RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

OSCAR STEFANI
ALESSANDRA ZANARDO

Alcune caratterizzazioni di una sottoalgebra di $C^*(X)$ e compattificazioni ad essa associate

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 53 (1975), p. 363-367

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1975__53__363_0>

Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, Vol. 75 (1975)

Alcune caratterizzazioni di una sottoalgebra di $C^*(X)$ e compattificazioni ad essa associate.

Oscar Stefani e Alessandra Zanardo (*)

Sia X uno spazio $T_{3\frac{1}{2}}$. In [N.R.] si definisce $C^{\#}(X)$ come il sottoinsieme di $C(X)$ formato dalle funzioni f tali che $M(f)$ è reale per ogni ideale massimale M di $C(X)$. Si verifica facilmente che $C^{\#}(X)$ è una sottoalgebra di $C^*(X)$ reticolarmente ordinata e con unità.

Questa nota si propone di dare delle caratterizzazioni di $C^{\#}(X)$, che vengono esposte nel Teorema del § 1; di queste la più interessante sembra essere il fatto che $f \in C^{\#}(X)$ se e solo se f^{β} è localmente costante su $\beta X \setminus vX$.

Nel § 2 si studiano alcuni casi in cui $C^{\#}(X)$ individua una compattificazione e, con l'ipotesi aggiuntiva della realcompattezza nei casi non banali, si trovano anche le compattificazioni associate.

Il § 2 è stato suggerito dal fatto che in alcuni casi $C^{\#}(X)$ non individua la topologia di X: lo spazio studiato in [S.Z.] è connesso, metrico separabile e quindi gode di altre proprietà, quali normalità, realcompattezza, essere a base numerabile, ecc., eppure tutte le funzioni di $C^{\#}(X)$ sono costanti.

Per terminologia e notazioni si fa riferimento a [G.J.], con l'unica eccezione della definizione di spazio 0-dimensionale.

Chiameremo spazi 0-dimensionali gli spazi con una base di chiusa-aperti e fortemente 0-dimensionali quelli che in [G.J.] si definiscono 0-dimensionali.

Ricordiamo che uno spazio X ha una compattificazione 0-dimensionale se e solo se X è 0-dimensionale e che con ζX si indica la massima

---

(*) Indirizzo degli A.A.: Istituto di Matematica Applicata dell'Università - Via Belzoni 7 - 35100 Padova.

tra queste; ζX risulta essere associata ad A_0 (dove A_0 è la sottoalgebra di $C^*(X)$ delle funzioni a immagine finita) e si può ottenere identifificando tra loro i punti di ciascuna componente connessa di $\beta X \setminus X$. [B].

§ **1.** LEMMA 1. Se S è C-immerso in X ed $f \in C^{\#}(X)$, allora $f/S \in C^{\#}(S)$.

DIM. Vedi [S.Z.].

LEMMA 2. Se $f \in C^{\#}(X)$, $f[X]$ è compatto.

DIM. Sia $r \in \mathrm{cl}\, f[X] \setminus f[X]$ e si consideri per ogni $n \in N$, $Z_n = f^{\leftarrow}[r - 1/n, r + 1/n]$. La famiglia $(Z_n)_{nN\in}$ ha la proprietà dell'intersezione finita ma non la proprietà dell'intersezione numerabile e perciò è contenuta in uno z-ultrafiltro associato ad un ideale massimale iperreale M. Si ha $r - 1/n \leqslant M(f) \leqslant r + 1/n$ e $M(f) \neq r$, da cui l'assurdo.

TEOREMA. Se $f \in C(X)$, sono equivalenti:

a) $f \in C^{\#}(X)$;

b) per ogni S C-immerso in X, $f[S]$ è compatto;

c) per ogni copia D di N C-immersa in X, $f[D]$ è compatto;

d) per ogni copia D di N C-immersa in X, $f[D]$ è finito;

e) $f \in C^*(X)$ e f^β è localmente costante su $\beta X \setminus vX$, cioè per ogni $x \in \beta X \setminus vX$ esiste un intorno di x in βX su cui f^β è costante;

f) $f \in C^*(X)$ e $\forall r \in R$, $Z(f^\beta - r) = \mathrm{cl}_{\beta X} Z_X(f - r)$.

Ricordiamo che la caratterizzazione *c*) è esposta in [N.R.]

