Rendiconti
del
Seminario Matematico
della
Università di Padova

Constantin Niţă

S-anneaux noethériens

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 53 (1975), p. 1-11
<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1975__53__1_0>

Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, Vol. 53 (1975)

S-Anneaux Noethériens.

Constantin Niţă (*)

Introduction.

Un anneau A, s'appelle S-anneau à gauche (ou S-anneau au sens de Kasch) si tout A-module à gauche, simple, est isomorphe à un idéal. Ces anneaux, caractérisés par le fait que le dual de tout A-module à gauche de type fini non-nul est non-nul, jouent un rôle important du point de vue de la dualité. Pour certains résultats on peut consulter par exemple, les travaux [5], [6], [9]. Rappelons, seulement, que A est S-anneau à gauche si et seulement si tout idéal à gauche, maximal, est l'annulateur d'un élément de A, ou encore, si et seulement si tout idéal à gauche a l'annulateur à droite non-nul. Une classe particulière de ces anneaux (S-anneaux artiniens à gauche et à droite) a été caractérisée dans [8]. De même, quelques propriétés de S-anneaux noethériens (non-commutatifs) sont données dans [1]. Certains classes speciales de S-anneaux (les anneaux P.F. et Q.F.) sont beaucoup étudiées.

Dans ce travail, nous nous sommes éfforcé d'obtenir des résultats sur les S-anneaux noethériens commutatifs; clairement, dans ce cas on peut donner, en plus, certains résultats qui sont spécifiques au cas commutatif.

Le premier paragraphe contient quelques résultats, qui caracté-

(*) Indirizzo dell'A.: Université de Bucarest, Faculté de Mathématiques, str. Academiei 14, Bucarest, Roumanie.

Université de Ferrara, Institut de Mathématiques, via Savonarola 9, Ferrara, Italia.

L'auteur désire exprimer sa gratitude au C.N.R., dont il a été boursier (près l'Université de Ferrara) pendant l'année universitaire 1973-74.

risent les S-anneaux noethéries commutatifs; on donne des propriétés de ces anneaux. De même, on étudie la liaison avec d'autres classes d'anneaux.

Le deuxième paragraphe est consacré à étude des modules sur un S-anneaux commutatif. On considére les S-modules sur un tel anneau. Un S-module est caractérisé du fait que contient tous les types des modules simples.

Le présent travail est une suite du [9].

1. S-anneaux noethériens.

Soit A un anneau unitaire (non-nécessairement commutatif). Tous les modules sont supposés etre unitaires. Si M est un A-module à gauche, alors noterons par $s_0(M)$, le socle à gauche de M. Soit $j(M) = \{x \in M,\ \mathrm{ann}(x)$ est essentiel$\}$, le sous-module singulier de A. Un anneau A s'appelle réduit s'il non a des éléments nilpotents non-nuls; aussi, on dit que A est semi-premier si non a des idéaux nilpotents non-nuls.

PROPOSITION 1.1. Les affirmations suivantes sont vraies:

(1) tout S-anneau à gauche semi-premier est semi-simple;

(2) tout S-anneau à gauche réduit est semi-simple;

(3) tout S-anneau à gauche, tel que $j(A) = 0$ est semi-simple;

(4) tout élément d'un S-anneau à gauche et à droite, qui est non-diviseur de zéro est inversible.

DÉMONSTRATION. (1) Si A est semi-premier, alors tout idéal à gauche, minimal de A est summand direct, donc projectif; c'est-à-dire A est semi-simple.

(2) Soit $\mathfrak{m}$ un idéal à gauche maximal, et $a \in A$, $a \neq 0$, tel que $\mathfrak{m} = \mathrm{ann}(a)$. Si $Aa \cap \mathrm{ann}(a) \neq 0$, on en déduit que $Aa \subset \mathrm{ann}(a)$, pour que Aa est simple et donc $a^2 = 0$; contradiction, parce que A est réduit.

