Rendiconti
del
Seminario Matematico
della
Università di Padova

Angelo Favini

# Su un'equazione astratta di tipo Tricomi

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*, tome 53 (1975), p. 257-267

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1975__53__257_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 53 (1975)

# Su un'equazione astratta di tipo Tricomi.

ANGELO FAVINI (*)

SUMMARY - In this note I consider the abstract equation

$$u''(z) = zAu(z) , \qquad z \in R .$$

First, I study the existence of a « strict » solution for the Cauchy problem of hyperbolic type

$$(1) \qquad \begin{cases} u''(z) = zB^2u(z) , & z \geqslant 0 , \\ u(0) = u_0 , & u'(0) = u_1 , \end{cases}$$

$B$ being a suitable linear closed operator in the Banach space $X$. I prove that if $u_0$ and $u_1$ belong to $D(B^2)$ and $D(B^3)$, respectively, a strict solution exists. The abstract result allow me to obtain, for example, Tricomi's formula for the solution of the problem

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u(z, x)}{\partial z^2} = z \dfrac{\partial^2 u(z, x)}{\partial x^2} , & z \geqslant 0, \ x \in R , \\ u(0, x) = u_0(x) , \quad \dfrac{\partial u(0, x)}{\partial z} = u_1(x) , & x \in R . \end{cases}$$

Then, I write explicitly a « strict » solution for the elliptic problem

$$(3) \qquad \begin{cases} u''(z) = zAu(z) , & z > 0 , \\ u(0) = u_0 , \end{cases}$$

where $A$ is a suitable linear closed operator in the complex Banach space $X$.

(*) Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico « S. Pincherle », Piazza di Porta San Donato 5, Bologna.

Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.A.F.A. del C.N.R.

The results apply, in particular, to the problem

$$(4)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u(z,x)}{\partial z^2} = -z\,\dfrac{\partial^2 u(z,x)}{\partial x^2}\,, & z \geqslant 0,\ x \in R\,, \\ u(0,x) = u_0(x)\,, \quad x \in R\,. \end{cases}$$

Moreover, making use of the Theorem 1 (hyperbolic type), I find a « solution » for Tricomi equation in the whole plane assuming the given value $u_0(x)$ on the parabolic line $z = 0$.

**1.** Sia $X$ uno spazio di Banach reale o complesso e sia $B$ un operatore lineare in $X$ a dominio $D(B)$ denso in $X$, generatore infinitesimale di un gruppo fortemente continuo di operatori.

DEFINIZIONE 1. *Siano $u_0$, $u_1$ elementi di $X$. Diciamo che $u(z)$, $z \geqslant 0$, è soluzione stretta del problema* (1) *se $u(z)$ è continua su* $[0, +\infty[$, *ha derivate prima e seconda continue su* $]0, +\infty[$, *$u(z) \in D(B^2)$, e vale la* (1).

TEOREMA 1. *Se $u_0 \in D(B^2)$, $u_1 \in D(B^3)$, allora il problema* (1) *ha la soluzione stretta*

$$(5)\qquad u(z) = C_0 \int_{-1}^{1} (1-t^2)^{-\frac{5}{6}} \exp\left[\tfrac{2}{3} B z^{\frac{3}{2}} t\right] u_0\, dt + \\ + C_1 z \int_{-1}^{1} (1-t^2)^{-\frac{1}{6}} \exp\left[\tfrac{2}{3} B z^{\frac{3}{2}} t\right] u_1\, dt, \ (*)\,,$$

*dove* $C_0 = \left(\int_{-1}^{1} (1-t^2)^{-\frac{5}{6}} dt\right)^{-1}$, $C_1 = \left(\int_{-1}^{1} (1-t^2)^{-\frac{1}{6}} dt\right)^{-1}$.

DIMOSTRAZIONE. Osserviamo prima di tutto che, in virtù delle ipotesi su $u_0$ e $u_1$ e delle proprietà del gruppo generato da $B$ (cfr. [1], pp. 11-12), $u(z) \in D(B^2)$, $z > 0$.

Indichiamo con $y(z)$ e $w(z)$ rispettivamente i due addendi nel secondo membro di (5).

