RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

ANGELO FAVINI

Su un'equazione astratta di tipo ellittico-iperbolico

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 55 (1976), p. 227-242

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1976__55__227_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 55 (1976)

Su un'equazione astratta di tipo ellittico-iperbolico.

ANGELO FAVINI (Bologna) (*)

SUMMARY - In this paper I consider the abstract equation in a Banach space X

$$u''(z) = z^m U u(z) , \qquad z \in R .$$

First, I prove the existence of a strict solution for the hyperbolic Cauchy problem

$$\begin{cases} u''(z) = z^m A^2 u(z) , & z \geqslant 0 , \\ u(0) = u_0 , \\ u'(0) = u_1 , \end{cases}$$

where A is a suitable linear closed operator in X and u_0, u_1 belong to $D(A^2)$. This result applies to the problem

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u(z, x)}{\partial z^2} = z^m \dfrac{\partial^2 u(z, x)}{\partial x^2} , & z \geqslant 0, \ x \in R , \\ u(0, x) = u_0(x) , \quad \dfrac{\partial u(0, x)}{\partial z} = u_1(x) , & x \in R , \end{cases}$$

and extends [3].

Then, I study the Cauchy problem for the elliptic equation

$$u''(z) = z^m B u(z) , \qquad z \in [0, T] , \qquad 0 < T < +\infty ,$$

B being a linear closed operator, and I prove that, under suitable hypotheses on the initial data u_0, u_1, the Cauchy problem for this equation has a strict solution.

Further, if m is a positive odd integer and $U = A^2$, $-U = B$, with cor-

---

(*) Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico « S. Pincherle, Piazza di Porta S. Donato 5, Bologna.

Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.A.F.A. del C.N.R.

responding domains, then the problem

$$\begin{cases} u''(z) = z^m U u(z)\,, & z \in [-T, T]\,, \\ u(0) = u_0\,, \\ u'(0) = u_1\,, \end{cases}$$

has, for certain u_0, u_1, a strict solution.

DEFINIZIONE 1. *Sia X uno spazio di Banach reale o complesso e sia A un operatore lineare chiuso in X, a dominio D_A; sia, infine, m un reale positivo. Diciamo che $w = w(z)$, $z \geqslant 0$, è una soluzione stretta del problema*

$$(1) \qquad \begin{cases} w''(z) = z^m A^2 w(z)\,, & z \geqslant 0\,, \\ w(0) = x_0\,, & x_0 \in X\,, \\ w'(0) = x_1\,, & x_1 \in X\,, \end{cases}$$

se $w(z)$ è dotata di derivate prima e seconda continue su $z \geqslant 0$, $w(z) \in D_{A^2}$, $z \geqslant 0$, e vale la (1).

Per dimostrare il successivo Teorema di esistenza, faremo l'ipotesi fondamentale che A sia il generatore infinitesimale di un gruppo fortemente continuo (di classe C_0) di operatori lineari nello spazio di Banach X.

Siano y_0, y_1 elementi di X. La considerazione della funzione Z_ν e delle sue proprietà ci suggerisce di cercare una soluzione del problema (1) nella forma di combinazione lineare delle due funzioni

$$u(z) = z \int_{-1}^{1} \left[\exp\left(-2\,\frac{z^{m/2+1}}{m+2}\,At\right)\right] (1-t^2)^{-m/(2(m+2))}\, y_1\, dt\,,$$

$$v(z) = \int_{-1}^{1} \left[\exp\left(-2\,\frac{z^{m/2+1}}{m+2}\,At\right)\right] (1-t^2)^{-(m+4)/(2(m+2))}\, y_0\, dt\,.$$

Poichè A genera un gruppo fortemente continuo, riesce

$$\|\exp(-\tau A)\| \leqslant M \exp(\omega|\tau|)$$

e l'integrabilità delle funzioni sotto il segno di integrale dipende solo dai coefficienti

$$(1-t^2)^{-m/(2(m+2))} \quad \text{e} \quad (1-t^2)^{-(m+4)/(2(m+2))} \qquad \text{su }]-1,1[\,.$$

Ora, $t \to (1-t^2)^{-m/(2(m+2))}$ è integrabile su $]-1,1[$ se e solo se $m \in]-\infty,-4[\, \cup\,]-2,+\infty[$ e $t \to (1-t^2)^{-(m+4)/(2(m+2))}$ è integrabile su $]-1,1[$ se e solo se $m \in]-\infty,-2[\, \cup\,]0,+\infty[$.

