Rendiconti
del
Seminario Matematico
della
Università di Padova

Marco Biroli

**Sur un'inéquation parabolique dans un ouvert non cylindrique**

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*, tome 53 (1975), p. 21-35

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1975__53__21_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 53 (1975)

# Sur un'inéquation parabolique dans un ouvert non cylindrique.

MARCO BIROLI (*)

## 1. Introduction et énoncés.

Considérons l'espace Euclidien $\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_t$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et soit $\hat{\Omega}$ un ouvert de $\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_t$ avec mes $(\hat{\Omega}) > 0$.

Nous indiquons par $\hat{\Gamma}$ la frontière de $\hat{\Omega}$, et nous supposons que $\hat{\Gamma}$ soit une varieté de dimension $n$ indéfinement différentiable par morceaux, $\hat{\Omega}$ étant d'une seule coté de $\hat{\Gamma}$. Nous indiquons par $\Omega(s)$ l'ensemble $\hat{\Omega} \cap \{t = s\} \subset \mathbb{R}_x^n$, $s > 0$, et par $\Omega(0)$ l'ensemble Int $(\hat{\Gamma} \cap \{t = 0\})$ et nous supposons que les ensembles $\Omega(s)$ soient des ouverts bornés non vides de $\mathbb{R}_x^n$ pour $s \geqslant 0$ et posons $\Gamma(s) = \partial\Omega(s)$.

Nous dirons, suivant J. L. Lions [4], que l'ouvert $\hat{\Omega}$ vérifie l'hypothèse $(R)$ lorsque les propriétés suivantes ont lieu:

$(a)$ On suppose que $\hat{\Omega}$ est contenu dans le demi-espace $t > 0$.

$(b)$ Il y a une suite localement finie $O_i$ d'ensembles ouverts ou fermés de $\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_t$ telle que

(1) les $O_i$ recouvrent un voisinage de $\hat{\Gamma} - \Omega(0)$

(2) Chaque $O_i$ est contenu dans une bande $\alpha_i < t < \beta_i$ (ou $\alpha_i \leqslant t \leqslant \beta_i$) avec $\alpha_i \geqslant 0$

(3) Soit $Q(\alpha_i, \beta_i)$ l'ensemble de $\mathbb{R}_\xi^n \times \mathbb{R}_\tau$ $\{(\xi, \tau) | -1 < \xi_i < 1, \alpha_i < \tau < \beta_i\}$; il y a un homeomorphisme

$$h_i(x, t) = \big(\xi_1(x, t), \ldots, \xi_n(x, t), \tau(x, t)\big)$$

---

(*) Indirizzo dell'A.: Istituto di Matematica dell'Università di Parma ed Istituto di Matematica del Politecnico di Milano.

avec

$$\tau(x, t) = t$$

de $\bar{O}_i$ sur $\overline{Q(\alpha_i, \beta_i)}$ et tel que $\Omega \cap O_i$ est appliqué biunivoquement sur la partie « $\xi > 0$ » et que $\hat{\Gamma} - \Omega(0)$ est appliqué buinivoquement sur $\overline{Q(\alpha_i, \beta_i)} \cap \{\xi_n = 0\}$.

Soit $0 < T < +\infty$, $Q = \hat{\Omega} \cap \{(x, t) | 0 < t < T\}$, $\Sigma = (\hat{\Gamma} - \Omega(0)) \cap \cap \{(x, t) | 0 < t < T\}$.

Indiquons

$$\mathcal{V} = \left\{ v(x, t) | v(x, t) \in \mathcal{L}^2(Q), \frac{\partial v}{\partial x_i}(x, t) \in \mathcal{L}^2(Q), \right.$$
$$\left. i = 1, \ldots, n, \; v(x, t) = 0 \text{ sur } \Sigma \right\},$$
$$\mathcal{H} = \mathcal{L}^2(Q) .$$

Indiquons par $(\cdot, \cdot)$ le produit scalaire usuel sur $\mathcal{H}$, identifions $\mathcal{V}$ avec un sous espace dense de $\mathcal{H}$ et soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ la dualité entre $\mathcal{V}$ et son dual $\mathcal{V}^*$.

Indiquons par $\psi_i(x, t)$, $i = 1, 2$, deux fonctions de $\mathcal{L}^2(0, T; H^2(\Omega(t)))$ avec $(\partial \psi_i / \partial t)(x, t) \in \mathcal{L}^2(Q)$, $i = 1, 2$, $\psi_1(x, t) \leqslant 0 \leqslant \psi_2(x, t)$ p.p. sur $\Sigma$ et $\psi_1(x, t) < \psi_2(x, t)$ p.p. sur $Q$. Posons

$$\mathcal{K}_1 = \{ v \in \mathcal{H} | v(x, t) \geqslant \psi_1(x, t) \text{ p.p. sur } Q \} ,$$
$$\mathcal{K}_2 = \{ v \in \mathcal{H} | v(x, t) \leqslant \psi_2(x, t) \text{ p.p. sur } Q \} ,$$
$$\mathcal{K}_3 = \mathcal{K}_1 \cap \mathcal{K}_2 .$$

Soit enfin $\beta \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un graphe maximal monotone de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ avec $0 \in \beta(0)$ et $\varphi(t) \colon \mathbb{R} \to ]-\infty, +\infty]$ la fonction convexe propre s.c.i., telle que $\partial \varphi = \beta$, $\varphi(0) = 0$.