(*) La formula è motivata dalla espressione della funzione di Airy. Per un'idea analoga, relativa all'equazione di Eulero-Poisson-Darboux, cfr. [2].

Consideriamo $y(z)$. Poichè $u_0 \in D(B^2)$, riesce, eseguendo opportune integrazioni per parti,

$$y'(z) = C_0 \int_{-1}^{1} (1-t^2)^{-\frac{5}{6}} z^{\frac{1}{2}} tB \exp\left[\frac{2}{3} B z^{\frac{3}{2}} t\right] u_0 \, dt =$$

$$= 2C_0 \int_{-1}^{1} (1-t^2)^{\frac{1}{6}} z^2 B^2 \exp\left[\frac{2}{3} B z^{\frac{3}{2}} t\right] u_0 \, dt \, ;$$

$$y''(z) = \frac{C_0}{z} \int_{-1}^{1} (1-t)^{-\frac{5}{6}} z^{-\frac{1}{2}} B^2 t \exp\left[\frac{2}{3} B z^{\frac{3}{2}} t\right] u_0 \, dt +$$

$$+ C_0 \int_{-1}^{1} (1-t^2)^{-\frac{5}{6}} z t^2 B^2 \exp\left[\frac{2}{3} B z^{\frac{3}{2}} t\right] u_0 \, dt =$$

$$= C_0 \int_{-1}^{1} (1-t^2)^{\frac{1}{6}} z B^2 \exp\left[\frac{2}{3} B z^{\frac{3}{2}} t\right] u_0 \, dt +$$

$$+ C_0 \int_{-1}^{1} (1-t^2)^{-\frac{5}{6}} (t^2 - 1 + 1) z B^2 \exp\left[\frac{2}{3} B z^{\frac{3}{2}} t\right] u_0 \, dt =$$

$$= C_0 \int_{-1}^{1} (1-t^2)^{-\frac{5}{6}} z B^2 \exp\left[\frac{2}{3} B z^{\frac{3}{2}} t\right] u_0 \, dt = z B^2 y(z) \, , \qquad z > 0 \, .$$

D'altra parte, poichè $\|\exp[\frac{2}{3} B z^{\frac{3}{2}} t] x - x\| \xrightarrow[z \to 0+]{} 0$, $x \in D(B)$ e

$$\|\exp[\tfrac{2}{3} B z^{\frac{3}{2}} t]\|_{X \to X} \leqslant M \exp[\omega |t| z^{\frac{3}{2}}] \leqslant M_1 \, , \qquad t \in [-1, 1], \; z \in [0, \varepsilon],$$

deduciamo che $\|y(z) - u_0\| \xrightarrow[z \to 0+]{} 0$.

Inoltre, da $\exp[tB] Bx = B \exp[tB] x$, $\forall x \in D(B)$, segue

$$\|y'(z)\| \leqslant z^{\frac{1}{2}} \int_{-1}^{1} (1-t^2)^{-\frac{5}{6}} \left\| \exp\left[\frac{2}{3} B z^{\frac{3}{2}} t\right] \right\|_{X \to X} \|C_0 B u_0\| \, dt \xrightarrow[z \to 0+]{} 0 \, .$$

Ciò prova che $y(z)$ soddisfa il problema

$$\begin{cases} y''(z) = zB^2 y(z)\,, & z > 0\,, \\ \lim\limits_{z\to 0+} y(z) = u_0\,, & \lim\limits_{z\to 0+} y'(z) = 0\,. \end{cases}$$

Ora, la funzione $(t, z) \to (1 - t^2)^{-\frac{5}{6}} \exp[\frac{2}{3} Bz^{\frac{3}{2}} t]\, u_0$ è continua su $]-1, 1[\times[0, +\infty[$ ed è anche dotata di derivata parziale prima continua rispetto a $z$ su $]-1, 1[\times[0, +\infty[$ (cfr. [4], pp. 481-483); allora

$$y'(z) = C_0 \int_{-1}^{1} (1 - t^2)^{-\frac{5}{6}} z^{\frac{1}{2}} \exp[\tfrac{2}{3} Bz^{\frac{3}{2}} t]\, Bu_0\, dt, \quad z \geqslant 0$$