Di qui, le funzioni $u(z)$ e $v(z)$ riescono ben definite e continue su $]0,+\infty[$ per tutti gli $m \in]-\infty,-4[\, \cup\,]0,+\infty[$.

Supponiamo $m > 0$. Una ipotesi che si presenta spontanea è di assumere che y_0, y_1 appartengano a D_{A^2}, onde sia lecito derivare sotto il segno di integrale.

Consideriamo $u(z)$. Procedendo formalmente, abbiamo

$$u'(z) = \int_{-1}^{1}\left[\exp\left(-2\,\frac{z^{m/2+1}}{m+2}\,At\right)\right](1-t^2)^{-m/(2(m+2))}\,y_1\,dt -$$

$$- z^{m/2+1}\int_{-1}^{1}\left[\exp\left(-2\,\frac{z^{m/2+1}}{m+2}\,At\right)\right]t(1-t^2)^{-m/(2(m+2))}\,Ay_1\,dt\,,$$

$$u''(z) = -z^{m/2}\int_{-1}^{1}\left[\exp\left(-2\,\frac{z^{m/2+1}}{m+2}\,At\right)\right]t(1-t^2)^{-m/(2(m+2))}\,Ay_1\,dt -$$

$$-\frac{m+2}{2}\,z^{m/2}\int_{-1}^{1}\left[\exp\left(-2\,\frac{z^{m/2+1}}{m+2}\,At\right)\right]t(1-t^2)^{-m/(2(m+2))}\,Ay_1\,dt +$$

$$+ z^{m+1}\int_{-1}\left[\exp\left(-2\,\frac{z^{m/2+1}}{m+2}\,At\right)\right]t^2(1-t^2)^{-m/(2(m+2))}\,A^2y_1\,dt =$$

$$= -\frac{m+4}{2}\,z^{m/2}\int_{-1}^{1}\left[\exp\left(-2\,\frac{z^{m/2+1}}{m+2}\,At\right)\right]t(1-t^2)^{-m/(2(2m+2))}\,Ay_1\,dt +$$

$$+ z^m z\int_{-1}^{1}\left[\exp\left(-2\,\frac{z^{m/2+1}}{m+2}\,At\right)\right]t^2(1-t^2)^{-m/(2(m+2))}\,A^2y_1\,dt =$$

$$= z^{m/2}\int_{-1}^{1}\left[\exp\left(-2\,\frac{z^{m/2+1}}{m+2}At\right)\right]\frac{d}{dt}\left(\frac{m+2}{2}(1-t^2)^{-m/(2(m+2))+1}\right)Ay_1\,dt+$$

$$+\, z^m z\int_{-1}^{1}\left[\exp\left(-2\,\frac{z^{m/2+1}}{m+2}At\right)\right]t^2(1-t^2)^{-m/(2(m+2))}A^2y_1\,dt\,.$$

Una integrazione per parti nel primo addendo a destra porta a

$$u''(z) = -\,z^{m/2}\int_{-1}^{1}\left[\frac{\partial}{\partial t}\exp\left(-2\,\frac{z^{m/2+1}}{m+2}At\right)\right]Ay_1\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{m}{2}+1\right)(1-t^2)^{-m/(2(m+2))+1}\,dt + z^m\cdot z\int_{-1}^{1}\left[\exp\left(-2\,\frac{z^{m/2+1}}{m+2}At\right)\right]\cdot$$

$$\cdot(t^2-1+1)(1-t^2)^{-m/(2(m+2))}A^2y_1\,dt\,.$$

Così

$$u''(z) = z^m\cdot z\int_{-1}^{1}\left[\exp\left(-2\,\frac{z^{m/2+1}}{m+2}At\right)\right]A^2y_1(1-t^2)^{-m/(2(m+2))+1}\,dt+$$