Considérons, pour $i = 1, 2, 3$, le problème

$$(1.1_i) \quad \begin{cases} \left( \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + g - f, v - u \right) \geqslant 0 \, , \\ g(x, t) \in \beta(u(x, t)) \qquad \text{p.p. sur } Q \, , \\ \forall v \in \mathcal{K}_i \, , \\ u \in \mathcal{K}_i \cap \mathcal{V} \, , \quad u(x, 0) = u_0(x) \qquad \text{p.p. sur } \Omega(0) \end{cases}$$

et sa formulation faible

$$(1.2_i)\quad \begin{cases} \left\langle \dfrac{\partial v}{\partial t} - \Delta u - f,\ v - u \right\rangle + \displaystyle\int_Q \varphi(v(x,t))\,dx\,dt \\ - \displaystyle\int_Q \varphi(u(x,t))\,dx\,dt \geqslant -\dfrac{1}{2}\|v(\cdot,0) - u_0\|^2_{\mathfrak{L}^2(\Omega(0))}\,, \\ \forall v \in \mathcal{K}_i \cap \mathcal{V} \qquad \text{avec } \dfrac{\partial v}{\partial t} \in \mathcal{H}\,, \qquad \varphi(v(x,t)) \in \mathfrak{L}^1(Q)\,, \\ u \in \mathcal{K}_i \cap \mathcal{V}\,. \end{cases}$$

Nous obtenons les résultats suivants:

TH. 1. – *Supposons que $\hat{\Omega}$ satisfait à la condition $(R)$, $f \in \mathcal{H}$, $u_0 \in H_0^1(\Omega(0))$, $\psi_1(x,0) \leqslant u_0(x)$ $\big(u_0(x) \leqslant \psi_2(x,0),\ \psi_1(x,0) \leqslant u_0(x) \leqslant \psi_2(x,0)\big)$ p.p. dans $\Omega(0)$, $\varphi(u_0(x)) \in \mathfrak{L}^1(\Omega(0))$ et $\exists g_i(x,t) \in \mathfrak{L}^2(Q)$ avec $g_i(x,t) \in \beta(\psi_i(x,t))$ p.p. dans $Q$, $i = 1, 2$; le problème $(1,1_i)[(1,1_2),(1,1_3)]$ a alors une unique solution $u(x,t)$ avec $\partial u/\partial t \in \mathcal{H}$, $\Delta u \in \mathcal{H}$.*

TH. 2. – *Soit $\hat{\Omega}$, $\psi_i(x,t)$, $i = 1, 2$, comme au* Th. 1, *$f \in \mathcal{V}^*$, $u_0(x) \in \mathfrak{L}^2(\Omega(0))$ avec $\psi_1(x,0) \leqslant u_0(x)$ $\big(u_0(x) \leqslant \psi_2(x,0),\ \psi_1(x,0) \leqslant u_0(x) \leqslant \psi_2(x,0)\big)$ p.p. dans $\Omega(0)$ avec $u_0(x) \in D(\varphi)$ p.p. dans $\Omega(0)$; le problème $(1,2_1)[(1,2_2)(1,2_3)]$ a alors une solution unique.*

REMARQUE 1. – Le sens de la relation $u(x,0) = u_0(x)$ dans $(1,1_i)$ est donné par le Th. 3 § 2.

REMARQUE 2. – L'équation correspondante au problème $(1.1_i)$ a été traitée par H. Fujita [3], par une méthode très différente de la nôtre; cet Auteur obtient pour l'équation en question un résultat analogue au Th. 1. Le problème $(1.1_i)$ a été traité dans le cas où $\hat{\Omega}$ est un ouvert cylindrique par H. Brézis [2], J. C. Peralba [6] et l'A. [1].

Dans le § 2 on donne des lemmes et des résultats preliminaires, dans le § 3 on démontre le Th. 1 et dans le § 4 on démontre le Th. 2.

## 2. Résultats et lemmes preliminaires.

Dans tout ce paragraphe nous supposerons que $\hat{\Omega}$ satisfait à la condition $(R)$.

Indiquons par $B(Q)$ l'espace des $v \in \mathcal{V}$ avec $\partial v/\partial t \in \mathcal{V}^*$, muni de la norme.

$$\|v\|_{(B(Q))} = \left\{\|v\|^2_{\mathcal{V}} + \left\|\frac{\partial v}{\partial t}\right\|^2_{\mathcal{V}^*}\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Rappellons certaines résultats que nous utiliserons dans la suite:

TH. 3. – *Fixons $0 \leqslant s \leqslant T$; il existe un'application linéaire continue et une seule*

$$u \to u(\cdot, s)$$

*de $B(Q)$ dans $\mathcal{L}^2(\Omega(s))$, telle que $u(\cdot, s)$ coïncide p.p. avec la restriction de $u$ à $\Omega(s)$, lorsque $u$ est continue sur $\bar{Q}$* (J. L. Lions [4] pg. 159)

TH. 4. – *Soient $u, v \in B(Q)$; on a.*

$$\left\langle\frac{\partial u}{\partial t}, v\right\rangle + \left\langle\frac{\partial v}{\partial t}, u\right\rangle = (v(\cdot, T), u(\cdot, T))_{\mathcal{L}^2(\Omega(T))} - (v(\cdot, 0), u(\cdot, 0))_{\mathcal{L}^2(\Omega(0))}.$$

