Rendiconti
del
Seminario Matematico
della
Università di Padova

Sandra Chiaruttini
Tomaso Millevoi

Sulla proprietà di estensione nei domini noetheriani

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 53 (1975), p. 117-121
<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1975__53__117_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 53 (1975)

Sulla proprietà di estensione nei domini noetheriani.

SANDRA CHIARUTTINI e TOMASO MILLEVOI (*)

SUMMARY - This is a direct proof that in a noetherian integral domain the following conditions are equivalent:

(i) each ideal of height 2 has grade 2;

(ii) each ideal generated by 2 elements and free outside an ideal of height $\geqslant 2$ has homological dimension $\leqslant 1$. As proved by C. Margaglio and S. Baldassarri Ghezzo, a domain verifies these conditions iff its structural sheaf has the extension property.

Sia $(X, \boldsymbol{O}_x)$ uno spazio anellato irriducibile. Si dice che questo spazio soddisfa alla proprietà di estensione (P.E.) se ogni sua sezione σ, definita per lo meno fuori da un chiuso di codimensione $\geqslant 2$, è restrizione di una sezione globale. Tale definizione è dovuta a M. Baldassarri (cfr. [2], [3]).

C. Margaglio e S. Baldassarri Ghezzo tradussero in termini di anelli la proprietà di estensione (ottenendo due formulazioni diverse) e trovarono inoltre condizioni affinchè un dominio di integrità neotheriano soddisfi alla P.E.

Precisamente:

i) *Un dominio di integrità noetheriano A soddisfa alla* P.E. *se e solo se ogni suo ideale di altezza due ha grado due* (cfr. [8], Prop. 2, pag. 392).

(*) Indirizzo degli A.A.: Seminario Matematico, Università, 35100 Padova.

Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A. quando S. Chiaruttini fruiva di una borsa di studio per laureandi del C.N.R.

ii) *Un dominio di integrità noetheriano A soddisfa alla* P.E. *se e solo se ogni suo ideale generato da due elementi a libero fuori da un ideale di altezza maggiore di uno, ha dimensione omologica minore di due* (cfr. [4], Teor. 3, pag. 245).

In questo lavoro si dimostra direttamente l'equivalenza delle due condizioni i), ii).

1. Per comodità del lettore riportiamo le definizioni di anello soddisfacente la proprietà di estensione. Gli anelli considerati saranno sempre domini di integrità noetheriani.

DEF. 1. Dicesi *elemento ammissibile* su un dominio di integrità A ogni elemento n di un sopra-A-modulo senza torsione N, di A, tale che l'ideale $A: n$ abbia altezza > 1 (cfr. [8], pag. 391).

DEF. 2. *A soddisfa alla* P.E. *se ogni elemento ammissibile su A appartiene ad A* (cfr. [8], pag. 391).

DEF. 3. Siano $\mathfrak{I}$ e $\mathfrak{B}$ due ideali di un anello A. Si dirà (cfr. [4], pag. 233) che $\mathfrak{I}$ è *libero fuori di* $\mathfrak{B}$ se esiste un isomorfismo $\bigcap\limits_{\mathfrak{P}\not\supset\mathfrak{B}} A_{\mathfrak{P}} \simeq \bigcap\limits_{\mathfrak{P}\not\supset\mathfrak{B}} \mathfrak{I}_{\mathfrak{P}}$ (l'intersezione essendo presa su tutti gli ideali primi $\mathfrak{P}$ di A che non contengono $\mathfrak{B}$) il quale, per ogni ideale primo $\mathfrak{P} \not\supset \mathfrak{B}$, si estende ad un isomorfismo di $A_{\mathfrak{P}}$ su $\mathfrak{I}_{\mathfrak{P}}$.

DEF. 4. *A soddisfa alla* P.E. se per ogni ideale $\mathfrak{J}$ di A, tale che $h(\mathfrak{J}) > 1$, nel corpo delle frazioni di A risulta $\bigcap\limits_{\mathfrak{P}\not\supset\mathfrak{J}} A_{\mathfrak{P}} = A$, l'intersezione essendo presa sopra tutti gli ideali primi $\mathfrak{P}$ di A che non contengono $\mathfrak{J}$ (cfr. [4], pag. 233).

2. Per il confronto delle condizioni i), ii) avremo bisogno di alcuni lemmi:

LEMMA 1. *Siano $\mathfrak{I}$ e $\mathfrak{B}$ ideali di A, x un elemento non nullo di A. Se l'ideale $x\mathfrak{I}$ è libero fuori di $\mathfrak{B}$, allora anche $\mathfrak{I}$ è libero fuori di $\mathfrak{B}$.*

DIM. La moltiplicazione per x nel corpo delle frazioni di A subordina un isomorfismo tra $\mathfrak{I}_{\mathfrak{P}}$ e $(x\mathfrak{I})_{\mathfrak{P}}$ e tra $\bigcap\limits_{\mathfrak{P}\not\supset\mathfrak{B}} \mathfrak{I}_{\mathfrak{P}}$ e $\bigcap\limits_{\mathfrak{P}\not\supset\mathfrak{B}} (x\mathfrak{I})_{\mathfrak{P}}$, da cui la tesi.