DIM.

a) $\Rightarrow$ *b*). Segue dei Lemmi 1 e 2.

b) $\Rightarrow$ *c*). Ovvio.

c) $\Rightarrow$ *d*). Sia $f[D] = \{r_n : n \in N\}$ infinito: esistono allora un r reale ed una sottosuccessione di $(r_n)_{n\in N}$ convergente ad r, i cui termini sono tutti diversi da r. Le antimmagini in D degli elementi di detta sottosuccessione formano una copia D' di N con $f[D']$ non compatto.

d) $\Rightarrow$ *e*). L'implicazione della limitatezza di f è ovvia; per l'altra parte, sia f^β non localmente costante in $x \in \beta X \setminus vX$ e sia $g \in C(\beta X)$ tale che $x \in Z(g) \subset \beta X \setminus vX$. Costruiamo una successione come segue:

scegliamo $x_1 \in g^{\leftarrow}]-1, 1[\cap X$ con $f(x_1) \neq f(x) = r$ e $x_{n+1} \in f^{\beta\leftarrow}]r - \delta_n, r + \delta_n[\cap g^{\leftarrow}]-1/n, 1/n[\cap X$ dove $\delta_n = |f(x_n) - r|$, $f(x_{n+1}) \neq r$, $\forall n \in N$.

Chiaramente $D = \{x_n : n \in N\}$ è una copia di N C-immersa in X ma $f[D]$ non è finito.

$e) \Rightarrow f)$. Basta far vedere l'inclusione non banale $Z(f^\beta) \subset \mathrm{cl}_{\beta X} Z(f)$. Infatti $p \in Z(f^\beta) \cap vX \Rightarrow f^\beta(p) = 0 \Rightarrow f \in M^p \Rightarrow$ (per il Teor. di Gelfand-Kolmogorov) $p \in \mathrm{cl}_{\beta X} Z(f)$; se invece $p \in Z(f^\beta) \setminus vX$, f^β è localmente costante su p cioè $Z(f^\beta)$ è un intorno di p, ma allora segue subito $p \in \mathrm{cl}_{\beta X} Z(f)$.

$f) \Rightarrow a)$. Preso comunque un ideale massimale iper-reale M^p, se $f^\beta(p) = r$ allora $p \in Z(f^\beta - r) = \mathrm{cl}_{\beta X} Z_X(f - r)$ e per il teor. di Gelfand-Kolmogorov $f - r \in M^p$. c.v.d.

COROLLARIO 1. Se X è discreto allora $C^\#(X) = A_0$.

DIM. Segue banalmente da d) e dal fatto che $A_0 \subset C^\#(X)$.

COROLLARIO 2. Sia $f \in C^\#(X)$, C un chiuso di βX, $C \subset \beta X \setminus vX$. Allora $f^\beta[C]$ è finito. Pertanto se X è localmente compatto e realcompatto, ed $f \in C^\#(X)$, $f^\beta[\beta X \setminus X]$ è finito.

DIM. Segue da e) e da un ovvio argomento di compattezza.

COROLLARIO 3. Se $f \in C^\#(X)$ ed f^β è costante su un sottoinsieme $E \subset \beta X \setminus vX$, allora è costante su tutto un intorno di E.

DIM. Segue ovviamente dalla e).

PROP. 1. Sia X localmente compatto e realcompatto. Allora $f \in C^\#(X)$ se e solo se $f \in C^*(X)$ e ogni componente connessa di $\beta X \setminus X$ ammette un intorno su cui f^β è costante.

DIM. *Necessità*: segue dei Corollari 2-3.

Sufficienza: segue dalla e) del Teorema.

Nota. La Prop. 1 permette una descrizione immediata di $C^\#(R^n)$, $\forall n \in N$.

§ 2. È noto che c'è una biiezione naturale tra le compattificazioni T di uno spazio X e le sottoalgebre A_T di $C^*(X)$ dotate delle seguenti proprietà: a) contenere le costanti, b) separare punti e chiusi di X, c) essere chiuse rispetto alla convergenza uniforme in $C^*(X)$.

L'algebra A_T associata alla compattificazione T in questa biiezione è formata esattamente da quelle funzioni di $C^*(X)$ che si possono estendere con continuità a T; $C(T)$ e A_T sono isomorfe in modo naturale.

Se una sottoalgebra $A \subset C^*(X)$ possiede le proprietà *a*), *b*), la compattificazione ad essa associata è quella che la biiezione di cui sopra associa a $\mathrm{cl}\, A$.

$C^\#(X)$ gode della proprietà *a*) per ogni spazio X, perciò individuerà una compattificazione di X se solo se gode della proprietà *b*).

PROP. 2. Dato uno spazio X, ciascuna delle prime tre proprietà implica la quarta:

1) X è pseudocompatto.

2) X è localmente compatto.

3) X è 0-dimensionale.

4) $C^\#(X)$ separa punti e chiusi.