(J. L. Lions pg. 161 [4])

LEMME 1. – *Considérons $u \in B(Q)$ avec $u(x, 0) \in \mathcal{K}_1(\mathcal{K}_2)$; on a, $\forall \lambda > 0$,*

$$\left\langle\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{(u-\psi_1)^-}{\lambda}\right\rangle \leqslant \left\|\frac{\partial \psi_1}{\partial t}\right\|_{\mathcal{H}} \left\|\frac{(u-\psi_1)^-}{\lambda}\right\|_{\mathcal{H}},$$

$$\left(\left\langle-\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{(u-\psi_2)^+}{\lambda}\right\rangle \leqslant \left\|\frac{\partial \psi_2}{\partial t}\right\|_{\mathcal{H}} \left\|\frac{(u-\psi_2)^+}{\lambda}\right\|_{\mathcal{H}}\right).$$

Observons que de [4] prop. 4.1. pg. 158 il suffit de démontrer le résultat dans le cas $\partial u/\partial t \in \mathcal{H}$. Si $\partial u/\partial t \in \mathcal{H}$, on a $u \in H^1(Q)$; donc, de [7] pg. 17, on a

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}(u-\psi_1), \frac{(u-\psi_1)^-}{\lambda}\right) = -\left(\frac{\partial}{\partial t}(u-\psi_1)^-, \quad \frac{(u-\psi_1)^-}{\lambda}\right). \tag{2.1}$$

Étant $(u-\psi_1)^- \in \mathcal{V}$ et $(\partial/\partial t)(u-\psi_1)^- \in \mathcal{H}$, on a, du Th. 4,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}(\psi_1 - u), \frac{(u-\psi_1)^-}{\lambda}\right) + \tag{2.2}$$

$$+\frac{1}{\lambda}\|(u(x,0)-\psi_1(x,0))^-\|^2_{\mathcal{H}} = \frac{1}{\lambda}\|(u(x,T)-\psi_1(x,T))^-\|^2_{\mathcal{H}} \geqslant 0$$

dont

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{(u-\psi_1)^-}{\lambda}\right) \leqslant \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial t}, \frac{(u-\psi_1)^-}{\lambda}\right) \leqslant \left\|\frac{\partial \psi_1}{\partial t}\right\|_{\mathcal{H}} \left\|\frac{u-\psi_1^-}{\lambda}\right\|_{\mathcal{H}}. \tag{2.3}$$

Lemme 2. – *Soit $u \in \mathcal{V}$; on a, $\forall \lambda > 0$,*

$$\left\langle -\Delta u, \frac{(u-\psi_1)^-}{\lambda}\right\rangle \leqslant \|\Delta\psi_1\|_{\mathcal{H}} \left\|\frac{(u-\psi_1)^-}{\lambda}\right\|_{\mathcal{H}}, \tag{2.4}$$

$$\left\langle \Delta u, \frac{(u-\psi_2)^+}{\lambda}\right\rangle \leqslant \|\Delta\psi_2\|_{\mathcal{H}} \left\|\frac{(u-\psi_2)^+}{\lambda}\right\|_{\mathcal{H}}. \tag{2.5}$$

On a, [7] pg. 17,

$$\left\langle -\Delta(u-\psi_1), \frac{(u-\psi_1)^-}{\lambda}\right\rangle = \left\langle \Delta(u-\psi_1)^-, \frac{(u-\psi_1)^-}{\lambda}\right\rangle \leqslant 0$$

dont

$$\left\langle -\Delta u, \frac{(u-\psi_1)^-}{\lambda}\right\rangle \leqslant \left\langle -\Delta \psi_1, \frac{(u-\psi_1)^-}{\lambda}\right\rangle \leqslant \|\Delta\psi_1\|_{\mathcal{H}} \left\|\frac{(u-\psi_1)^-}{\lambda}\right\|_{\mathcal{H}}.$$

On a ainsi démontrée (2.4); analoguement on peut aussi démontrer (2.5).

Indiquons maintenant par $\beta_\lambda$ la régularisée de Yoshida de $\beta_\lambda$ et par $\varphi_\lambda$ la fonction convexe s.c.i., telle que $(d/d\tau)\varphi_\lambda(\tau) = \beta_\lambda(\tau)$.

Nous observons qu'on a $\varphi_\lambda(0) = \beta_\lambda(0) = 0$.

Lemme 3. – *Soit $u \in \mathcal{V}$ avec $\partial u/\partial t \in \mathcal{H}$; on a*

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}, \beta_\lambda(u)\right) = \int_{\Omega(T)} \varphi_\lambda(u(x, T)dx - \int_{\Omega(0)} \varphi_\lambda(u(x, 0))\, dx\,.$$

Nous observons que de [4] prop. 4.1. pg. 158 il suffit démontrer le résultat pour $u \in D(Q)$ avec $u = 0$ dans un voisinage de $\Sigma$.

Supposons que Supp $(u)$ ait une distance $> \delta > 0$ de $\Sigma$.

Indiquons maintenant par $X_{\delta'}$ l'ensemble des points de $Q$ qui ont distance $\geqslant 2\delta'$ de $\Sigma$ $(\delta' > 0)$ et par $\chi_{\delta'}$ la fonction caracteristique de $X_{\delta'}$.