In particolare, $y'(0) = 0$. Vale poi

$$z^{-1}[y'(z) - y'(0)] = 2zC_0 \int_{-1}^{1} (1 - t^2)^{\frac{1}{6}} \exp[\tfrac{2}{3} Bz^{\frac{3}{2}} t]\, B^2 u_0\, dt\,, \qquad z > 0,$$

e quindi esiste $y''(0) = 0$. Risulta anche

$$B^2 y(z) = C_0 \int_{-1}^{1} (1 - t^2)^{-\frac{5}{6}} \exp\left[\frac{2}{3} Bz^{\frac{3}{2}} t\right] B^2 u_0\, dt \xrightarrow[z\to 0+]{} B^2 u_0\,,$$

e perciò l'equazione è soddisfatta anche in $z = 0$.

Passiamo ad esaminare la $w(z)$. Con integrazioni per parti, si ha

$$w'(z) = C_1 \int_{-1}^{1} (1 - t^2)^{-\frac{1}{6}} \exp\left[\frac{2}{3} Bz^{\frac{3}{2}} t\right] u_1\, dt + \\ + \frac{2}{5} zC_1 \int_{-1}^{1} (1 - t^2)^{\frac{5}{6}} B^2 z^2 \exp\left[\frac{2}{3} Bz^{\frac{3}{2}} t\right] u_1\, dt\,,$$

$$w''(z) = \frac{8}{5} C_1 \int_{-1}^{1} (1 - t^2)^{\frac{5}{6}} B^2 z^2 \exp\left[\frac{2}{3} Bz^{\frac{3}{2}} t\right] u_1\, dt +$$

$$+\frac{3}{5}C_1\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{\frac{5}{6}}B^2z^2t\frac{d}{dt}\Bigl(\exp\frac{2}{3}Bz^{\frac{3}{2}}t\Bigr]u_1\Bigr)dt=$$

$$=C_1\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{\frac{5}{6}}z^2B^2\exp\left[\frac{2}{3}Bz^{\frac{3}{2}}t\right]u_1\,dt+$$

$$+C_1\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{-\frac{1}{6}}(t^2+1-1)\,z^2B^2\exp\left[\frac{2}{3}Bz^{\frac{3}{2}}t\right]u_1\,dt=$$

$$=C_1\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{-\frac{1}{6}}z^2B^2\exp\left[\frac{2}{3}Bz^{\frac{2}{3}}t\right]u_1\,dt=zB^2w(z)\ ,\qquad z>0\ .$$

Nello stesso modo col quale si è studiata la $y(z)$, si prova poi che $w(z)\xrightarrow[z\to 0+]{}0$, $w'(z)\xrightarrow[z\to 0+]{}u_1$ e che $w(z)$ è ben definita, insieme alle sue derivate prima e seconda, anche nello zero e soddisfa l'equazione anche per $z=0$.

Dunque, la (5) è effettivamente soluzione stretta del problema (1).

Applicazione 1. Denotiamo con $UCB(R)$ l'insieme di tutte le funzioni limitate e uniformemente continue su $R$, a valori reali o complessi. $UCB(R)$ è uno spazio di Banach se munito della norma $\|f\|_C=$ $=\sup\limits_X|f(x)|$.

$L^p(R)$, $1\leqslant p<+\infty$, denota invece lo spazio di Banach di tutte le (classi di) funzioni misurabili su $R$ e di $p$-esima potenza sommabili, con la norma usuale. Con $AC_{\text{loc}}(R)$ intendiamo lo spazio di tutte le funzioni localmente assolutamente continue su $R$.

Sia $X=UCB(R)$ oppure $X=L^p(R)$. Definiamo

$$D(B)=\{f\in X;\,f\in AC_{\text{loc}}(R),\,f'\in X\},\ \ Bf=f'.$$

Si sa (cfr. [1], p. 45) che $B=d/dx$ genera il gruppo delle traslazioni

$$(e^{tB}f)(x)=f(x+t)\ ,\qquad f\in X,\ t\in R;$$

inoltre, se $r \in \mathbf{N}$ e

$$f \in D(B^r) = \{f \in X;\, f, f', \ldots, f^{(r-1)} \in AC_{\mathrm{loc}}(R) \cap X,\, f^{(r)} \in X\}\,,$$

risulta $B^r f = f^{(r)}$, (cfr. [1], p. 43).

