d_3d_4 \rangle \langle r, y \rangle$ ist eine maximale Untergruppe von $T = E \langle r, y \rangle$. Sei t_1 eine Involution in $tE \cap T_1$. Vertreter der Involutionenklassen in T_1 sind z_1, d_1, t_1 . Weiter sind d_3, d_4 Vertreter verschiedener H -Involutionenklassen mit den Längen 12. Man berechnet $C_H(d_3)_2 = \langle d_1, d_2, q_1, q_2, d_3 \rangle \langle r^*, t^* \rangle$ mit $r^* \in rE$, $t^* \in tE$ und $C_H(d_3)_2 = \langle z_1 \rangle$, woraus $d_3 \sim z_1$ und $d_3 \sim d_1$ folgt. Wegen $\langle z_1 \rangle = C_H(d_4)_2$ erzwingt [12, Lemma 5.38], daß $d_3 \sim t_1 \sim d_4$ gilt. Die Konjugation $d_3 \sim d_4$ muß mit einem Element der Gruppe H erfolgen. Damit haben wir einen Widerspruch erhalten, durch den der Beweis des Lemmas vervollständigt wird.

5. Der Fall: $\bar{H} \cong A_5$.

Mit f wird ein fest gewähltes Element der Ordnung 5 aus H bezeichnet. Lemma 1.6 zeigt, daß $E = E_1 \vee C$ mit $E_1 = [E, f] \cong D_8 \vee D_8$ gilt. Die Gruppe C ist dabei isomorph zu einer der folgenden Gruppen: Z_2, Z_4, Z_8, D_8, Q_8 . Wie in § 4 beweist man.

es zwei nicht äquivalente Operationen einer zu A_5 isomorphen Gruppe auf E . Wir setzen

$$\bar{j} \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \\ \hline & & & & 1 & 0 \\ & & 0 & & 0 & 1 \end{array} \right]_{\bar{E}}, \quad \bar{j} \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]_{\bar{E}}.$$

Die Elemente \bar{j}, \bar{j} erfüllen die Relationen $\bar{j}^2 = \bar{j}^5 = (\bar{j} \cdot \bar{j})^5 = (\bar{j}^3 \cdot \bar{j})^3 = 1$. Dies sind erzeugende Relationen für A_5 , wie man [1, Seite 137, Zeile 10] entnehmen kann. Wir können daher $\bar{H} = \langle \bar{j}, \bar{j} \rangle$ annehmen. Die Gruppe $\langle \bar{j}, \bar{rt} \rangle$ ist eine Sylow-2-Untergruppe von \bar{H} . Man wählt rt als Involution in H und erhält

$$\bar{rt} \rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & & \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & & \\ \hline \beta & & & & & 1 & 0 \\ & & 0 & & & 0 & 1 \end{array} \right]_{\bar{E}}.$$

Wir geben Vertreter der H -Involutionenklassen in $E \setminus \langle z_1 \rangle$ und deren Längen an: $d_1(30)$, $d_1 d_2 q_3(20)$, $d_1 d_2 q_3 q_4(20)$. Die Gruppe

$$T_1 = \langle z_1, d_1, d_2, q_1, q_2, q_4 \rangle \langle rt, j \rangle$$

ist eine maximale Untergruppe von $T = E \langle rt, j \rangle$ und enthält genau die H -Involutionenklassen mit Vertretern z_1, d_1, rt und, wenn der Fall $\gamma = 1$ vorliegt, rtq_4 . Wegen $\langle z_1 \rangle = \mathcal{O}^1(C_H(e)_2)$ für $e \in \{d_1 d_2 q_3, d_1 d_2 q_3 q_4\}$ berechtigt [12, Lemma 5.38] $d_1 d_2 q_3 \sim rt$ anzunehmen. Aus $\Omega_1(C_H(rt)_2) = \langle z_1 \rangle$ folgt ein Widerspruch.

LEMMA 5.4. In Fall $E \cong D^{(2)}Q$ normalisiert \bar{H} die Gruppe E_1 nicht.