Soit $\varrho$ une fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+1})$ non negative avec

$$\varrho(y) = 0 \quad \text{si} \quad |y| \geqslant 1 ,$$

$$\int \varrho(y)\, dy = 1 .$$

Posons

$$\varrho_{\delta'}(y) = (\delta')^{-(n+1)} \varrho \left(\frac{y}{\delta'}\right)$$

et

$$\theta_{\delta'}(y) = \chi_{\delta'}(y) * \varrho_{\delta'}(y)$$

Observons qu'on $a$, pour $\delta' < \delta/4$,

$$(2.6) \qquad \left(\frac{\partial u}{\partial t}, \beta_\lambda(u)\right) = \int_Q \frac{\partial}{\partial t} \varphi_\lambda(u(x, t))\, dx\, dt =$$

$$= \int_Q \frac{\partial}{\partial t} \varphi_\lambda(u(x, t))\, \theta_{\delta'}(x, t)\, dx\, dt = -\int_Q \frac{\partial}{\partial t} \theta_{\delta'}(x, t)\, \varphi_\lambda(u(x, t))\, dx\, dt +$$

$$+ \int_{\Omega(T)} \varphi_\lambda(u(x, T))\, \theta_{\delta'}(x, T)\, dx - \int_{\Omega(0)} \varphi_\lambda(u(x, 0))\, \theta_{\delta'}(x, 0)\, dx .$$

Nous observons maintenant que sur Supp $(u)$ on a, pour $\delta'$ grande, $(\partial/\partial t)\theta_{\delta'}(x, t) = 0$ $\theta_{\delta'}(x, t) = 1$; dont de (2.6)

$$(2.7) \qquad \left(\frac{\partial u}{\partial t}, \beta_\lambda(u)\right) \int_{\Omega(T)} \varphi_\lambda((u(x, T))\, dx - \int_{\Omega(0)} \varphi_\lambda(u(x, 0))\, dx .$$

Lemme 4. – *Soit $u \in \mathcal{K}$; on a*

$$(2.8) \qquad \left(\beta_\lambda(u), \frac{(u-\psi_1)^-}{\lambda}\right) \leqslant \|\beta_\lambda(\psi_1)\|_{\mathcal{K}} \left\| \frac{(u-\psi_1)^-}{\lambda} \right\|_{\mathcal{K}} ,$$

$$(2.9) \qquad \left(-\beta_\lambda(u), \frac{(u-\psi_2)^+}{\lambda}\right) \leqslant \|\beta_\lambda(\psi_2)\|_{\mathcal{K}} \left\| \frac{(u-\psi_2)^+}{\lambda} \right\|_{\mathcal{K}} .$$

On a

$$(2.10) \qquad \left(\beta_\lambda(u) - \beta_\lambda(\psi_1), \frac{(u-\psi_1)^-}{\lambda}\right) \leqslant 0$$

dont le résultat; on peut démontrer analoguement (2.9).

On a aussi facilement

LEMME 5. – *Soit* $u \in \mathcal{V}$; *on a*

$$\langle -\Delta u, \beta_\lambda(u)\rangle \geqslant 0 .$$

LEMME 6. – *Soit* $u \in B(Q)$; *l'équation*

$$u = u_\varepsilon - \varepsilon\, \Delta u_\varepsilon\,, \qquad \varepsilon > 0 \tag{2.11}$$

*a une solution* $u_\varepsilon \in \mathcal{V}$ *avec* $\partial u_\varepsilon/\partial t \in \mathcal{V}$ *et on a*:

$$\left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}, -\Delta u_\varepsilon\right) = \frac{1}{2}\,\|u_\varepsilon(T, \cdot)\|_{H_0^1(\Omega(T))} - \frac{1}{2}\,\|u_\varepsilon(0, \cdot)\|_{H_0^1(\Omega(0))} \,.$$

Il est evident que (2.11) a une solution $u_\varepsilon \in \mathcal{V}$, donc on a $-\Delta u_\varepsilon \in \mathcal{V}$.

Nous observons que de [4] prop. 4.1. pag. 158 il suffit de démontrer le résultat dans le cas où $u \in \mathcal{D}(\bar{Q})$ et Supp $(u)$ a une distance $> 2\delta > 0$ de $\Sigma$.

Indiquons par $X_\delta$ l'ensemble des points de $Q$ qui ont une distance $< \delta$ de $\Sigma$.

On peut définit de façon analogue à $\mathcal{V}$ un espace $\mathcal{V}_\delta$

$$\mathcal{V}_\delta = \left\{ v(x, t) \,|\, v(x, t) \in \mathcal{L}^2(X_\delta),\ \frac{\partial v}{\partial x_i}(x, t) \in \mathcal{L}^2(X_\delta), \right.$$
$$\left. i = 1, \ldots, n;\ v(x, t) = 0 \text{ sur } \Sigma_\delta \text{ p.p.} \right\}$$

où $\Sigma_\delta = \partial X_\delta - \{\partial X_\delta \cap (\Omega(0) \cup \Omega(T))\}$.
Considérons l'équations.

$$u = u_\varepsilon - \varepsilon\, \Delta u_\varepsilon\,, \qquad u_\varepsilon \in \mathcal{V}_\delta \tag{2.12}$$

Le problème (2.12) a une solution $u_\varepsilon$.