DIM. 1) $\Rightarrow$ 4). Ovvio, poichè $C^\#(X) = C(X) = C^*(X)$.

2) $\Rightarrow$ 4). Segue dal fatto che $C_K(X) \subset C^\#(X)$ e che $C_K(X)$ separa punti e chiusi.

3) $\Rightarrow$ 4). Segue dal fatto che $A_0 \subset C^\#(X)$ e che A_0 separa punti e chiusi.

Detta $X^\#$ la compattificazione associata a $C^\#(X)$, diamone una descrizione in alcuni dei casi citati nella Prop. 2.

PROP. 3. *a*) X pseudocompatto $\Rightarrow$ $X^\# = \beta X$.

b) X fortemente 0-dimensionale $\Rightarrow$ $X^\# = \beta X$.

c) X 0-dimensionale e realcompatto $\Rightarrow$ $X^\# = \zeta X$.

d) Se X è localmente compatto e realcompatto, $X^\#$ si ottiene identificando i punti delle componenti connesse di $\beta X \setminus X$.

DIM. *a*) Ovvia.

b) Segue subito dal fatto che $\mathrm{cl}\, A_0 = C^*(X)$ se e solo se X è fortemente 0-dimensionale ([G.J.], 16.A.2.).

c) Se $f \in C^\#(X)$, f^β è costante sulle componenti connesse di $\beta X \setminus X$ (segue dall'ipotesi e dalla *e*) del Teor. a § 1); pertanto esiste $h \in C(\zeta X)$ tale che $f^\beta = h \circ \pi$, ove π è la proiezione canonica di βX su ζX. Poichè π lascia fissi i punti di X, h è un'estensione di f a ζX. Ricordiamo che ζX

è individuata da cl A_0; segue che $C^\#(X) \subset \mathrm{cl}\, A_0$ ed essendo $A_0 \subset C^\#(X)$, cl $C^\#(X) = \mathrm{cl}\, A_0$.

d) Si può dimostrare facilmente che lo spazio compatto ottenuto identificando i punti delle componenti connesse di $\beta X \setminus X$ è uno spazio T_2 e quindi una compattificazione T di X. Con un ragionamento analogo a quello usato nella dimostrazione di *c*) si fa vedere che ogni $f \in C^\#(X)$ si estende in modo continuo a T; chiamiamo $C^\#_T$ l'algebra delle funzioni di $C^\#(X)$ così estese. È evidente che $C^\#_T$ contiene le costanti; mostriamo che separa i punti di T. L'unico caso non banale si verifica quando $x, y \in T \setminus X$. Se x, y provengono da C_x, C_y componenti connesse distinte di $\beta X \setminus X$, un noto argomento di compattezza mostra che $\beta X \setminus X$ si spezza in due chiusaperti disgiunti C_1 e C_2, contenenti rispettivamente C_x e C_y. Essendo C_1, C_2 chiusi disgiunti nello spazio normale βX, esistono due aperti $A_1 \supset C_1$, $A_2 \supset C_2$ tali che $\mathrm{cl}_{\beta X} A_1 \cap \cap\, \mathrm{cl}_{\beta X} A_2 = \emptyset$. Esiste dunque $g \in C(\beta X)$ tale che $g[\mathrm{cl}\, A_1] = \{0\}$ e $g[\mathrm{cl}\, A_2] = \{1\}$; ovviamente g risulta localmente costante su $\beta X \setminus vX$, quindi (vedi *e*) del Teor.) $g/X \in C^\#(X)$ e la sua estensione a T separa x e y.

Il Teor. di Stone-Weierstrass assicura che cl $C^\#_T = C(T)$ e quindi cl $C^\#(X)$ è precisamente l'algebra delle funzioni f di $C^\#(X)$ che si estendono a T, da cui $X^\# = T$.

BIBLIOGRAFIA

[B.] B. Banaschewski, *Über nulldimensionale Räume*, Math. Nachr., **13** (1955), pp. 129-140.

[G.J.] L. Gillman - M. Jerison, *Rings of continuous functions*, Van Nostrand, New York (1960).

[N.R.] L. D. Nel - D. Riordan, *Note on a subalgebra of* $C(X)$, Canad. Math. Bull., **5** (4) (1972), pp. 607-608.

[S.Z.] O. Stefani - A. Zanardo, *Un'osservazione su una sottoalgebra di* $C(X)$, in corso di stampa su Rend. Sem. Univ. Padova, **53** (1975).

[W.] R. C. Walker, *The Stone-Čech compactification*, Springer-Verlag, New York (1974).

Manoscritto pervenuto in redazione il 24 luglio 1975.