(3) Soit $\mathfrak{m}$, un idéal à gauche maximal de A. Alors $A/\mathfrak{m}$ est isomorphe à Aa, $a \in A$ et $\mathfrak{m} = \mathrm{ann}(a)$. Si $\mathfrak{m}$ est essential, alors il en résulte que le sous-module singulier de Aa est Aa; donc $a = 0$. Par suite, $\mathfrak{m}$ est un summand direct de A, c'est-à-dire A est semi-simple.

(4) Soit $a \in A$, un élément qui est non-diviseur de zéro. Alors aA est isomorphe à A et donc l'annulateur à gauche $\operatorname{ann}(aA) = 0$. Mais A étant un S-anneau à droite on déduit que $aA = A$; du fait que A est S-anneau à gauche, il en résulte que $Aa = A$ et donc a est inversible.

Soit, maintenant, A un anneau noethérien commutatif et M un A-module. On designe par $\operatorname{Ass}(M)$ l'ensemble d'idéaux premiers associés à M.

Lemme 1.2. Soit A un anneau noethérien commutatif. Alors A est S-anneau si et seulement si tout élément non-diviseur de zéro de A est inversible.

Démonstration. Soit $\mathfrak{m}$ un idéal maximal. Tout élément de $\mathfrak{m}$ est un diviseur de zéro; donc on a que $\mathfrak{m} \subset \bigcup_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(A)} \mathfrak{p}$, la réunion étant finie. Par suite $\mathfrak{m} = \mathfrak{p} = \operatorname{ann}(x)$, $x \in A$, $x \neq 0$; donc A est S-anneau. L'assertion reciproque résulte d'après la proposition 2.1. (n. 4).

Lemme 1.3. Soient A un S-anneau commutatif et $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(A)$, un idéal premier associé. Alors $A_{\mathfrak{p}}$ est un S-anneau.

Démonstration. Soit $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(A)$ et $a \in A$, $a \neq 0$ tel que $\mathfrak{p} = \operatorname{ann}(a)$. L'idéal maximal de $A_{\mathfrak{p}}$ est $\mathfrak{p}_{\mathfrak{p}}$. Si $a \in \mathfrak{p}$, alors $\mathfrak{p}_{\mathfrak{p}} = 0$, et donc $A_{\mathfrak{p}}$ est un corps. Si $a \in \mathfrak{p}$, alors les éléments a/s où $s \notin \mathfrak{p}$ sont non-nuls (car $\mathfrak{p} = \operatorname{ann}(a)$). Soit p'/s' un élément non-nul de $\mathfrak{p}_{\mathfrak{p}}$, ($p' \in \mathfrak{p}$, $s' \notin \mathfrak{p}$). On a que $a/s \times p'/s' = 0$, donc tout élément de $\mathfrak{p}_{\mathfrak{p}}$ est un diviseur de zéro. Mais, si I est un ideal projectif de $A_{\mathfrak{p}}$, il en résulte que I est libre. On a nécessairement I isomorphe à $A_{\mathfrak{p}}$. Donc I est isomorphe à $xA_{\mathfrak{p}}$, où x est un non-diviseur de zêro, c'est-à-dire x est inversible. Il en résulte $I = A_{\mathfrak{p}}$ est S-anneau.

Remarque 1. Si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de A, non-associé, en général, le lemme non est vrai. En effet, soit l'anneau:

$A = k[\![X, Y]\!][T]/(T, TX, TY) = k[\![x, y]\!][t]$, k étant un corps. Cet anneau est un S-anneau local. Si $\mathfrak{p} = (x, t)$, alors $A_{\mathfrak{p}}$ est un anneau integre, mais non est un corps; donc $A_{\mathfrak{p}}$ non est S-anneau.

M étant un A-module et $\mathfrak{a}$ un idéal de A, on dénote par $\operatorname{ann}_M(\mathfrak{a})$, l'ensemble $\{x \in M,\ \mathfrak{a}x = 0\}$. Alors, en vertu du corollaire 1.14. [7], appliqué dans le cas commutatif, il en résulte:

Lemme 1.4. Soient A un anneau noethérien commutatif, M un A-module et $\mathfrak{a}$ un idéal. Alors $\operatorname{ann}_M(\mathfrak{a}) \neq 0$ si et seulement si $\mathfrak{a}$ est contenu dans un élément de $\operatorname{Ass}(M)$.