BEWEIS. Man darf $\bar{H} = \langle \bar{f}, \bar{d} \rangle$ setzen, wobei die Bezeichnungen aus Lemma 4.6 zugrunde liegen. Dann ist $\langle \bar{t}, \bar{r} \rangle$ eine Sylow-2-Untergruppe von \bar{H} und t kann als Involution in H gewählt werden.

$$\bar{t} \rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & & \\ \hline \beta_1 & & & & & 1 & 0 \\ & 0 & & & & 0 & 1 \end{array} \right]_E.$$

Wir geben Vertreter der H -Klassen von Involutionen in $E \setminus \langle z_1 \rangle$ und deren Längen an: $d_1(10)$, $d_1 d_3(12)$, $d_1 d_4(12)$, $q_1 d_3 d_4(20)$. Man berechnet $(C_H(e_2))^n = \langle z_1 \rangle$ für $e \in \{d_1 d_3, d_1 d_4\}$, weiter $\langle z_1 \rangle = \mathcal{C}^1(C_H(q_1 d_3 d_4)_2)$ und $(C_H(q_1 d_3 d_4)_2)' = \langle d_1, q_1 \rangle$, so daß $d_1, d_1 d_3, d_1 d_4, q_1 d_3 d_4$ Vertreter verschiedener G -Klassen von Involutionen sind. Vertreter der H -Klassen von Involutionen in $H \setminus E$ sind t , zusätzlich td_3 , falls $\beta_1 = 0$ gilt, und td_4 , falls $\beta_2 = 0$ gilt. Nun zeigt [12, Lemma 5.38], daß $d_1 d_3 \sim td_4$ und $d_1 d_4 \sim td_3$ gilt, also insbesondere $\beta_1 = \beta_2 = 0$ und $t \sim q_1 d_3 d_4$. Die Gleichung $C_H(t)_2 = \langle z_1 \rangle$ liefert nun einen Widerspruch.

LEMMA 5.5. Es gilt $E \not\cong D^{(2)}Q$.

BEWEIS. Die Gruppe \bar{H} operiert nicht auf E_1 . Sei I die Menge der Elemente in \bar{E} , deren Urbilder in E von z_1 verschiedene Involutionen sind. Kein Element in I wird von \bar{H} zentralisiert; dazu vergleiche man mit Lemma 4.6. Offenbar gilt $N_{\bar{H}}(\langle f \rangle) = \langle \bar{f}, \bar{r}\bar{t} \rangle$ und

$$\bar{r}\bar{t} \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & & \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & & \\ \hline & & & & 1 & 0 \\ & 0 & & & 0 & 1 \end{array} \right]_E.$$

Wähle $\bar{j} \in \bar{H}$ mit $\bar{j}^2 = 1$ und $[\bar{j}, \bar{rt}] = 1$. Das Element \bar{j} normalisiert die Gruppen $[\bar{E}, \bar{rt}] = \langle \bar{d}_1, \bar{q}_1 \bar{q}_2 \rangle$ und $C_{\bar{E}}(\bar{rt}) = \langle \bar{d}_1, \bar{q}_1 \bar{q}_2, \bar{d}_3, \bar{d}_4 \rangle$, so daß $[\bar{d}_1, \bar{j}] = 1$ folgt. Man berechnet $C_{\bar{E}}(\bar{rt}) \cap I = \{ \bar{d}_1, \bar{d}_3, \bar{d}_4, \bar{d}_1 \bar{d}_3, \bar{d}_1 \bar{d}_4, \bar{q}_1 \bar{q}_2 \bar{d}_3 \bar{d}_4, \bar{d}_1 \bar{q}_1 \bar{q}_2 \bar{d}_3 \bar{d}_4 \}$. Das Element \bar{d}_3 hat unter der Wirkung von \bar{H} mehr als ein Konjugiertes. Es gilt $\bar{d}_3^{\bar{j}} \neq \bar{d}_1 \bar{d}_3$, weil andernfalls \bar{H} die Gruppe $C_{\bar{E}}(E_1 \langle \bar{d}_3 \rangle) = \langle \bar{d}_3, \bar{d}_4 \rangle$ zentralisieren würde, was nicht möglich ist. Im Fall $\bar{d}_3^{\bar{j}} \neq \bar{d}_1 \bar{d}_4$ folgt der Widerspruch $\bar{d}_4^{\bar{j}} \in \{ \bar{d}_4, \bar{d}_1 \bar{d}_4 \}$. Man erhält $\bar{d}_3^{\bar{j}} = \bar{d}_1 \bar{d}_4$ und $[\bar{H}, \bar{d}_3 \bar{d}_4] = \langle 1 \rangle$. Da die Zentralisatoren von Elementen der Ordnung 4 aus E in $(\text{Aut } D^{(2)}Q)' \cong \text{PSP}(4, 3)$ konjugiert und zu Σ_6 isomorph sind, gibt es zwei nicht äquivalente Operationen einer zu A_5 isomorphen Gruppe auf E .