LEMMA 2. *Se $\mathfrak{B}$ è un ideale di altezza > 1, ed in A ogni ideale primo associato ad un ideale principale ha altezza < 2, si ha $\bigcap_{\mathfrak{P} \not\supset \mathfrak{B}} A_{\mathfrak{P}} = A$.*

DIM. $A = \bigcap A_{\mathfrak{P}}$ se $\mathfrak{P}$ varia nell'insieme dei primi massimali associati agli ideali principali (cfr. [7], teor. 53, pag. 34) ed in base all'ipotesi nessuno di tali ideali primi può contenere $\mathfrak{B}$. c.v.d.

OSSERVAZIONE 3. Se in A ogni ideale di altezza due ha grado due (condizione i)) allora ogni ideale primo associato ad un ideale principale (non nullo) avendo grado 1, ha altezza 1 e dunque in questo caso A soddisfa le ipotesi del lemma 2.

TEOREMA 4. *Sia A un dominio d'integrità noetheriano. Se ogni ideale di altezza due di A ha grado due, allora ogni ideale generato da due elementi, libero fuori da un ideale di altezza maggiore di uno ha dimensione omologica minore di due.*

DIM. Consideriamo un ideale non nullo $\mathfrak{J}$ generato da due elementi. Allora (cfr. [10], Th. 7, pag. 60) l'altezza di $\mathfrak{J}$ è uguale a 1 o a 2. Se $h(\mathfrak{J}) = 2$, per l'ipotesi $\operatorname{gr}\mathfrak{J} = 2$; essendo generato da due elementi ed avendo grado 2, $\mathfrak{J}$ è generato da una A-successione (cfr. [9], Teor. 1, pag. 357) di lunghezza due ed allora (cfr. [6], 152.4 pag. 191 o [12] (8) pag. 245) $\operatorname{dh}\mathfrak{J} = 1$. Supponiamo ora che $h(\mathfrak{J}) = 1$ e che $\mathfrak{J} = (a, b)$ sia libero fuori da un ideale $\mathfrak{B}$ di altezza maggiore di uno. Se $\mathfrak{J}$ è principale, allora $\mathfrak{J} \simeq A$ e quindi $\operatorname{dh}\mathfrak{J} = 0$. Essendo A noetheriano, possiamo porre $a = cd$, $b = ce$, con d, e privi di fattori irriducibili comuni: se $\mathfrak{J} = (a, b)$ non è principale, (d, e) è un ideale proprio. Vogliamo provare che d, e è una A-successione. Per il lemma 2, $\bigcap_{\mathfrak{P} \not\supset \mathfrak{B}} A_{\mathfrak{P}} = A$ e $\bigcap_{\mathfrak{P} \not\supset \mathfrak{B}} (d, e)_{\mathfrak{P}}$ risulta un ideale $\mathfrak{X}$ di A. Per il lemma 1, l'ideale (d, e) è libero fuori di $\mathfrak{B}$, si ha quindi $\mathfrak{X} = \bigcap_{\mathfrak{P} \not\supset \mathfrak{B}} (d, e)_{\mathfrak{P}} \simeq \bigcap_{\mathfrak{P} \not\supset \mathfrak{B}} A_{\mathfrak{P}} = A$ e dunque $\mathfrak{X}$ è o uguale ad A, o un ideale principale proprio di A. Se, per assurdo, d, e non fosse una A-successione, l'elemento e apparterrebbe ad un ideale $\mathfrak{Q}$ associato a (d) e risulterebbe $h(\mathfrak{Q}) = 1$ (osservazione 3), $(d, e) \subset \mathfrak{Q}$; da cui $\mathfrak{Q} \not\supset \mathfrak{B}$, $(d, e)_{\mathfrak{Q}} \not\ni A$ e dunque $\bigcap_{\mathfrak{P} \not\supset \mathfrak{B}} (d, e)_{\mathfrak{P}} \neq A$. L'ideale $\mathfrak{X}$ sarebbe quindi un ideale proprio di A, e dunque un ideale principale proprio: $\mathfrak{X} = (x)$. E si avrebbe $(d, e) \subset \mathfrak{X} = (x)$ contro l'ipotesi che d ed e non abbiano fattori irriducibili in comune. Dunque d, e è una A-successione, dunque $\operatorname{dh}(d, e) = 1$ e quindi, essendo la moltiplicazione per c un isomorfismo $(d, e) \simeq (a, b)$, $\operatorname{dh}(a, b) = 1$.

Abbiamo così provato che i) implica ii).

3. Vediamo ora l'implicazione inversa.

LEMMA 5. *Due ideali che ammettono decomposizione primaria e tali da avere localizzazioni uguali rispetto ad ogni ideale primo, coincidono.*

DIM. Se le localizzazioni dei due ideali coincidono, coincidono le loro $(A - \mathfrak{P})$-componenti (cfr. [10], Prop. 14, pag. 46); da qui la tesi poichè ogni ideale che ammette decomposizione primaria è intersezione delle sue $(A - \mathfrak{P})$-componenti.