Par $\mathrm{Ass}(M)$ nous noterons l'ensemble des idéaux premiers $\mathfrak{p}$ de A, tel que existe $x \in M$, $x \neq 0$ et $\mathfrak{p} = \mathrm{ann}(x)$.

Soit $E(A)$, l'enveloppe injective de A.

On a le théorème suivant:

THÉORÈME 1.5. Soit A un anneau noethérien commutatif. Alors les affirmations suivantes sont équivalentes:

(1) A est S-anneau;

(2) tout sous-module projectif de type fini d'un A-module projectif est summand direct;

(3) tout idéal projectif est summand direct;

(4) si P est un A-module projectif tel que $P_{\mathfrak{m}}$ est non-nul pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$, alors $\mathrm{ann}_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a})$ est non-null, pour tout idéal $\mathfrak{a}$;

(5) pour tout idéal $\mathfrak{a}$ de A, on a que $\mathrm{ann}_{E(A)}(\mathfrak{a})$ est non-nul;

(6) pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A, $A_{\mathfrak{m}}$ est un S-anneau;

(7) si $S^{-1}A$ est l'anneau total des fractions de A, alors il est un A-module fidèlement plat;

(8) $S^{-1}A$ est un A-module de type fini.

DÉMONSTRATION. $1) \Rightarrow 2)$. Cette implication résulte d'après [1, thm. 5.4.], mais nous donnerons une démonstration plus facile pour le cas commutatif. Soient M un A-module projectif et N un sous-module projectif de type fini de M. Parce que N est de type fini, on peut supposer que M est projectif de type fini. Soit aussi, $\mathfrak{m}$ un idéal maximal, $\mathfrak{m} = \mathrm{ann}(a) \in \mathrm{Ass}(A)$. Alors $N_{\mathfrak{m}}$ est un $A_{\mathfrak{m}}$-sous-module projectif de $A_{\mathfrak{m}}$-module projectif $M_{\mathfrak{m}}$. Mais, $N_{\mathfrak{m}}$ et $M_{\mathfrak{m}}$ étant libres et $A_{\mathfrak{m}}$ un anneau local, on a que $N_{\mathfrak{m}}$ est un summand direct de $M_{\mathfrak{m}}$. D'autre part M/N est de presentation finie et donc d'après [2, ch. II, § 3, nr. 3, cor. 1, de la prop. 12], N est un summand direct de M.

$2) \Rightarrow 3)$. Est évidente.

$3) \Rightarrow 4)$. Soient $\mathfrak{a}$ un idéal de A et $\mathfrak{m}$ un idéal maximal, tel que $\mathfrak{a}$ est contenu dans $\mathfrak{m}$. On montre que $\mathfrak{m}$ est associé. En effet, soit $x \in A$ un non-diviseur de zéro, alors Ax est isomorphe à A et donc est projectif. Mais, Ax étant un summand direct de A, il en résulte x inversible. Par suite d'après le lemme 1.2. $\mathfrak{m} \in \mathrm{Ass}(A)$. Soit P un A-module avec la proprieté reclamée. Comme $A_{\mathfrak{m}}$ est local, $P_{\mathfrak{m}}$ est $A_{\mathfrak{m}}$-module libre et donc $\mathrm{Ass}(P_{\mathfrak{m}}) = \mathrm{Ass}(A_{\mathfrak{m}})$. Alors, utilisant le lemme 1.3. on a que $\mathrm{ann}_{P_{\mathfrak{m}}}(\mathfrak{a}_{\mathfrak{m}})$ est non-nul. Si S est A-$\mathfrak{m}$, l'application $\mathfrak{p} \to S^{-1}\mathfrak{p}$ est une bijection entre l'ensemble des idéaux premiers associés de M ne rencontrant pas S et l'ensemble $\mathrm{A}_{A_{\mathfrak{m}}}(P_{\mathfrak{m}})$. D'ici on en déduit, immédiatement, que $\mathrm{ann}_P(\mathfrak{a})$ est non-nul.