$$+\, z^m z\int_{-1}^{1}\left[\exp\left(-2\,\frac{z^{m/2+1}}{m+2}At\right)\right](1-t^2)^{-m/(2(m+2))+1}A^2y_1\,dt-$$

$$-\, z^m z\int_{-1}^{1}\left[\exp\left(-2\,\frac{z^{m/2+1}}{m+2}At\right)\right](1-t^2)(1-t^2)^{-m/(2(m+2))}A^2y_1\,dt = z^mA^2u(z)\,,$$

perchè $[\exp(\tau A)]A^2y_1 = A^2[\exp(\tau A)]y_1$, se $y_1\in D_{A^2}$.

Come si vede facilmente, la assunzione che y_1 appartenga a D_{A^2} assicura la validità dei passaggi e, perciò, $u(z)$ soddisfa l'equazione, riuscendo continua, dotata di derivate prima e seconda continue su $[0, +\infty[$, per le proprietà del gruppo generato da A, (cfr. [5]).

È poi chiaro che abbiamo $u(0) = 0$, mentre

$$u'(0) = \left(\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{-m/(2(m+2))}\,dt\right)y_1 = C_1y_1\,.$$

Analizziamo $v(z)$. Riesce

$$v'(z) = -\int_{-1}^{1} \left[\exp\left(-2\,\frac{z^{m/2+1}}{m+2}\,At\right)\right](1-t^2)^{-(m+4)/(2(m+2))}\,tz^{m/2}Ay_0\,dt\,.$$

Se $m/2 \geqslant 1$, chiaramente $v'(z)$ riesce derivabile anche nell'origine. Ciò non sembra, a priori, assicurato se $m/2 < 1$.
Consideriamo allora (si noti che $v'(0) = 0$) il rapporto incrementale

$$\frac{v'(z)}{z} = -\,z^{m/2-1}\int_{-1}^{1} \left[\exp\left(-2\,\frac{z^{m/2+1}}{m+2}\,At\right)\right] t(1-t^2)^{-(m+4)/(2(m+2))}\,Ay_0\,dt =$$

$$= z^{m/2-1}\int_{-1}^{1} \left[\exp\left(-2\,\frac{z^{m/2+1}}{m+2}\,At\right)\right]\frac{d}{dt}\left(\frac{m+2}{m}\,(1-t^2)^{-(m+4)/(2(m+2))+1}\right)Ay_0\,dt =$$

$$= -\,z^{m/2-1}\int_{-1}^{1} \left[\exp\left(-2\,\frac{z^{m/2+1}}{m+2}\,At\right)\right]\left(-2\,\frac{z^{m/2+1}}{m+2}\right)\frac{m+2}{m}\cdot$$

$$\cdot(1-t^2)^{m/(2(m+2))}A^2y_0\,dt = \frac{2}{m}\,z^m\int_{-1}^{1} \left[\exp\left(-2\,\frac{z^{m/2+1}}{m+2}\,At\right)\right]\cdot$$

$$\cdot(1-t^2)^{m/(2(m+2))}A^2y_0\,dt \xrightarrow[z\to 0+]{} 0\,.$$

Di qui, esiste $v''(0) = 0$. D'altra parte,

$$v(0) = \left(\int_{-1}^{1} (1-t^2)^{-(m+4)/(2(m+2))}\,dt\right) y_0 = C_0 y_0$$

e risulta quindi $v''(z) = z^m A^2 v(z)$ per $z = 0$.
Sia $z > 0$. Allora

$$v''(z) = -\,\frac{m}{2}\,z^{m/2-1}\int_{-1}^{1} \left[\exp\left(-2\,\frac{z^{m/2+1}}{m+2}\,At\right)\right](1-t^2)^{-(m+4)/(2(m+2))}\,tAy_0\,dt\,+$$

$$+\,z^m A^2\int_{-1}^{1} \left[\exp\left(-2\,\frac{z^{m/2+1}}{m+2}\,At\right)\right] t^2(1-t^2)^{-(m+4)/(2(m+2))}\,y_0\,dt =$$

