Rendiconti
del
Seminario Matematico
della
Università di Padova

Werner Schmitz

Über längste Wege und Kreise in Graphen

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 53 (1975), p. 97-103

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1975__53__97_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 53 (1975)

Über längste Wege und Kreise in Graphen.

WERNER SCHMITZ (*)

Eine von T. Gallai auf dem graphentheoretischen Kolloquium in Tihany [1] gestellte Frage nach der Existenz eines Knotenpunktes, durch den alle längsten Wege eines Graphen gehen, wurde, nach der Vorlage eines Gegenbeispiels von H. Walther [4], von T. Zamfirescu auf die folgende Weise erweitert: Seien j, k natürliche Zahlen und $P_k^j = \infty$ ($C_k^j = \infty$), wenn es keinen k-zusammenhängenden Graphen G gibt in dem es zu jedem j-Tupel von Knotenpunkten einen längsten Weg (Kreis) gibt, der diese j Knotenpunkte vermeidet. Gibt es dagegen solche Graphen, so bezeichne P_k^j (C_k^j) die Minimalzahl von Knotenpunkten, die ein Graph mit dieser Eigenschaft hat. Analog werden $\overline{P}_k^j$ ($\overline{C}_k^j$) für planare Graphen definiert.

Die Aufgabe lautet nun, alle P_k^j, $\overline{P}_k^j$, C_k^j und $\overline{C}_k^j$ zu bestimmen, bzw. obere Schranken anzugeben. Zu den von T. Zamfirescu [7] zusammengefaßten Ergebnissen sollen in dieser Arbeit drei weitere hinzugefügt werden. Die Ungleichungen $\overline{P}_1^1 \leqslant 19$, $P_1^2 \leqslant 270$ und $\overline{C}_2^2 \leqslant 1550$, die von T. Zamfirescu [7] angegeben wurden, werden auf $\overline{P}_1^1 \leqslant 17$, $P_1^2 \leqslant 108$ und $\overline{C}_2^2 \leqslant 170$ verbessert. Es sei dazu noch bemerkt, daß B. Grünbaum [2] als erster mit $P_3^2 \leqslant 324$ auch die Endlichkeit von P_1^2 zeigte, und daß die Ungleichung $P_1^2 \leqslant 270$ von Zamfirescu entsprechend aus $P_3^2 \leqslant 270$ folgt.

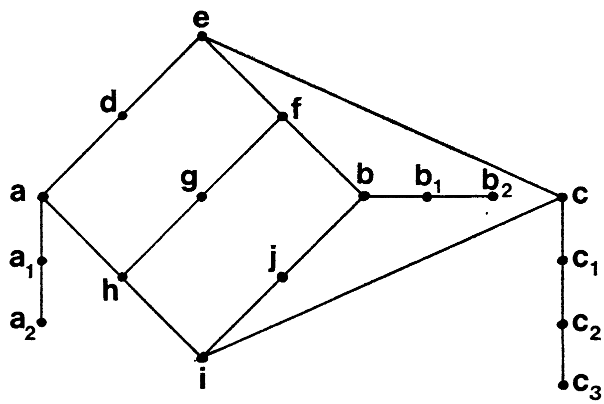
SATZ 1. $\overline{P}_1^1 \leqslant 17$.

BEWEIS. Der in Fig. 1 dargestellte Graph S zeigt die verlangten Eigenschaften; denn S ist offensichtlich planar, zusammenhängend und

---

(*) Indirizzo dell'A.: 4152 Kempen, Robert-Koch-Strasse 58, Repubblica Federale Tedesca.

besitzt 17 Knotenpunkte. Es bleibt noch zu zeigen, daß jeder Knotenpunkt von einem längsten Weg ausgelassen wird. Wir sehen, daß der Weg c_3, c_2, c_1,c, e, d, a, h, g, f, b, j, i 13 Knotenpunkte erfaßt. Ein



Figur 1

Weg, der in einem der Knotenpunkte $a, b, c, \ldots, j$ beginnt und in einem beliebigen Knotenpunkt von S endet, läßt mindestens 4 der Knotenpunkte a_i, b_i, c_j $(i = 1, 2)$ $(j = 1, 2, 3)$ aus. Ein Weg, der in a_2 beginnt und in b_2 endet, enthält c_1, c_2 und c_3 nicht. Angenommen, ein solcher Weg erfasse alle übrigen Knotenpunkte, dann enthielte er also d, g und j und damit auch die Teilwege (a, b, e), (h, g, f) und (b, j, i). Enthielte dieser Weg auch c, so auch die Kanten (e, c) und (c, i). Das ergibt aber einen Widerspruch, da dann h, g und f ausgelassen werden. Ein solcher Weg läßt also mindestens 4 Knotenpunkte von S aus.