Ciò premesso, consideriamo il problema (2). Esso non è altro che la « parte iperbolica » dell'equazione di Tricomi (cfr. [7], p. 347 sgg.).

Dai risultati sopra richiamati e dal Teorema 1 segue che se $u_0 \in D(B^2)$ e $u_1 \in D(B^3)$, la funzione $u(z, x)$ data da

$$u(z, x) = C_0 \int_{-1}^{1} (1 - t^2)^{-\frac{5}{6}} u_0(x + \tfrac{2}{3} z^{\frac{3}{2}} t)\, dt + C_1 z \int_{-1}^{1} (1 - t^2)^{-\frac{1}{6}} u_1(x + \tfrac{2}{3} z^{\frac{3}{2}} t)\, dt$$

è soluzione di tale problema.

Effettuando il cambiamento di variabile $x + \frac{2}{3} z^{\frac{3}{2}} t = \xi$, otteniamo

$$u(z, x) = C_2 (x + \tfrac{2}{3} z^{\frac{3}{2}} - x + \tfrac{2}{3} z^{\frac{3}{2}}) \int_{x - \frac{2}{3} z^{\frac{3}{2}}}^{x + \frac{2}{3} z^{\frac{3}{2}}} \Big[(x + \tfrac{2}{3} z^{\frac{3}{2}} - \xi)\big(\xi - (x - \tfrac{2}{3} z^{\frac{3}{2}})\big)\Big]^{-\frac{5}{6}} u_0(\xi)\, d\xi \,+$$

$$+\, C_3 \int_{x - \frac{2}{3} z^{\frac{3}{2}}}^{x + \frac{2}{3} z^{\frac{3}{2}}} \Big[(x + \tfrac{2}{3} z^{\frac{3}{2}} - \xi)\big(\xi - (x - \tfrac{2}{3} z^{\frac{3}{2}})\big)\Big]^{-\frac{1}{6}} u_1(\xi)\, d\xi\,.$$

Riotteniamo in tal modo la formula (6) di [6], p. 349.

**2.** Sia $0 \leqslant \omega < \pi$ e sia $M > 0$. Ricordiamo che per un operatore lineare chiuso $A$ nello spazio di Banach complesso $X$ di tipo $(\omega, M)$, è possibile definire la potenza $A^\alpha$, $0 < \alpha < 1$, (cfr. [5], p. 269). $A^\alpha$ è di tipo $(\alpha\omega, M)$ e se $\alpha\omega < \pi/2$, $-A^\alpha$ è generatore infinitesimale del semigruppo $\exp[-\tau A^\alpha]$, olomorfo su $|\arg \tau| < \pi/2 - \alpha\omega$ e uniformemente limitato per $|\arg \tau| < \pi/2 - \alpha\omega - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$.

In particolare, se $\alpha = \frac{1}{3}$, $\exp[-\tau A^{\frac{1}{3}}]$ riesce definito su $|\arg \tau) < \pi/6 + (\pi - \omega)/3$ ed è uniformemente limitato su $|\arg \tau| < \pi/6 + (\pi - \omega)/3 - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$.

Poichè l'insieme risolvente di $-A^{\frac{1}{3}}$ è aperto, esiste una curva regolare $\Gamma$, contenuta in $\mathrm{Re}\,\lambda < 0$, coincidente con i raggi $\arg \lambda = \pm\theta$, per $|\lambda|$ grande, $\theta$ essendo un conveniente reale con $\frac{2}{3}\pi \leqslant \theta < \frac{5}{6}\pi$, tale che $\exp[tA^{\frac{1}{3}}]$ è definito su $\Gamma$ e naturalmente, a « sinistra » di $\Gamma$ e in un intorno a « destra » di $\Gamma$. A $\Gamma$ viene dato l'orientamento antiorario.