$$= z^m A^2 \int_{-1}^{1} \left[\exp\left(-2\frac{z^{m/2+1}}{m+2}At\right)\right](t^2 - 1 + 1)(1-t^2)^{-(m+4)/(2(m+2))} y_0\, dt -$$

$$-\frac{m}{2} z^{m/2-1} \int_{-1}^{1} \left[\exp\left(-2\frac{z^{m/2+1}}{m+2}At\right)\right] t(1-t^2)^{-(m+4)/(2(m+2))} Ay_0\, dt =$$

$$= z^m A^2 v(z) - z^m A^2 \int_{-1}^{1} \left[\exp\left(-2\frac{z^{m/2+1}}{m+2}At\right)\right](1-t^2)^{-(m+4)/(2(m+2))+1} y_0\, dt +$$

$$+ z^m A^2 \int_{-1}^{1} \left[\exp\left(-2\frac{z^{m/2+1}}{m+2}At\right)\right](1-t^2)^{-(m+4)/(2(m+2))+1} y_0\, dt =$$

$$= (\text{cfr. l'espressione di } v'(z)/z \text{ sopra ottenuta}) = z^m A^2 v(z)\,.$$

Ne segue che se $x_0, x_1 \in D_{A^2}$, allora la funzione $w(z)$ definita da

$$w(z) = C_0^{-1} \int_{-1}^{1} \left[\exp\left(-2\frac{z^{m/2+1}}{m+2}At\right)\right](1-t^2)^{-(m+4)/(2(m+2))} x_0\, dt +$$

$$+ C_1^{-1} z \int_{-1}^{1} \left[\exp\left(-2\frac{z^{m/2+1}}{m+2}At\right)\right](1-t^2)^{-m/(2(m+2))} x_1\, dt$$

è soluzione stretta del problema (1). In particolare, otteniamo una estensione, relativa a $m = 1$, del lavoro [3], avendo eliminato l'ipotesi superflua $x_0 \in D_{A^3}$.

Stabiliamo così il primo risultato:

TEOREMA 1. *Se A è il generatore infinitesimale di un gruppo di operatori lineari di classe C_0 nello spazio di Banach X e $x_0, x_1 \in D_{A^2}$, allora il problema* (1) *ha una soluzione stretta.*

Prima di considerare l'equazione « ellittica »

$$w''(z) = z^m Bw(z)\,, \quad z \in [0, T]\,, \quad m > 0\,,$$

ci sembra opportuno richiamare alcuni risultati sulle potenze di un operatore lineare chiuso.

Sia B un operatore lineare chiuso a dominio denso in X, tale che esiste l'inverso $(s+B)^{-1} \in L(X, X)$, per ogni $s > 0$ e vale

$$\|(s+B)^{-1}\| \leqslant M/s\,, \qquad s > 0\,. \tag{2}$$

Si sa che allora esiste $(\lambda + B)^{-1}$ per ogni $\lambda \in \boldsymbol{C}$ soddisfacente $|\arg \lambda| < \pi - \omega$, $0 < \omega < \pi$, e che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una costante $M_\varepsilon > 0$ (indipendente da λ), per cui

$$\|(\lambda + B)^{-1}\| \leqslant M_\varepsilon/|\lambda|\,, \qquad |\arg \lambda| < \pi - \omega - \varepsilon\,. \tag{3}$$

Si dice che B è di tipo (ω, M). Ebbene, per un operatore siffatto, si definisce la potenza B^α, $0 < \alpha < 1$, che risulta essere un operatore lineare chiuso di tipo $(\alpha\omega, M)$.

Dalla (3) segue che se $\alpha\omega < \pi/2$, allora $-B^\alpha$ è il generatore infinitesimale del semigruppo olomorfo $\exp(-tB^\alpha)$, $t \geqslant 0$.

A noi interessa il caso $\alpha = \frac{1}{2}$, per cui, se B è di tipo (ω, M), $-B^{\frac{1}{2}}$ genera un semigruppo olomorfo.