Ein Weg, der in c_3 beginnt und in a_2 bzw. b_2 endet, läßt mindestens zwei der Knotenpunkte a_i, b_i $(i = 1, 2)$ aus. Der Weg ende o.B.d.A. in a_2. Enthält er mindestens 2 der 3 Knotenpunkte d, g und j, so auch mindestens 2 der Teilwege (a, d, e), (h, g, f) und (i, j, b). Außerdem enthält er eine der beiden Kanten (c, e) und (c, i). Enthält er aber (c, e), so vermeidet er g, j (bzw. d, j; bzw. d, g), wenn er d (bzw. g; bzw. j) enthält. Der Fall, daß der Weg die Kante (c, i) enthält, ist zu dem vorherigen symmetrisch.

Damit ist nun gezeigt, daß ein längster Weg in S 13 Knotenpunkte erfaßt. Setzt man A für den Teilweg a, a_1, a_2 (bzw. B für b, b_1, b_2)

(bzw. C für c, c_1, c_2, c_3), so ergibt sich:

$A, d, c, f, g, h, i, j, B$ läßt C aus,

C, e, f, g, h, i, j, B läßt A und d aus,

C, e, d, a, h, i, j, B läßt g und f aus,

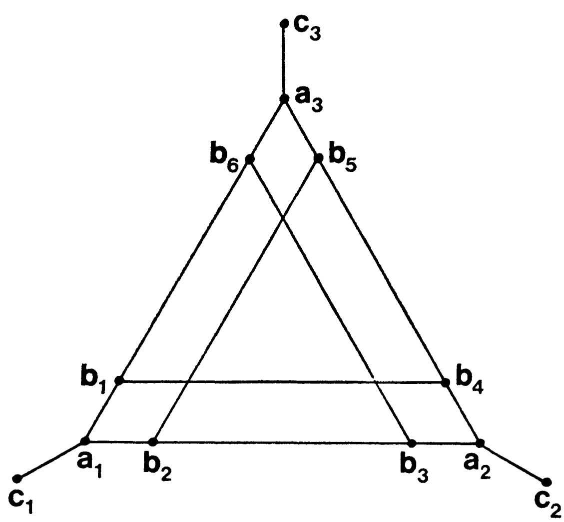
C, e, d, a, h, g, f, B läßt i und j aus.

Die anderen Knotenpunkte von S werden von Wegen, die zu den oben genannten symmetrisch sind, ausgelassen.

Damit ist Satz 1 bewiesen.

SATZ 2. $P_1^2 \leqslant 108$.

BEWEIS. Wir benutzen zum Beweis dieses Satzes den aus dem Petersenschen Graphen P abgeleiteten Graphen G in Fig. 2. Nach



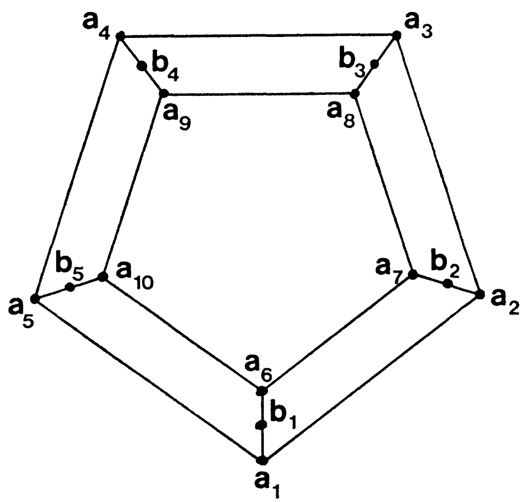
Figur 2

Theorem 8 von T. Zamfirescu [7] wissen wir, daß ein längster Weg in G 10 Knotenpunkte erfaßt, und jeder Knotenpunkt in G von einem längsten Weg ausgelassen wird.