Indiquons encore par $u_\varepsilon$ la prolongée de $u_\varepsilon$ à $Q$ par 0; on a alors $u_\varepsilon \in \mathcal{V}$ et que $u_\varepsilon$ est solution de (2.11).

Considérons maintenant une union $C$ de cylindres $C_i$, $i = 1, \ldots, m$, du type

$$C_i = [t_i, t_{i+2}] \times \omega_i \,.$$

Supposons que

$$X_\delta \subset C \subset Q\,.$$

et que $X_\delta + B_{\delta/4} \subset C$ et $C + B_{\delta/4} \subset Q$ où $B_{\delta/4}$ est la bulle de $\mathbb{R}^{n+1}$ de centre 0 et rayon $\delta/4$.

On a

$$u = u_\varepsilon - c\,\Delta u_\varepsilon \qquad \text{p.p. dans } C_i$$

$i = 1, \ldots, m$; donc on a $\partial u_\varepsilon/\partial t \in \mathfrak{L}^2(t_i, t_{i+1}; H_0^1(\omega_i))$

Nous observons aussi que $\partial u_\varepsilon/\partial t$ est nulle dans un voisinage de $\partial C - (\omega_1 \cup \omega_m)$, dont on a que la prolongée de $\partial u_\varepsilon/\partial t$ à $Q$ par 0 est encore la dérivée dans le temps de $u_\varepsilon$; on a alors $\partial u_\varepsilon/\partial t \in \mathcal{V}$.

Du Th. 4 on a alors

$$\int_Q \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}(x, t)\big(-\Delta u_\varepsilon(x, t)\big)\,dx\,dt = \frac{1}{2}\,\|u_\varepsilon(x, T)\|^2_{H_0^1(\Omega(T))} - \frac{1}{2}\,\|u_\varepsilon(\cdot, 0)\|_{H_0^1(\Omega(0))}\,.$$

Le résultat est ainsi démontré.

REMARQUE 1. – Le lemme 6 peut aussi être démontré par une méthode de réduction à un ouvert cylindrique par homéomorphisme, cfr. [3].

Passons enfin aux dérniers résultats que nous avons à rappeller.

LEMME 7. – *Soit* $\mathfrak{L}\colon \mathcal{V} \to \mathcal{V}^*$ *un opérateur linéaire maximal monotone,* $\mathcal{A}\colon \mathcal{V} \to \mathcal{V}^*$ *un opérateur monotone borné, hemicontinu, coercif et* $f \in \mathcal{V}^*$; *le problème*

$$\mathfrak{L}u + \mathcal{A}u = f$$

*a alors une unique solution* (R. CARROL, *Abstract methods in partial differential equations*, Haper's series in Modern Mathematics, 1969).

LEMME 8. – *Considérons l'opérateur* $\mathfrak{L}\colon \mathcal{V} \to \mathcal{V}^*$

$$\mathfrak{L}u = \frac{\partial u}{\partial t}\,,$$

$$D(\mathfrak{L}) = \left\{u \,|\, u \in \mathcal{V},\ \frac{\partial u}{\partial t} \in \mathcal{V}^*,\ u(0, x) = 0\right\}.$$

*L'opérateur* $\mathfrak{L}$ *est maximal monotone* ([5] pg. 344).

## 3. Démonstration du Th. 1.

Nous démontrons le résultat dans le cas $i = 1$, la démonstration dans les autres cas étant analogue. Considérons le problème

$$(3.1_\lambda)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + \beta_\lambda u - \dfrac{(u-\psi_1)^-}{\lambda} = f \qquad \text{dans } \mathcal{V}^*, \\ u(x,0) = u_0(x) \qquad \text{p.p. sur } \Omega(0), \qquad u \in B(Q). \end{cases}$$

Des lemmes 7, 8 on a que $(3.1_\lambda)$ a une solution $u_\lambda$:

De $(3.1_\lambda)$ on a

$$\left\| \frac{(u_\lambda - \psi_1)^-}{\lambda} \right\|^2_{\mathcal{H}} \leqslant \left(f, -\frac{(u_\lambda-\psi_1)^-}{\lambda}\right) + \left(\beta_\lambda u_\lambda, \frac{(u_\lambda-\psi_1)^-}{\lambda}\right) +$$
$$+ \left(-\Delta u_\lambda, \frac{(u_\lambda-\psi_1)^-}{\lambda}\right) + \left(\frac{\partial u_\lambda}{\partial t}, \frac{(u_\lambda-\psi_1)^-}{\lambda}\right) \leqslant$$
$$\leqslant \left\| \frac{(u_\lambda-\psi_1)^-}{\lambda} \right\|_{\mathcal{H}} \left( \|f\|_{\mathcal{H}} + \|\beta_\lambda(\psi_1)\|_{\mathcal{H}} + \|\Delta\psi_1\|_{\mathcal{H}} + \left\|\frac{\partial \psi_1}{\partial t}\right\|_{\mathcal{H}} \right) \leqslant$$
$$\leqslant C_1 \left\| \frac{(u_\lambda-\psi_1)^-}{\lambda} \right\|_{\mathcal{H}}$$

dont

$$(3.2)\qquad \left\| \frac{(u_\lambda-\psi_1)^-}{\lambda} \right\|_{\mathcal{H}} \leqslant C_1 .$$