Teorema 2. *Valgano su $A$ le ipotesi fatte sopra e sia $u_0 \in D(A)$. Allora la funzione*

$$u(z) = \alpha^{-1}\int_{\Gamma} \exp[ztA^{\frac{1}{3}} - t^3/3]\, u_0\, dt\,, \qquad \alpha = \int_{\Gamma} \exp[-t^3/3]\, dt \neq 0\,,$$

*è soluzione « stretta » del problema* (3) *nel senso che è definita e continua su* $[0, +\infty[$, *a valori in* $X$, *dotata di derivate forti prima e seconda continue su* $]0, +\infty[$, $u(z) \in D(A)$, $z > 0$, *e soddisfa* (3).

Dimostrazione. In forza della scelta di $\Gamma$, per ogni $t \in \Gamma$, $|t|$ sufficientemente grande, riesce $|\arg t^3| \leqslant \pi/2$ e quindi $\operatorname{Re} t^3 > 0$; poichè, poi, la norma di $\exp[tA^{\frac{1}{3}}]$ è uniformemente limitata su $\Gamma$, l'integrale risulta convergente, addirittura anche per $z = 0$.

In effetti, dalla sommabilità di $\exp[-t^3/3]$ e dalla

$$\|\exp[ztA^{\frac{1}{3}} - t^3/3]\|_{X\to X} \leqslant C|\exp[-t^3/3]|\,, \qquad \forall t \in \Gamma,\ \forall z \geqslant 0,$$

si ha che $\lim\limits_{z\to 0+} u(z) = u(0) = u_0$.

Poichè $u_0 \in D(A)$ e $A^\alpha A^\beta x = A^{\alpha+\beta} x$ per ogni $x \in D(A)$, $0 < \alpha, \beta$, $\alpha + \beta \leqslant 1$,

$$u''(z) = \alpha^{-1}\int_{\Gamma} t^2 A^{\frac{2}{3}} \exp[ztA^{\frac{1}{3}} - t^3/3]\, u_0\, dt = \alpha^{-1}\int_{\Gamma} t^2 \exp[ztA^{\frac{1}{3}} - t^3/3]\, A^{\frac{2}{3}} u_0\, dt\,.$$

Di qui, integrando per parti, in base alla limitatezza del semigruppo, otteniamo

$$u''(z) = \alpha^{-1}\int_{\Gamma} \exp[ztA^{\frac{1}{3}} - t^3/3]\, zA^{\frac{1}{3}}(A^{\frac{2}{3}} u_0)\, dt = zAu(z)\,, \qquad z > 0.$$

La prova dell'affermazione è così terminata.

Osservazione. Mostriamo che, nelle ipotesi del Teorema 2, $u(z)$ è derivabile due volte anche nell'origine e soddisfa ivi la equazione. Notiamo che da

$$u'(z) = \alpha^{-1}\int_{\Gamma} tA^{\frac{1}{3}} \exp[ztA^{\frac{1}{3}} - t^3/3]\, u_0\, dt = \alpha^{-1}\int_{\Gamma} t \exp[ztA^{\frac{1}{3}} - t^3/3\, A^{\frac{1}{3}}]\, u_0\, dt$$

segue

$$u'(z) \xrightarrow[z\to 0+]{} \alpha^{-1}\left(\int_\Gamma t \exp\left[-\frac{t^3}{3}\right] dt\right) A^{\frac{1}{3}} u_0 = \beta A^{\frac{1}{3}} u_0 \,.$$

Si ha allora

$$z^{-1}[u(z) - u(0)] - \alpha^{-1}\left(\int_\Gamma t \exp\left[-\frac{t^3}{3}\right] dt\right) A^{\frac{1}{3}} u_0 =$$

$$= \alpha^{-1}\int_\Gamma \frac{\exp[-t^3/3]}{z}[\exp[ztA^{\frac{1}{3}}]u_0 - u_0 - tzA^{\frac{1}{3}}u_0]\,dt$$

e quindi, se $z \in ]0, 1[$, ad esempio,

$$\left\| z^{-1}[u(z) - u(0)] - \alpha^{-1}\int_\Gamma t \exp\left[-\frac{t^3}{3}\right] A^{\frac{1}{3}} u_0\, dt \right\| \leqslant$$

$$\leqslant |\alpha^{-1}| \int_\Gamma \frac{|\exp[-t^3/3]|}{|z|} \|\exp[ztA^{\frac{1}{3}}]u_0 - u_0 - tzA^{\frac{1}{3}}u_0\|\,|dt| \,.$$