4) $\Rightarrow$ 5). Il est suffit d'observer que $\mathrm{Ass}(A)$ coincide à $\mathrm{Ass}(E(A))$, A étant sous-module essentiel de $E(A)$.

5) $\Rightarrow$ 6). Il en résulte d'après le lemme 1.3. et la observation cidessus.

6) $\Rightarrow$ 7). D'après [2, ch. IV, § 1, prop. 5] résulte que A est S-anneau et donc tout élément de A, qui est non-diviseur de zéro est inversible (lemme 1.2.). Alors $S^{-1}A = A$.

7) $\Rightarrow$ 8). On obtient, immédiatement, utilisant [2, ch. II, § 2, ex. 8].

8) $\Rightarrow$ 1). Si $S^{-1}A$ est A-module de type fini, d'après [10, thm. 3.1.] on en déduit que l'application $i: A \to S^{-1}A$ est surjective, donc $A = S^{-1}A$, c'est-à-dire tout élément non-diviseur de zéro est inversible.

Remarque 2. D'après [7, ch. II, lemme 2.1.] on a, facilement, que: A étant un anneau noethérien et s'il existe un A-module plat M tel que $\mathrm{ann}_M(\mathfrak{a})$ est non-nul, pour tout idéal $\mathfrak{a}$ de A, alors A est S-anneau.

Corollaire 1.6. Soit A un anneau et noterons par $1GD(A)$ la dimension globale de A. Si A est S-anneau noethérien, alors $1GD(A)$ est égale avec 0, -1 ou ∞.

Il suffit d'appliquer le théorème 1.5. et [1, cor. 5.6.], où on prouve que: si A est un anneau noethérien à gauche alors, A est S-anneau à droite si et seulement si $1fPD(A) = 0$.

Par $\mathrm{Rad}(A)$ nous noterons le radical Jacobson d'anneau A.

Corollaire 1.7. Si A est S-anneau, noethérien alors $j(A) \subset \mathrm{Rad}(A)$ et de plus, si $s_0(A)$ est essentiel $j(A) = \mathrm{Rad}(A)$.

En effet, pour un S-anneau $\mathrm{Rad}(A) = \mathrm{ann}(s_0(A))$ et $j(A)$ est la réunion des annulateurs d'idéaux essentiels de A. Mais, tout idéal essentiel contient le socle $s_0(A)$.

Théorème 1.8. Soient A un S-anneau noethérien commutatif, tel que le socle $s_0(A)$ est essentiel et M un A-module. Alors les affirmations suivantes sont équivalentes:

(1) M est de longueur finie.

(2) M est artinien.

(3) M est noethérien.

DÉMONSTRATION. Compte tenu [3, ch. VIII, prop. 12], il suffit de démontrer que $\mathrm{Rad}(A)$ est nilpotent et $A/\mathrm{Rad}(A)$ est semi-simple. Soit $\{\mathfrak{m}_i\}_{1\leqslant i\leqslant n}$ l'ensemble d'idéaux maximaux. Alors $\mathrm{Rad}(A)=\bigcap_{i=1}^{n}\mathfrak{m}_i=\mathrm{ann}(s_0(A))$. Parce que $s_0(A)$ est essentiel il en résulte $j(A)=\mathrm{Rad}(A)$ d'après le corollaire 1.7. Mais, est connu [2, ch. II, § 2, ex. 24.] que si A est noethérien, alors $j(A)$ est nilpotent et de plus $j(A)$ coincide à le radical premier de A. Donc $\mathrm{Rad}(A)$ est nilpotent. Let fait que $A/\mathrm{Rad}(A)$ est semi-simple résulte d'après un résultat classique.

Un anneau A s'appelle parfait si tout A-module a une couverture projective [1].

PROPOSITION 1.9. Soit A un anneau commutatif. Alors A est parfait si et seulement si tout anneau-facteur de A est S-anneau.