De $(3.1_\lambda)$ on a aussi

$$\|\beta_\lambda u_\lambda\|^2_{\mathcal{H}} \leqslant (f, \beta_\lambda u_\lambda) + \langle \Delta u_\lambda, \beta_\lambda u_\lambda\rangle - \left\langle \frac{\partial u_\lambda}{\partial t}, \beta_\lambda u_\lambda \right\rangle +$$
$$+ \left\langle \beta_\lambda u_\lambda, \frac{(u-\psi_1)^-}{\lambda} \right\rangle \leqslant \|\beta_\lambda u_\lambda\|_{\mathcal{H}} (\|f\|_{\mathcal{H}} + C_1) + \int_{\Omega(0)} \varphi_\lambda(u_0(x))\, dx \leqslant$$
$$\leqslant \|\beta_\lambda u_\lambda\|_{\mathcal{H}} \cdot (\|f\|_{\mathcal{H}} + C_1) + C_2$$

dont on a

$$(3.3)\qquad \|\beta_\lambda u_\lambda\|_{\mathcal{H}} \leqslant C_3$$

Posons maintenant

$$u_\lambda = u_{\varepsilon\lambda} - \varepsilon\, \Delta u_{\varepsilon\lambda}\,, \qquad u_{\varepsilon,\lambda} \in \mathcal{V}$$

Nous observons que de $(3.1_\lambda)$ on a, pour $v \in B(Q)$

$$\left|\left\langle\frac{\partial u_\lambda}{\partial t}, v - u_\lambda\right\rangle - \langle \Delta u_\lambda, v - u_\lambda\rangle\right| =$$
$$= \left|\left\langle -\beta_\lambda u_\lambda + \frac{(u-\psi_1)^-}{\lambda} + f, v - u_\lambda\right\rangle\right| \leqslant C_4 \|v - u_\lambda\|_{\mathcal{H}} .$$

Posons maintenant $v = u_{\varepsilon\lambda}$; on a

$$\left|\left\langle\frac{\partial u_\lambda}{\partial t}, u_{\varepsilon\lambda} - u_\lambda\right\rangle - \varepsilon \|\Delta u_{\varepsilon\lambda}\|^2_{\mathcal{H}}\right| \leqslant \varepsilon \cdot C_4 \|\Delta u_{\varepsilon\lambda}\|_{\mathcal{H}}$$

dont

$$\varepsilon \|\Delta u_{\varepsilon\lambda}\|^2_{\mathcal{H}} \leqslant \left\langle\frac{\partial u_{\varepsilon\lambda}}{\partial t}, u_{\varepsilon\lambda} - u_\lambda\right\rangle + \frac{\|u_0 - u_{\varepsilon\lambda}(0)\|^2_{\Omega(0)}}{2} + \varepsilon C_4 \|\Delta u_{\varepsilon\lambda}\|_{\mathcal{H}} \leqslant$$
$$\leqslant \left\langle\frac{\partial u_{\varepsilon\lambda}}{\partial t}, \varepsilon\, \Delta u_{\varepsilon\lambda}\right\rangle + \frac{\|u_0 - u_{\varepsilon\lambda}(0)\|^2_{\mathcal{L}^2(\Omega(0))}}{2} + \varepsilon \cdot C_4 \|\Delta u_{\varepsilon\lambda}\|_{\mathcal{H}}$$

dont

$$\|\Delta u_{\varepsilon\lambda}\|^2_{\mathcal{H}} \leqslant \frac{1}{2} \|u_{\varepsilon\lambda}(0)\|^2_{H^1_0(\Omega(0))} + \frac{\|u_0 - u_{\varepsilon\lambda}(0)\|^2_{\mathcal{L}^2(\Omega(0))}}{\varepsilon} + C_4 \|\Delta u_{\varepsilon\lambda}\|_{\mathcal{H}} . \tag{3.4}$$

De (3.4), étant $u_0 \in H^1_0(\Omega(0))$, on a

$$\|\Delta u_{\varepsilon\lambda}\|_{\mathcal{H}} \leqslant C_5 \tag{3.5}$$

dont on a

$$\|\Delta u_\lambda\|_{\mathcal{H}} \leqslant C_5 . \tag{3.6}$$

De (3.2), (3.3), (3.6) on a alors aussi

$$\left\|\frac{\partial u_\lambda}{\partial t}\right\|_{\mathcal{H}} \leqslant C_6 . \tag{3.7}$$

De (3.6) et (3.7) on peut supposer, sans perdre de généralité,

(3.8) $$\lim_{\lambda\to 0}{}^* \frac{\partial u_\lambda}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} \qquad \text{dans } \mathcal{H},$$

(3.9) $$\lim_{\lambda\to 0}{}^* \Delta u_\lambda = \Delta u \qquad \text{dans } \mathcal{H}.$$

De (3.3) on peut aussi supposer, sans perdre de généralité,

(3.10) $$\lim_{\lambda\to 0}{}^* \beta_\lambda(u_\lambda) = g \qquad \text{dans } \mathcal{H}.$$

Indiquons par $J_\lambda$ la resolvante de $\beta$; de (3.3), on a

(3.11) $$\|J_\lambda u_\lambda - u_\lambda\|_{\mathcal{H}} \leqslant \lambda C_3$$

de (3.8) (3.9) on a aussi

(3.12) $$\lim_{\lambda\to 0} u_\lambda = u \qquad \text{dans } \mathcal{H}.$$

De (3.10), (3.11), (3.12), étant $\beta_\lambda u_\lambda \in \beta(J_\lambda u_\lambda)$, on a

(3.13) $$g(x, t) \in \beta\big(u(x, t)\big) \qquad \text{p.p dans } Q.$$

Soit maintenant $v \in \mathcal{K}_1$; de $(3.1_\lambda)$ on a

$$\left(\frac{\partial u_\lambda}{\partial t} - \Delta u_\lambda + \beta_\lambda u_\lambda - f,\ v - u_\lambda\right) \geqslant 0.$$

De (3.8), (3.9), (3.10) on a

(3.14) $$\left(\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + g - f,\ v - u\right) \geqslant 0.$$

La partie du résultat qui concerne l'existence est ainsi démontrée.