Ora, (cfr. [6], pp. 235-236, p. 721), vale

$$\|\exp[z + A^{\frac{1}{3}}]u_0 - u_0 - tzA^{\frac{1}{3}}u_0\| \leqslant \sup_{\xi\in]0,1[} \left\| \frac{\partial}{\partial\xi}\exp[\xi tA^{\frac{1}{3}}]u_0 - tA^{\frac{1}{3}}u_0 \right\| \cdot z =$$

$$= \sup_{\xi\in]0,1[} \|\exp[\xi tA^{\frac{1}{3}}]tA^{\frac{1}{3}}u_0 - tA^{\frac{1}{3}}u_0\| \cdot z \leqslant C|t|\, \|A^{\frac{1}{3}}u_0\| \cdot z \,.$$

Di qui segue la derivabilità di $u(z)$ in $z = 0$ sulla base del Teorema della convergenza dominata. Inoltre, $u'(0) = \beta A^{\frac{1}{3}} u_0$.

Poi, dalle $u''(z) = z\left(\alpha^{-1}\int_\Gamma \exp[ztA^{\frac{1}{3}} - t^3/3] A u_0\, dt\right)$ e

$$\left\| \int_\Gamma \exp[ztA^{\frac{1}{3}} - t^3/3] A u_0\, dt \right\| \leqslant C' \|Au_0\| \,,$$

deduciamo che $\lim_{z\to 0+} u''(z) = 0$.

Facendo appello al ragionamento usato sopra, deduciamo che $u(z)$ ha derivata seconda continua su $[0, +\infty[$, con $u''(0) = 0$.

D'altro canto

$$\frac{u''(z)}{z} \xrightarrow[z\to 0+]{} Au_0 .$$

Ciò implica che $Au(z) \xrightarrow[z\to 0+]{} Au_0$ e pertanto, $zAu(z) \xrightarrow[z\to 0+]{} 0$.
L'affermazione è provata.

TEOREMA 3. *Sia $A$ un operatore di tipo $(\omega, M)$ con $\omega < \pi/2$ (cioè, $-A$ è generatore infinitesimale di un semigruppo olomorfo limitato). Se $u_0 \in D(A)$ e $\gamma = \exp[i\frac{2}{3}\pi]$, allora la $u(z)$, $z \geqslant 0$, data da*

$$u(z) = \gamma\int_0^\infty \exp[\gamma t A^{\frac{1}{3}} z - t^3/3]\, x_0\, dt - \gamma^2\int_0^\infty \exp[\gamma^2 t A^{\frac{1}{3}} z - t^3/3]\, x_0\, dt ,$$

*dove $x_0 = (\gamma(1-\gamma)\alpha)^{-1}u_0$, è soluzione stretta del problema* (3).

DIMOSTRAZIONE. Notiamo che se $\omega < \pi/2$ allora $\pi/3 < \pi/2 - \omega/3$ e quindi exp $[tA^{\frac{1}{3}}]$ è definito anche su $\arg t = \pm\frac{2}{3}\pi$, $\operatorname{Re} t \leqslant 0$.

La formula precedente ha quindi senso e si potrebbe mostrare, per la olomorfia della funzione considerata, che tale espressione coincide con quella data nel Teorema 2; d'altra parte, un calcolo diretto prova la nostra affermazione.