DÉMONSTRATION. Si A est un anneau parfait commutatif, alors A est un produit fini d'anneaux parfaits locaux. Ensuite, il suffit de remarquer qu'un anneau commutatif parfait local est S-anneau. Réciproquement, soient M un A-module et $x\in M$, $x\neq 0$. Alors on a que Ax est isomorphe à $A/\mathrm{ann}(x)$. Parce que $A/\mathrm{ann}(x)$ est S-anneau on déduit que Ax contient un sous-module simple, donc M contient. De plus $A/\mathrm{Rad}(A)$ étant un S-anneau qui a le radical Jacobson égal à zéro on a $A/\mathrm{Rad}(A)$ semi-simple. Grâce au [1, thm. P], on obtient donc que A est parfait.

REMARQUE 3. On voit que le raisonnement ci-dessus donne de plus: Si A est un S-anneau (non-commutatif) tel que tout anneau-facteur de A est S-anneau à gauche, alors A est parfait à droite.

Ci-dessus, il en résulte:

COROLLAIRE 1.10. Soit A un anneau noethérien commutatif. Alors les affirmations suivantes sont équivalentes:

(1) A est S-anneau et le socle $s_0(A)$ est essentiel.

(2) Tout anneau-facteur de A est S-anneau.

(3) A est S-anneau et tout anneau-facteur de A par un idéal premier est S-anneau.

(4) A est artinien.

En effet, le corollaire résulte du théorème 1.8., de la proposition 1.9. et des remarques ci-dessus. Rappelons seulement que un S-anneau noethérien est semi-local et que un anneau parfait, commutatif et noethérien est artinien.

2. Modules sur S-anneaux.

Soient A un anneau unitaire et M un A-module. Nous définirons la notion de S-module.

DÉFINITION 2.1. Un A-module M s'appelle S-module à gauche s'il contient tous les types des modules à gauche, simples.

On observe que si A est un anneau noethérien, $\mathfrak{m}$ un idéal maximal et M un A-module, alors M contient un sous-module isomorphe à $A/\mathfrak{m}$ si et seulement si $\mathfrak{m}$ est associé à M. Donc, M est un S-module si et seulement si tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A est associé à M.

Alors, ci-dessus et d'après le théorème 1.5., on en déduit:

PROPOSITION 2.1. Soient A un S-anneau noethérien et P un A-module projectif. Alors P est S-module si et seulement si $P_{\mathfrak{m}}$ est non-nul pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A.

REMARQUE 1. Il est clair que si M est un S-module (non-necessairement projectif) alors $M_{\mathfrak{m}}$ est non-nul, pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$. Mais, nous montrerons plus bas que la reciproque non est pas vraie, en général.

D'abord, nous donnerons la proposition suivante, dont la démonstration est analogue celle-là du [7, lemme 3.5.], mais est plus générale.

PROPOSITION 2.2. Soient A un anneau noethérien, M un A-module de type fini et $\mathfrak{a}$ un idéal de A. Si $M(\mathfrak{a})$ est le sous-module formé des $x \in M$, tels que la racine de $\operatorname{ann}(x)$ contienne $\mathfrak{a}$, il existe un entier n tel que $M(\mathfrak{a}) = \operatorname{ann}_M(\mathfrak{a}^n) = \operatorname{ann}_M(\mathfrak{a}^{n+k})$, pour tout entier k.

DÉMONSTRATION. Comme M est noethérien, on que la suite:

$$\operatorname{ann}_M(\mathfrak{a}) \subset \operatorname{ann}_M(\mathfrak{a}^2) \subset \dots$$

est stationnaire. Donc, il existe un entier n tel que $\mathrm{ann}_M(\mathfrak{a}^n) = \mathrm{ann}_M(\mathfrak{a}^{n+k})$ pour tout entier k. Nous démontrerons que:

$$M(\mathfrak{a}) = \mathrm{ann}_M(\mathfrak{a}^n)$$

Il est clair que $\mathrm{ann}_M(\mathfrak{a}^n) \subset M(\mathfrak{a})$, d'après la définition de $M(\mathfrak{a})$. D'autre part, si $x \in M(\mathfrak{a})$ tout élément de $\mathfrak{a}$ a une puissance qui annule x. Comme $\mathfrak{a}$ est de type fini, on en déduit qu'il existe $n + k$, tel que $\mathfrak{a}^{n+k}x = 0$. Donc $M(\mathfrak{a}) \subset \mathrm{ann}_M(\mathfrak{a}^{n+k}) = \mathrm{ann}_M(\mathfrak{a}^n)$.