Valgono inoltre i seguenti risultati:

i) Se $0 < \alpha, \beta, \alpha + \beta < 1$, allora

$B^\alpha B^\beta x = B^\beta B^\alpha x = B^{\alpha+\beta} x$, $x \in D_{B^{\alpha+\beta}}$, (cfr. [6], p. 127).

ii) $x \in D_B$, $0 < \alpha < 1 \Rightarrow B^\alpha x = \operatorname{sen} \pi\alpha/\pi \displaystyle\int_0^\infty s^{\alpha+1}(B+s)^{-1} Bx\, ds$,

(cfr. [6], p. 127).

iii) $x \in D_B \Rightarrow \lim\limits_{\alpha \nearrow 1} \|B^\alpha x - Bx\| = 0$, (cfr. [7], p. 267).

Dalle affermazioni richiamate i)-iii) possiamo dedurre che

$$\forall x \in D_B\,, \qquad Bx = B^{\frac{1}{2}} B^{\frac{1}{2}} x\,.$$

In effetti,

$$Bx = \lim_{\alpha \nearrow 1} B^\alpha x = \lim_{\alpha \nearrow 1} B^{\frac{1}{2}+\alpha-\frac{1}{2}} x = \lim_{\alpha \nearrow 1} B^{\alpha-\frac{1}{2}} B^{\frac{1}{2}} x = \\ = \lim_{\beta \nearrow \frac{1}{2}} B^\beta B^{\frac{1}{2}} x = \lim_{\beta \nearrow \frac{1}{2}} B^{\frac{1}{2}} B^\beta x\,,$$

il limite essendo da intendersi come limite nella norma di X.

D'altra parte, se ad esempio $\beta \in [\frac{1}{3}, \frac{1}{2}[$ e $y \in D_B$, poichè

$$B^{\frac{1}{2}}y - B^{\beta}y = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}(s^{-\frac{1}{2}} - s^{\beta-1})(s+B)^{-1}By\,ds + \\ + \frac{1-\operatorname{sen}\pi\beta}{\pi}\int_0^{\infty}s^{\beta-1}(s+B)^{-1}By\,ds\,,$$

allora, applicando il Teorema della convergenza dominata (suddividendo il dominio di integrazione in $]0, 1[$ e $[1, +\infty[$), otteniamo

$$\|B^{\frac{1}{2}}y - B^{\beta}y\| \xrightarrow[\beta \nearrow \frac{1}{2}]{} 0\,.$$

Per la chiusura dell'operatore $B^{\frac{1}{2}}$, l'affermazione segue.

Sia dunque B un operatore di tipo (ω, M) e sia $y_0 \in D_B$.

È facile riconoscere che se T_d è un fissato reale positivo, allora la funzione $u(\xi)$, $\xi \in [-T_d, T_d]$, definita da

$$u(\xi) = \tfrac{1}{2}[\exp[-(T_d - \xi)B^{\frac{1}{2}}] + \exp[-(T_d + \xi)B^{\frac{1}{2}}]]y_0\,,$$

è una soluzione stretta, nel senso corrispondente alla Definizione 1, del problema

$$\text{(4)} \qquad \begin{cases} u''(\xi) = Bu(\xi)\,, & \xi \in [-T_d, T_d]\,, \\ u(0) = [\exp(-T_d B^{\frac{1}{2}})]y_0\,, \\ u'(0) = 0\,. \end{cases}$$

Servendoci di queste osservazioni, risolveremo, per dati sufficientemente « regolari », il problema di Cauchy per l'equazione ellittica sopra scritta; (cfr., ad esempio, [2] e [4]).

TEOREMA 2. *Se B è un operatore di tipo (ω, M) e riesce $u_0 = [\exp(-T_0 B^{\frac{1}{2}})]y_0$, $u_1 = [\exp(-T_1 B^{\frac{1}{2}})]y_1$, dove $T_i > 2/(m+2)$, $(i = 0, 1)$, allora il problema*

$$\text{(5)} \qquad \begin{cases} v''(z) = z^m Bv(z)\,, & z \in [0, T],\ m > 0\,, \\ v(0) = u_0\,, \\ v'(0) = u_1\,, \end{cases}$$

ha una soluzione stretta (cfr. la Def. 1).