Passons maintenant à la partie, que concerne l'unicité. Soient $u_1$ et $u_2$ deux solutions du problème $(1.1_i)$, $i = 1, 2, 3$.

On a

$$\left(\frac{\partial u_1}{\partial t} - \Delta u_1 + g_1 - f,\ u_2 - u_1\right) \geqslant 0\ ,$$

$$\left(\frac{\partial u_2}{\partial t} - \Delta u_2 + g_2 - f,\ u_2 - u_1\right) \geqslant 0\ .$$

dont

$$\|u_1 - u_2\|^2_{\mathcal{V}} \leqslant -\left(\frac{\partial}{\partial t}(u_1 - u_2),\ u_1 - u_2\right) \leqslant 0$$

dont $u_1 = u_2$.

Le résultat est ainsi démontré.

## 4. Démonstration du Th. 2.

Nous démontrons le Th. 2 dans le cas $i = 1$, étant la démonstration dans les autres cas analogue.

Soit $u$ une solution du problème $(1.2_1)$ et $\{u_{0n}(x)\}$ une suite telle que

$$\lim_{n\to\infty} u_{0n}(x) = u_0(x) \qquad \text{dans } \mathcal{L}^2(\Omega(0))\ ,$$

$u_{0n}(x) \geqslant \psi_1(x, 0)$ p.p dans $\Omega(0)$

$$u_{0n}(x) \in H^1_0(\Omega(0))\ , \qquad \varphi(u_{0n}(x)) \in \mathcal{L}^1(\Omega(0))\ .$$

Considérons le problème,

$$(4.1_n)\quad \begin{cases} \left(\dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u - f_n,\ v - u\right) + \displaystyle\int_Q \varphi(v(x,t))\,dx\,dt - \int_Q \varphi(u(x,t))\,dx\,dt \geqslant 0\ , \\ \forall v \in \mathcal{K}_1\ , \qquad \varphi(v(x,t)) \in \mathcal{L}^1(Q)\ , \\ u \in \mathcal{K}_1 \cap \mathcal{V}\ , \qquad \varphi(u(x,t)) \in \mathcal{L}^1(Q)\ , \\ u(x, 0) = u_{0n}(x)\ , \end{cases}$$

où $\{f_n\}$ est une suite, telle que

$$f_n \in \mathcal{H}\ , \qquad \lim_{n\to\infty} f_n = f \qquad \text{dans } \mathcal{V}^*\ .$$

Pour le Th. 1 le problème $(4.1_n)$ a une solution unique $u_n$; pour démontrer l'unicité de la solution $u$ du problème $(1.2_1)$ il suffira de démontrer que

$$\lim_{n\to\infty} u_n = u \qquad \text{dans } \mathcal{H}$$

(pour la suite $\{u_n\}$, *sans* extraction de soussuites).

De $(1.1_1)$ $(1.2_1)$ on a

$$\left\langle \frac{\partial u_n}{\partial t} - \Delta u_n - f_n,\, u - u_n \right\rangle + \int_Q \varphi(u(x,t))\,dx\,dt - \int_Q \varphi(u_n(x,t))\,dx\,dt \geq 0\,,$$

$$\left\langle \frac{\partial u_n}{\partial t} - \Delta u - f,\, u_n - u \right\rangle + \int_Q \varphi(u_n(x,t))\,dx\,dt - \int_Q \varphi(u(x,t))\,dx\,dt \geq -\frac{1}{2}\|u_n(\cdot,0) - u_0(\cdot)\|^2_{\mathfrak{L}^2(\Omega(0))}$$

dont

$$\|u_n - u\|^2_{\mathcal{V}} \leq \|f_n - f\|_{\mathcal{V}^*}\|u_n - u\|_{\mathcal{V}} + \tfrac{1}{2}\|u_{0n} - u_0\|^2_{\mathfrak{L}^2(\Omega(0))}$$

dont

$$\lim_{n\to\infty} u_n = u \qquad \text{dans } \mathcal{V}\,.$$

Le résultat est ainsi démontré; passons maintenant à la partie concernante l'existence.