PROPOSITION 2.3. Soient A un S-anneau local, noethérien avec l'idéal maximal $\mathfrak{m}$ et M un A-module de type fini. Avec les notations ci-dessus, soit que $M \neq M(\mathfrak{m})$ (par exemple $A \neq A(\mathfrak{m})$). Alors $(M/M(\mathfrak{m}))_{\mathfrak{m}}$ est non-nul, mais $M/M(\mathfrak{m})$ non est pas un S-module.

DÉMONSTRATION. Comme $M/M(\mathfrak{m})$ est de type fini alors $(M/M(\mathfrak{m}))_{\mathfrak{m}}$ qui est egale à $M/M(\mathfrak{m}) \otimes_A A_{\mathfrak{m}}$ est non-nul (A étant local). Mais, si $\mathfrak{m}$ appartenait à $\mathrm{Ass}_A(M/M(\mathfrak{m}))$, il existerait $x \in M$, $x \notin M(\mathfrak{m})$ tel que $\mathfrak{m}x \subset M(\mathfrak{m})$. Alors il existe n tel que $\mathfrak{m}^{n+1}x = 0$, c'est-à-dire $x \in M(\mathfrak{m})$: contradiction.

REMARQUE 2. Ci-dessus, il en résulte que A-module $M/M(\mathfrak{m})$ n'est pas projectif.

D'après le théorème 1.5., on en déduit que les anneaux noethériens considérés dans [4], coïncident avec les S-anneaux noethériens étudiés dans ce travail. De même, dans [4] on étudie les modules M, sur un tel anneau, qui sont définis par la propriété que tout sous-module projectif de M est un summand direct.

Dans [7], on considére le cas non-noethérien, mais seulement pour les anneaux locaux. Si A est un anneau commutatif, on dit que $\mathfrak{p}$ est associé à M, s'il existe $x \in M$ tel que $\mathfrak{p}$ soit minimal parmi les idéaux premiers contenant l'annulateur de x. M étant un A-module alors on note par $\mathrm{Ass}_A(M)$ l'ensemble des idéaux premiers associés à M. Dans le cas noethérien, ces notions redonnent les notions classiques, utilisés dans ce travail. Dans le travail mentionné on dit que A est un anneau auto-associé s'il est local et si son idéal maximal est dans $\mathrm{Ass}_A(A)$. Ici, sont étudiés ces anneaux, donnant de meme quelques applications au cas noethérien (c'est-à dire pour les S-anneaux noethériens locaux).

PROPOSITION 2.4. Soient A un S-anneau noethérien et M un module de type fini. Alors tout suite descendante formée des sous-modules projectifs de M est stationnaire.

DÉMONSTRATION. Clairement, on peut supposer que M est projectif de type fini et donc, ci-dessus tout sous-module projectif de M est summand direct. Par suite, soit P un module projectif de type fini et la suite:

$$P_1 \supset P_2 \supset \ldots \supset P_n \supset \ldots$$

où, tout P_i est projectif (évidemment de type fini). De plus, soient $P = P_n \oplus Q_n$, $P = P_{n+1} \oplus Q_{n+1}, \ldots$. Mais, comme tout P_i est summand direct de P, clairement tout P_i a la propriété que tout sous-module projectif de P_i est un summand direct de P_i. Donc $P_n = P_{n+1} \oplus R_n$ et de plus, P_n contient strictement P_{n+1} si et seulement si $R_n \neq 0$. Alors $P = P_{n+1} \oplus R_n \oplus Q_n$, ce qui entraîne que R_n est contenu dans un complément de P_{n+1}; supposons que $R_n \subset Q_{n+1}$. Alors la suite ascendante de sous-modules de P:

$$Q_1 \subset Q_2 \subset \ldots \subset Q_n \subset \ldots$$

étant stationnaire (M est noethérien), il en résulte que la suite:

$$P_1 \supset P_2 \supset \ldots \supset P_n \supset \ldots$$

est stationnaire.