TEOREMA 6. *Sia A un dominio di integrità noetheriano in cui ogni ideale generato da due elementi e libero fuori da un ideale di altezza maggiore di uno ha dimensione omologica minore di due. Allora ogni ideale di A di altezza due ha grado due.*

DIM. Sia $\mathfrak{J}$ un ideale di altezza due. Scegliamo (cfr. [10], Th. 8, pag. 61) in $\mathfrak{J}$ due elementi a, b tali che $h(a, b) = 2$. Essendo ogni ideale libero fuori da se stesso (cfr. [4], pag. 234), (a, b) è libero fuori da un ideale di altezza maggiore di uno e dunque per ipotesi dh $(a, b) \leqslant 1$. Non può essere dh $(a, b) = 0$, cioè (a, b) proiettivo, poichè un ideale proiettivo proprio ha altezza $=1$ (cfr. [4], Oss. pag. 240) e quindi risulta dh $(a, b) = 1$.

Consideriamo la sequenza esatta breve

$$0 \to \operatorname{Ker}\varphi \to A \times A \xrightarrow{\varphi} (a, b) \to 0$$

dove φ manda la coppia (r, s) in $ar + bs$; si ha: $\operatorname{Ker}\varphi \simeq a : b$ (cfr. p.e. [12], Lemma 3, pag. 405); inoltre dh $(a, b) = 1 \Rightarrow \operatorname{Ker}\varphi$ proiettivo (cfr. [5], prop. 2.3, pag. 110). Essando $a : b$ proiettivo, per ogni primo $\mathfrak{P}$ di A, $(a : b)_{\mathfrak{P}}$ è libero (cfr. [11], Th. 9, pag. 186 e Th. 12, pag. 191), cioè principale in $A_{\mathfrak{P}}$, per cui in $A_{\mathfrak{P}}$ esiste un elemento c tale che $(a : b)_{\mathfrak{P}} = cA_{\mathfrak{P}}$. Ora $a \in (a : b)_{\mathfrak{P}}$ e quindi $a = tc$, con $t \in A_{\mathfrak{P}}$; d'altra parte (cfr. [1], Rem. 1, pag. 42) $(a : b)_{\mathfrak{P}} = (a)_{\mathfrak{P}} : (b)_{\mathfrak{P}}$ e dunque $cb = ua$, con $u \in A_{\mathfrak{P}}$, da cui $cb = utc$ e quindi, essendo $A_{\mathfrak{P}}$ integro, $b = ut$. Se t non fosse invertibile in $A_{\mathfrak{P}}$, a e b apparterrebbero ad (almeno) un ideale primo (associato a $tA_{\mathfrak{P}}$) di altezza uno, e dunque alla sua restrizione in A che sarebbe ancora un ideale primo di altezza uno, il che non è possibile poichè $h(a, b) = 2$. Dunque t è invertibile in $A_{\mathfrak{P}}$, e quindi c ed a generano lo stesso ideale in $A_{\mathfrak{P}}$. Quindi $(a : b)_{\mathfrak{P}} = (a)_{\mathfrak{P}}$; questo per ogni primo $\mathfrak{P}$ di A: per il lemma 5 si ha allora $a : b = a$, cioè a, b è una A-successione; ne segue che gr $\mathfrak{J} = 2$. c.v.d.

BIBLIOGRAFIA

[1] M. F. Atiyah - I. G. Macdonald, *Introduction to Commutative Algebra*, Addison-Wesley (1969).

[2] M. Baldassarri, *Osservazioni sulla struttura dei fasci lisci*, Atti del Conv. Internaz. di Geom. Alg. di Torino del 1961.

[3] S. Baldassarri Ghezzo - C. Margaglio - T. Millevoi, *Considerazioni sulla conferenza tenuta da M. Baldassarri a Torino nel 1961. «Osservazioni sulla struttura dei fasci lisci»*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **36** (1966).

[4] S. Baldassarri Ghezzo, *Proprietà di ideali in domini d'integrità noetheriani*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **43** (1970).

[5] H. Cartan - S. Eilenberg, *Homological Algebra*, Princeton University Press (1956).

[6] W. Gröbner, *Moderne Algebraische Geometrie*, Springer-Verlag (1949).

[7] I. Kaplansky, *Commutative Rings*, Allyn and Bacon, Inc., Boston (1970).

[8] C. Margaglio, *Alcune proprietà delle R-coppie in un dominio d'integrità*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **39** (1967).

[9] T. Millevoi, *Una proprietà degli ideali di classe principale negli anelli di Macaulay*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **36** (1966).

[10] D. G. Northcott, *Ideal Theory*, Cambridge (1953).

[11] D. G. Northcott, *An introduction to Homological Algebra*, Cambridge (1960).

[12] O. Zariski - P. Samuel, *Commutative Algebra*, vol. II, Van Nostrand (1960).

Manoscritto pervenuto in redazione il 27 giugno 1974.