DIMOSTRAZIONE. Posto $\xi = z/T$, $v(z) = v(T\xi) = w(\xi)$, se $v(z)$ riesce soluzione di (5), allora da $v''(z) = T^{-2}w''(\xi)$ segue

$$\begin{cases} w''(\xi) = \xi^m (T^{m+2}B)\, w(\xi)\,, & \xi \in [0,1]\,, \\ w(0) \ = u_0\,, \\ w'(0) = Tu_1\,, \end{cases}$$

e l'operatore $T^{m+2}B = B_1$ è dello stesso tipo di B; in effetti,

$$(\lambda + B_1)^{-1} = T^{-(m+2)}(\lambda T^{-(m+2)} + B)^{-1}$$

esiste per ogni $\lambda > 0$ e

$$\|(\lambda + B_1)^{-1}\| = T^{-(m+2)}\|(\lambda T^{-(m+2)} + B)^{-1}\| \leqslant M/\lambda\,, \qquad \lambda > 0\,.$$

Si può pertanto supporre che risulti $T = 1$.

Sia $T_0 > 2/(m + 2)$ e sia $u = u(\xi)$ soluzione stretta del problema (4). Consideriamo

$$f(t, z) = -\frac{2}{m+2}\, tz^{m/2+1}, \qquad t \in [-1, 1],\ z \in [0, 1]\,.$$

È chiaro che

$$f([-1, 1] \times [0, 1]) = \left[-\frac{2}{m+2}, \frac{2}{m+2}\right].$$

Allora riesce

$$T_0 + \frac{2}{m+2}\, tz^{m/2+1} \geqslant T_0 - \frac{2}{m+2} > 0\,, \qquad t \in [-1, 1],\ z \in [0, 1]\,,$$

e quindi è lecito scrivere

$$u\left(-\frac{2}{m+2}\, tz^{m/2+1}\right) = \frac{1}{2}\left[\exp\left[-\left(T_0 + \frac{2}{m+2}\, tz^{m/2+1}\right)B^{\frac12}\right] + \right.$$
$$\left. + \exp\left[-\left(T_0 - \frac{2}{m+2}\, tz^{m/2+1}\right)B^{\frac12}\right]\right] y_0\,.$$

In analogia a quanto si è fatto per provare il Teorema 1, poniamo

$$\varphi(z)=\int_{-1}^{1} u\left(-\frac{2}{m+2}\, t z^{m/2+1}\right)(1-t^2)^{-(m+4)/(2(m+2))} dt\,, \qquad z\in[0,1]\,.$$

Risulta

$$\varphi'(z)=-z^{m/2}\int_{-1}^{1} u'\left(-\frac{2}{m+2}\, t z^{m/2+1}\right) t(1-t^2)^{-(m+4)/(2(m+2))}\, dt\,, \qquad z\in[0,1]\,,$$

e quindi, in particolare, $\varphi'(0)=0$. Si vede poi che $\varphi(z)$ ha derivata seconda anche nell'origine, con $\varphi''(0)=0$. Così, anche nello zero, $\varphi(z)$ soddisfa l'equazione differenziale di (5).

Poi, se $z\in\,]0,1]$, vale l'espressione

$$\begin{aligned}\varphi''(z)&=-\frac{m}{2}\, z^{m/2+1}\int_{-1}^{1} u'\left(-\frac{2}{m+2}\, t z^{m/2+1}\right) t(1-t^2)^{-(m+4)/(2(m+2))}\, dt\,+\\&\quad+z^{m}\int_{-1}^{1} u''\left(-\frac{2}{m+2}\, t z^{m/2+1}\right) t^2(1-t^2)^{-(m+4)/(2(m+2))}\, dt=\\&=z^{m}\int_{-1}^{1} u''\left(-\frac{2}{m+2}\, t z^{m/2+1}\right)(t^2-1+1)(1-t^2)^{-(m+4)/(2(m+2))}\, dt\,+\\&\quad+\frac{m+2}{2}\, z^{m/2-1}\int_{-1}^{1} u'\left(-\frac{2}{m+2}\, t z^{m/2+1}\right)\cdot\frac{\partial}{\partial t}(1-t^2)^{-(m+4)/(2(m+2))+1}\, dt\,.\end{aligned}$$