COROLLAIRE 2.5. Si A est un S-anneau noethérien commutatif, alors tout suite descendante des idéaux projectifs de A est stationnaire.

Soient, maintenant, A un anneau commutatif, a $\in A$ un élément de A et E un A-module; sont bien-connues les expressions suivantes:

$$\mathrm{Tor}_1^A(A/Aa, E) \cong \mathrm{ann}_E(a)/(\mathrm{ann}_A(a))E ,$$

$$\mathrm{Ext}_A^1(A/Aa, E) \cong \mathrm{ann}_E(\mathrm{ann}_A(a))/aE .$$

Alors on a:

PROPOSITION 2.5. Soient A un S-anneau local, noethérien et E un A-module; on a:

(1) si $\mathrm{ann}(E)$ est un S-module, alors:

a) $\mathrm{Tor}_1^A(A/\mathfrak{q}, E) \cong \mathfrak{q} \otimes_A E$, *b*) $\mathrm{Ext}_A^1(A/\mathfrak{q}, E) \cong s_0(E)$, où $\mathfrak{q}$ est un idéal minimal contenu dans $\mathrm{ann}(E)$;

(2) si $\mathrm{ann}(E) = \mathfrak{m}$ (l'idéal maximal de A) et $\mathfrak{q}$ est un idéal minimal, on a:

$$\mathrm{Tor}_1^A(A/\mathfrak{q}, E) \cong \mathrm{ann}_E(\mathfrak{q}) .$$

Démonstration: Résulte, facilement, d'après les expressions ci-dessus. Nous signalons que *a*) et *b*) sont analogues celles-là de [4, lemme 4.].

Ce résultat peut-être étendu à S-anneaux noethériens quelconques de façon suivant:

Proposition 2.6. Soient A un S-anneau noethérien et $E = A/\mathfrak{q}_1 \oplus \oplus A/\mathfrak{q}_2 \oplus \ldots \oplus A/\mathfrak{q}_n$, où $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots, \mathfrak{q}_n$ sont tous les types des idéaux minimaux distingués de A. Si F est un A-module tel que $\mathrm{ann}(F)$ est-S-module, alors:

$$\mathrm{Tor}_1^A(E, F) \cong (\mathfrak{q}_1 + \mathfrak{q}_2 + \ldots + \mathfrak{q}_n) \otimes_A F .$$

Compte tenu des celles ci-dessus, on déduit que cette proposition est analogue à la prop. 4. de [4]. Donc pour démonstration on peut voir [4].

Autres résultats sur les S-anneaux et les modules sur tels anneaux on trouvent dans la bibliographie mentionnée.

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. Bass, *Finitistic dimension and a homological generalisation of semi-primary rings*, Trans. Amer. Mat. Soc., **95** (1960), pp. 466-468.

[2] N. Bourbaki, *Algèbre commutative*, chap. 1-4 (1961).

[3] N. Bourbaki, *Algèbre*, chap. 8 (1958).

[4] L. Dutheil, *Sur une classe d'anneaux commutatifs*, C. R. Acad. Sci. Paris, **255** (1962), pp. 3098-3111; **256** (1963), pp. 4570-4572.

[5] J. P. Jans, *Some aspects of torsion*, Pacific Journ. Math., **15** (1965), pp. 249-261.

[6] T. Kato, *Torsionless modules*, Toh. Math. Journ., **20** (1968), pp. 234-243.

[7] D. LAZARD, *Autour de la platitude*, Bull. Soc. Math. France, **97** (1969), pp. 81-128.
[8] K. MORITA, *On S-rings in the sense of F. Kasch*, Nagoya Math. Journ., **27** (1966), pp. 687-695.
[9] C. NIŢĂ, *Sur les anneaux A, tels que tout A-module simple est isomorphe à un idéal*, C. R. Acad. Sci. Paris, **268** (1969), pp. 88-91.
[10] F. OORT - J. R. STROOKER, Indag. Math., **29** (1967), pag. 2.

Manoscritto pervenuto in redazione il 30 marzo 1974.