Wir setzen

$$\bar{f} \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \\ \hline & & & & 1 & 0 \\ & & & & 0 & 1 \end{array} \right]_{\bar{E}}, \quad \bar{j} \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline & & & & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right]_{\bar{E}}$$

Die Elemente \bar{f}, \bar{j} erfüllen die Relationen $\bar{j}^2 = \bar{f}^5 = (\bar{j} \cdot \bar{f})^5 = (\bar{f}^3 \cdot \bar{j}) = 1$, erzeugende Relationen für A_5 , so daß wir $\bar{H} = \langle \bar{f}, \bar{j} \rangle$ annehmen dürfen. Wir geben Vertreter der H -Klassen von Involuntoren in $E \setminus \langle z_1 \rangle$ und deren Längen an: $d_1(30), d_3(12), d_4(12)$. Wir wählen rt als Involution in H und erhalten

$$rt \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \\ \hline \beta & & & & 1 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]_{\bar{E}}$$

Die Gruppe $T_1 = E_1 \langle d_3 d_4 \rangle \langle rt, j \rangle$ ist eine maximale Untergruppe von $T = E \langle rt, j \rangle$ und enthält die H -Involutionenklassen mit Vertretern z_1, d_1, rt und $rt d_3 d_4$, falls $\beta = 1 + \gamma$ gilt. Die Gleichung $\langle z_1 \rangle = \Omega^1(C_H(e)'_2)$

für $e \in \{\bar{d}_3, \bar{d}_4\}$ zeigt, daß $z_1, \bar{d}_1, \bar{d}_2, \bar{d}_4$ Vertreter verschiedener G -Klassen von Involuntionen sind. [12, Lemma 5.38] berechtigt, $\bar{d}_3 \sim rt$ anzunehmen. Aus $\mathcal{C}^1(C_{\mathbb{H}}(rt)_2) = \langle z_1 \rangle$ folgt ein Widerspruch, durch den der Beweis des Lemmas vervollständigt wird.

LEMMA 5.6. Im Fall $\bar{H} \cong A_5$ ist G isomorph zu J_2 oder J_3 .

BEWEIS. Die vorausgegangenen Lemmata zeigen, daß E eine extraspezielle Gruppe der Ordnung 2^5 ist. Die Behauptung wird nun durch das Resultat [10, Theorem, Seite 25] bewiesen.

Die Zusammenfassung der Lemmata 1.2, 2.8, 3.7, 4.7, 5.6 beweist den Hauptsatz.

Ich danke Herrn Prof. Dr. Dieter Held, der die Arbeit anregte.

LITERATUR

- [1] H. COXETER - W. MOSER, *Generators and Relations for Discrete Groups*, Springer (1972).
- [2] G. GLAUBERMAN, *Central elements of core free groups*, Journal of Algebra, **4** (1966), pp. 403-421.
- [3] D. GORENSTEIN, *Finite Groups*, Harper and Row (1968).
- [4] D. GORENSTEIN - J. H. WALTER, *The characterization of finite groups with dihedral Sylow-2-subgroups I, II, III*, Journal of Algebra, **2** (1965), pp. 85-151, 218-270, 354-393.
- [5] D. HELD, *The simple groups related to M_{24}* , Journal of Algebra, **13** (1969), pp. 253-296.
- [6] D. HELD - U. SCHOENWAELDER, *A characterization of the simple group M_{24}* , Mathematische Zeitschrift, **117** (1970), pp. 289-308.
- [7] B. HUPPERT, *Endliche Gruppen I*, Springer (1967).
- [8] B. HUPPERT, *Geometric Algebra*, Lecture notes, University of Illinois (1970).
- [9] Z. JANKO, *A characterization of the Mathieu simple groups II*, Journal of Algebra, **9** (1968), pp. 20-41.
- [10] Z. JANKO, *Some new simple groups of finite order*, Symposia Math. I, Roma (1968), pp. 25-64.
- [11] I. SCHUR, *Über die Darstellungen der symmetrischen und alternierenden Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen*, Journal f. r. u. a. Math., **139** (1911), pp. 155-250.
- [12] J. G. THOMPSON, *Nonsolvable finite groups all of whose local subgroups are solvable*, Bull. Am. Math. Soc. **74** (1968), pp. 383-437.

Manoscritto pervenuto in redazione il 12 luglio 1973.