Considérons une suite $\{u_{0n}(x)\}$ dans $H_0^1(\Omega(0))$ avec

$$\lim_{n\to 0} u_{0n}(x) = u_0(x) \qquad \text{dans } \mathfrak{L}^2(\Omega(0))\,,$$

$$u_{0n}(x) \geq \psi_1(x,0) \qquad \text{p.p. dans } \Omega(0)\,,$$

$$\varphi(u_{0n}(x)) \in \mathfrak{L}^1(\Omega(0))$$

et soit $\{f_n\}$ une suite dans $\mathcal{H}$ telle que

$$\lim_{n\to 0} f_n = f \qquad \text{dans } \mathcal{V}^*\,.$$

Considérons le problème

$$(4.2_n)\quad \begin{cases} \left(\dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u - f_n,\, v - u\right) + \displaystyle\int_Q \varphi(v(x,t))\,dx\,dt - \int_Q \varphi(u(x,t))\,dx\,dt \geq 0\,, \\ \forall v \in \mathcal{K}_1\,, \qquad \varphi((x,t)) \in \mathcal{L}^1(Q)\,, \\ u \in \mathcal{K}_1 \cap \mathcal{V}\,, \qquad \varphi(u(x,t)) \in \mathcal{L}^1(Q)\,, \\ u(x,0) = u_{0n}(x)\,. \end{cases}$$

On a, du Th. 1, que $(4.2_n)$ a une solution $u_n$.

De $(4.2_n)$ on a aussi

$$\|u_n - u_m\|^2_{\mathcal{V}} \leq \|f_n - f_m\|_{\mathcal{V}^*}\|u_n - u_m\|_{\mathcal{V}} + \tfrac{1}{2}\|u_{0n} - u_0\|_{\mathcal{L}^2(\Omega(0,}$$

dont on a

$$(4.3)\qquad \lim_{n\to\infty} u_n = u \qquad \text{dans } \mathcal{V}\,.$$

De $(4.2_n)$ on a aussi, si $\partial v/\partial t \in \mathcal{H}$ et $\Delta v \in \mathcal{H}$,

$$\int_Q \varphi(u_n(x,t))\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t \leq \frac{1}{2}\|v(\cdot,0) - u_0\|^2_{\mathcal{L}^2(\Omega(0))} + \\ + \int_Q (\varphi(v(x,t))\,dx\,dt + \left(\frac{\partial v}{\partial t} - \Delta v,\, v - u_n\right)$$

dont, en posant $v(x,t) = \psi_1(x,t)$, on a

$$(4.4)\qquad \int_Q \varphi(u_n(x,t))\,dx\,dt \leq C_1$$

De (4.4) on a

$$(4.5)\qquad \int_Q \varphi(u(x,t))\,dx\,dt \leq \liminf_{n\to\infty} \int_Q \varphi(u_n(x,t))\,dx\,dt \leq C_1\,.$$

Considérons alors $v \in \mathcal{K}_1 \cap \mathcal{V}$ avec $\varphi(v(x,t)) \in \mathcal{L}^1(Q)$, $\partial v/\partial t \in \mathcal{H}$; de

$(4.2_n)$ (4.3) (4.4) on a

$$\left\langle \frac{\partial v}{\partial t} - \Delta u - f,\ v - u \right\rangle + \int_Q \varphi(v(x,t))\,dx\,dt - \\ - \int_Q \varphi(u(x,t))\,dx\,dt \geqslant -\frac{1}{2}\,\|u_0 - v(\cdot\,,0)\|^2_{\mathfrak{L}^2(\Omega(0))}\,.$$

Nous observons enfin que de (4.3) on a $u \in \mathcal{K}_1$. On a ainsi démontré aussi la partie concernante l'existence du résultat.

REMARQUE 1. – Il est facil aussi démontrer par régularisation une formule de dependance continue pour le problème $(1.2_i)$.

Soit $(u_{0i}, f_1)$ $[(u_{02}, f_2)]$ un couple de données pour $(1.2_i)$ et $u_1(u_2)$ le solutions correspondantes de $(1.2_i)$.

Nous supposons que $(u_{01}, f_1)[(u_{02}, f_2)]$ satisfaient aux hypothèses du Th. 2; on a

$$\|u_1 - u_2\|^2_{\mathcal{V}} \leqslant \|f_1 - f_2\|_{\mathcal{V}^*}\|u_1 - u_2\|_{\mathcal{V}} + \tfrac{1}{2}\,\|u_{01} - u_{02}\|^2_{\mathfrak{L}^2(\Omega(0))}\,.$$

## BIBLIOGRAPHIE


[1] M. BIROLI, *Sur les inéquations d'évolution avec convexe dépendent du temps*, « Ricerche di Matematica » XXIII, 203-222, 1974

[2] H. BRÉZIS, *Un problème d'évolution avec contraintes unilatérales dépendent du temps*, C. R. Acad. Sc. Paris, A **274** (1972), pp. 310-312.

[3] H. FUJITA, *The penality method and some non linear initial value problems*, Symposium on non linear Functional Analysis, Madison, 1971, Academic Press (1971), pp. 635-667.

[4] J. L. LIONS, *Sur les problèmes mixtes pour certaines systèmes paraboliques, dans des ouverts non cylindriques*, Ann. Inst. Fourier, **7** (1957), pp. 143-182.

[5] J. L. LIONS, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod, Gauthier-Villars, Paris (1969).

[6] J. C. PERALBA, *Un problème d'évolution rélatif à un opérateur sousdifférentiel dépendent du temps*, C. R. Acad. Sc. Paris, A **275**, fasc. 2 (1972), pp. 93-95.

[7] G. STAMPACCHIA, *Equations du second ordre à coefficients discontinus*, Les Presses de l'Université de Montréal (1966).


Manoscritto pervenuto in redazione il 3 aprile 1974.