H. Walther [5] hat gezeigt, daß jedes Paar von Kanten von einem längsten Kreis in P ausgelassen wird. Daraus folgt für G, daß jedes Paar von Kanten von einem längsten Weg in G vermieden wird. Entfernt man nun aus G die drei Knotenpunkte c_1, c_2 und c_3 ohne die mit ihnen inzidierenden Kanten, so erhält man das Gebilde G'. Ferner sei mit L ein beliebiger hamiltonscher Graph, der genau 9 Knotenpunkte besitzt, bezeichnet. Man ersetze in G nun jeden der Knotenpunkte a_i, b_j $(i = 1, 2, 3)$ $(j = 1, \ldots, 6)$ durch eine Kopie des Gebildes G', und c_1, c_2, c_3 jeweils durch eine Kopie des Graphen L, so daß jede L-Kopie durch genau eine Kante mit dem Rest des Graphen verbunden ist. Auf diese Weise erhält man einen zusammenhängenden Graphen mit 108 Knotenpunkten, den wir mit H bezeichnen wollen. Aus dem zuvor Gesagten ergibt sich nun, daß in H ein längster Weg, der in einer der L-Kopien beginnt und in einer anderen L-Kopie endet, eine G'-Kopie ganz vermeidet und aus den übrigen 8 G'-Kopien je genau einen Knotenpunkt. Außerdem wird die dritte L-Kopie ganz ausgelassen. Insgesamt enthält ein solcher Weg also genau 82 Knotenpunkte. Ein längster Weg, der in einer Kopie von L beginnt und in einer der 9 G'-Kopien endet, vermeidet keine der anderen 8 G'-Kopien, läßt aber in genau 8 G'-Kopien jeweils einen Knotenpunkt aus und vermeidet 2 Kopien von L. Ein solcher Weg hat also ebenfalls 82 Knotenpunkte. Ein Weg in G, der nicht in einer der L-Kopien beginnt bzw. endet, hat in jedem Fall, da er alle 3 L-Kopien vermeidet, weniger als 82 Knotenpunkte. Ein längster Weg in H hat also genau 82 Knotenpunkte. und jedes Paar von Knotenpunkten in H wird von einem längsten Weg ausgelassen. Liegen die beiden Knotenpunkte nämlich in einer Kopie von L bzw. von G', so kann man diese auf einem längsten Weg durch H ganz vermeiden. Liegen die beiden Knotenpunkte dagegen in 2 verschiedenen Kopien von L und G', so kann man nach dem oben Gesagten 2 Kanten in H auswählen, die von einem längsten Weg ausgelassen werden. Man kann die Kanten aber so auswählen, daß auch die entsprechenden Knotenpunkte in der L bzw. G'-Kopie von längsten Weg ausgelassen wird.

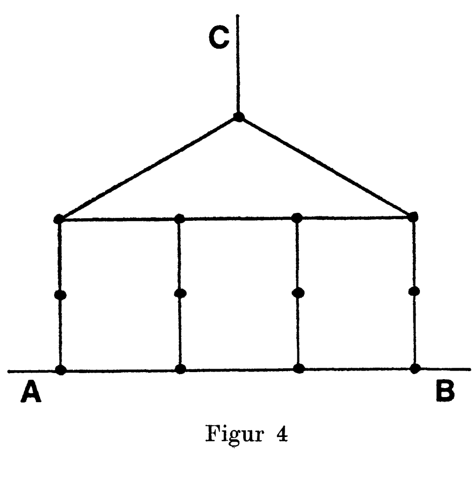
Satz 3. $\bar{C}_2^2 \leqslant 170$.

Beweis. Betrachte den Graphen T (Fig. 3) von C. Thomassen [3]. Ersetze in T zunächst jeden Teilweg a_i, b_i, a_{i+5} durch a_i, b_i^1, $b_i^2, \ldots,$ b_i^6, a_{i+5} $(i = 1, \ldots, 5)$, wobei an Stelle des 2-valenten Knotenpunktes b_i sechs 2-valente Knotenpunkte treten. Sodann ersetze man jeden Knotenpunkt a_j $(j = 1, \ldots, 10)$ durch eine Kopie von T_1 (Fig. 4). Da T_1 nicht symmetrisch ist, kann die Konstruktion nicht eindeutig sein. Die hier verwendeten Aussagen treffen aber auf alle diese Graphen zu. Sei also U ein so konstruierter, 2-zusammenhängender und planarer Graph.



Figur 3

Der Graph T_1 ist der an einem Knotenpunkt a_j $(j = 1, \ldots, 10$-geöffnete Graph T. Von diesem Graphen T_1 ist bereits gezeigt (Zam) firescu [7]), daß ein längster Weg, der 2 der 3 freien Endkanten A,



Figur 4

B, C von T_1 verbindet genau 2 Knotenpunkte ausläßt und daß es zu jedem der 14 Knotenpunkte von T_1 einen solchen längsten Weg gibt, der diesen Knotenpunkt ausläßt. Der Graph U besitzt 170 Knotenpunkte, und ein längster Kreis in U erfaßt 132 Knotenpunkte. Seien die Bezeichnungen der Knotenpunkte von T in Fig. 3 auch die Bezeichnungen für die entsprechenden Kopien von T_1 bzw. ein jeweiliges 6-Tupel von 2-valenten Knotenpunkten in U. Ein Kreis in U, der 132 Knotenpunkte vesitzt ist $K_1 = a_1, b_1, a_6, a_{10}, a_9, a_8, a_7, b_2, a_2, a_3, a_4, a_5, a_1$, wobei die T_1-Kopien jeweils so durchlaufen werden, daß genau 12 der 14 Knotenpunkte erfaßt werden, was nach dem oben Gesagten möglich ist. Andererseits kann kein Kreis in U mehr als 2 6-Tupel von 2-valenten Knotenpunkten erfassen, ohne dabei eine Kopie von T_1 auszulassen, ebenso wie kein Kreis alle 2-valenten Knotenpunkte erfassen kann. Ein längster Kreis in U, der 4 der 6-Tupel durchläuft und daher eine Kopie von T_1 nicht erreicht, hat aber wie z.B. der Kreis $K_2 = a_1, b_1, a_6, a_{10}, a_9, b_4, a_4, a_3, b_3, a_8, a_7, b_2, a_2, a_1$ auch genau 132 Knotenpunkte.