TEOREMA 4. *Se $A$ è un operatore di tipo $(\omega, M)$ ed è invertibile, allora la soluzione del problema* (3) *soddisfa anche*

$$\lim_{z\to+\infty} u(z) = 0 .$$

DIMOSTRAZIONE. Dalle ipotesi segue che si può assumere che riesca $\|(\lambda + A)^{-1}\|_{X\to X} \leqslant M_\varepsilon(1 + |\lambda|)^{-1}$, $|\arg\lambda| < \pi - \omega - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, e che una valutazione analoga è vera anche per $A^{\frac{1}{3}}$. Ciò implica

$$\|\exp[-\tau A^{\frac{1}{3}}]\|_{X\to\overline{X}} \leqslant C \exp[-\delta \operatorname{Re}\tau] , \qquad \operatorname{Re}\tau \geqslant 0 ,$$

$$|\arg\tau| < \frac{\pi}{6} + \frac{\pi-\omega}{3} - \varepsilon ,$$

$\delta > 0$, conveniente (cfr. [5], p. 105). Poichè inoltre

$$\|\exp[ztA^{\frac{1}{3}} - t^3/3]\|_{X\to X} \leqslant M \exp[-\delta z \operatorname{Re} t] |\exp[-t^3/3]| \leqslant$$
$$\leqslant M_1 \exp[-\delta_1 z] |\exp[-t^3/3]| , \qquad t \in \Gamma ,$$

riesce

$$\|u(z)\| \leqslant M_1 \exp[-\delta_1 z] \int_\Gamma \left| \exp\left[-\frac{t^3}{3}\right] \right| \|\alpha^{-1} u_0\| \, dt \xrightarrow[z\to\infty]{} 0 .$$

Applicazione 2. Sia $A$ l'operatore $-d^2/dx^2$ definito in uno degli spazi $UCB(R)$, $L^p(R)$, $1 \leqslant p < +\infty$; cioè, in riferimento ai Teoremi precedenti, $X = UCB(R)$ oppure $X = L^p(R)$.

Se $D_A$ è opportunamente definito, (cfr. [4]), $A$ è di tipo $(0, 1)$.

Allora in base al Teorema 2, esiste una funzione $u = u(z, x)$, definita su $[0, +\infty[\times R$, soddisfacente (4) nella topologia di $X$.

Notiamo che

$$\frac{\partial u(0, \cdot)}{\partial z} = \beta A^{\frac{1}{3}} u_0 .$$

D'altra parte, se $u_0 \in X$, $u_0' \in AC_{\mathrm{loc}}(R) \cap X$, $u_0'' \in X$, $A^{\frac{1}{3}} u_0 = u_1 \in X$, $u_1'$, $u_1'' \in AC_{\mathrm{loc}}(R) \cap X$, $u_1^{(3)} \in X$, sappiamo (cfr. la Applicazione 1), che il problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u(z, x)}{\partial z^2} + z \dfrac{\partial^2 u(z, x)}{\partial x^2} = 0 , & z \leqslant 0 , \ x \in R , \\[2ex] u(0, x) = u_0(x) , \qquad \dfrac{\partial u(0, x)}{\partial z} = \beta A^{\frac{1}{3}} u_0(x) , & x \in R , \end{cases}$$

ha una soluzione « stretta ». Sotto queste condizioni su $u_0$, la $u(z, x)$ così prolungata a $]-\infty, 0] \times R$, è una soluzione dell'equazione di Tricomi che assume il dato valore $u_0(x)$ sulla linea parabolica $z = 0$.

## BIBLIOGRAFIA

[1] P. L. Butzer - H. Berens, *Semi-Groups of Operators and Approximation*, ed. Springer (1967).

[2] J. A. Donaldson, *An operational calculus for a class of abstract operator equations*, J. Math. Anal. and Appl., **37** (1972), pp. 167-184.

[3] A. FRIEDMAN, *Partial differential equations*, ed. Holt, Rinehart and Winston (1969).
[4] T. KATO, *Perturbation theory for linear operators*, ed. Springer (1966).
[5] T. KATO, *Fractional powers of dissipative operators*, J. Math. Soc. Japan, **13** (1961), pp. 246-274.
[6] L. SCHWARTZ, *Analyse mathématique*, tome 1, ed. Hermann (1967).
[7] F. G. TRICOMI, *Equazioni a derivate parziali*, ed. Cremonese (1957).

Pervenuto in Redazione il 2 gennaio 1975.