Fügt man zu den beiden oben genannten längsten Kreisen K_1 und K_2 noch den längsten Kreis $K_3 = a_1, b_1, a_6, a_7, b_2, a_2, a_3, b_3, a_8, a_9, b_4, a_4, a_5, a_1$ und alle zu K_1, K_2, und K_3 drehsymmetrischen Kreise hinzu, betrachtet man dazu den Graphen T in Fig. 3 und ersetzt in ihm jeweils ein Kantenpaar (a_i, b_i), $b_i, a_{i+5})$ durch eine Kante (a_i, a_{i+5}) $(i = 1, \ldots, 5)$, so ergibt sich für den resultierenden Graphen sofort, daß jedes in ihm vorgegebene Paar von Kanten von einem längsten Kreis K_1, K_2, K_3 oder einem dazu drehsymmetrischen ausgelassen werden kann. Daraus folgt in analoger Weise zum Beweis des Satzes 2, daß jedes Paar von Knotenpunkten von einem längsten Kreis ausgelassen wird.

Bemerkungen. B. Grünbaum [2] definierte die Familien von Graphen $\Pi(j, m)$ bzw. $\Gamma(j, m)$, die diejenigen Graphen umfassen, die m Knotenpunkte mehr als einer ihrer längsten Wege bzw. Kreise enthalten, und zu je j Knotenpunkten einen längsten Weg bzw. Kreis besitzen, der diese ausläßt. Ausgehend hiervon führte T. Zamfirescu [7] die Zahlen $\mathfrak{P}_k^j$, $\mathfrak{C}_k^j$, $\overline{\mathfrak{P}}_k^j$, $\overline{\mathfrak{C}}_k^j$, ein, die das kleinste m für k-zusammenhängende Graphen bzw. planare Graphen der Familie $\Pi(j, m)$ bzw. $\Gamma(j, m)$, darstellen. In den Fällen, in denen ein solches kleinstes m nicht existiert sei $\mathfrak{P}_k^j = \infty$ bzw. $\mathfrak{C}_k^j = \infty$. Der Graph U im Beweis von Satz 3 gehört zur Familie $\Gamma(2,38)$ und zeigt $\overline{\mathfrak{C}}_2^2 \leqslant 38$, was gleichzeitig die Ungleichung $\overline{\mathfrak{C}}_2^2 \leqslant 219$ von T. Zamfirescu [7] verbessert. Der Graph H aus Satz 2 gehört zur Familie $\Pi(2,26)$ und verbessert das Ergebnis $\mathfrak{P}_1^2 \leqslant 29$ von Zamfirescu [7] auf $\mathfrak{P}_1^2 \leqslant 26$.

Von Interesse bleibt weiterhin das Problem, die Mengen $\mathfrak{P}_k^j$ ($\mathfrak{C}_k^j$) zu untersuchen, insbesondere zu bestimmen, welche von diesen Mengen konvex sind. (Definition dazu s. T. Zamfirescu [7]).

LITERATUR

[1] P. Erdös - *F.* Katona (Herausgeber), *Theory of Graphs*, Proc. Colloq. Tihany, 1966, Academic Press, New York (1968).

[2] B. Grünbaum, *Verteces missed by longest paths or circuits*, erscheint im J. Comb. Theory.

[3] C. Thomassen, *Hypohamiltonian and hypotraceable graphs*, Aarhus Univ. Mat. Inst. Preprint, Series 1972-73, No. 61.

[4] H. Walther, *ffiber die Nichtexistenz eines Knotenpunktes, durch den alle längsten Wege eines Graphen gehen*, J. Comb. Theory, **6** (1969), pp. 1-6.

[5] H. Walther, *Über die Nichtexistenz zweier Knotenpunkte eines Graphen, die alle längsten Kreise fassen*, J. Comb. Theory, **8** (1970), pp. 330-333.

[6] T. Zamfirescu, *A two-connected planar graph without concurrent longest paths*, J. Comb. Theory, **13** (1972), pp. 116-121.

[7] T. Zamfirescu, *On longest paths and circuits in graphs*, erscheint demnächst.

Manoscritto pervenuto in redazione il 30 aprile 1974.