Integrando per parti, riconosciamo che l'ultimo termine coincide con

$$z^{m}\int_{-1}^{1} Bu\left(-\frac{2}{m+2}\, t z^{m/2+1}\right)(1-t^2)^{-(m+4)/(2(m+2))}\, dt=z^{m}B\varphi(z)\,, \qquad z\in\,]0,1]\,.$$

Poichè $u(0)=u_0$, $u'(0)=0$, abbiamo inoltre

$$\varphi(0)=\left(\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{-(m+4)/(2(m+2))}\, dt\right)u_0=C_0u_0\,, \qquad \varphi'(0)=0\,.$$

Sia ora

$$u_1(\xi) = \tfrac{1}{2}[\exp[-(T_1 - \xi)B^{\frac{1}{2}}] + \exp[-(T_1 + \xi)B^{\frac{1}{2}}]]y_1\,, \quad \xi \in [-T_1, T_1],$$

e poniamo

$$\psi(z) = z \int_{-1}^{1} u_1\left(-\frac{2}{m+2}\, t z^{m/2+1}\right)(1-t^2)^{-m/(2(m+2))}\, dt\,, \qquad z \in [0,1]\,.$$

$\psi(z)$ riesce ben definita per quanto già visto, continua, dotata anzi di derivate prima e seconda continue su $[0, 1]$; precisamente,

$$\psi'(z) = \int_{-1}^{1} u_1\left(-\frac{2}{m+2}\, t z^{m/2+1}\right)(1-t^2)^{-m/(2(m+2))}\, dt\, -$$
$$- z^{m/2+1}\int_{-1}^{1} u_1'\left(-\frac{2}{m+2}\, t z^{m/2+1}\right) t(1-t^2)^{-m/(2(m+2))}\, dt\,,$$

$$\psi''(z) = z^m\left(-z\int_{-1}^{1} u_1''\left(-\frac{2}{m+2}\, t z^{m/2+1}\right)(1-t^2)^{-m/(2(m+2))+1}\, dt\, +\right.$$
$$\left. + z\int_{-1}^{1} u_1''\left(-\frac{2}{m+2}\, t z^{m/2+1}\right)(1-t^2)^{-m/(2(m+2))}\, dt\right) -$$
$$-\left(\frac{m}{2}+2\right) z^{m/2}\int_{-1}^{1} u_1'\left(-\frac{2}{m+2}\, t z^{m/2+1}\right) t(1-t^2)^{-m/(2(m+2))}\, dt\,.$$

Una integrazione per parti nell'ultimo integrale porta a riconoscere che

$$\psi''(z) = z^m B\psi(z) - z^{m+1}\int_{-1}^{1} u_1''\left(-\frac{2}{m+2}\, t z^{m/2+1}\right)(1-t^2)^{-m/(2(m+2))+1}\, dt\, +$$
$$+ z^{m/2}\int_{-1}^{1} u_1''\left(-\frac{2}{m+2}\, t z^{m/2+1}\right)(1-t^2)^{-m/(2(m+2))+1} z^{m/2+1}\, dt = z^m B\psi(z)\,.$$

Infine, abbiamo

$$\psi(0) = 0\,, \qquad \psi'(0) = \Big(\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{-m/(2(m+2))}\,dt\Big)y_1 = C_1 y_1\,.$$

Segue che $v(z) = C_0^{-1}\varphi(z) + C_1^{-1}\psi(z)$, $z \in [0, 1]$, è soluzione stretta del problema (5) e ciò chiude la prova del Teorema.

Osservazione 1. Se C è un operatore massimale dissipativo in uno spazio di Hilbert, allora a $B = -C$ è applicabile il Teorema 2 (cfr. [6], p. 128).

Osservazione 2. Se m è un intero positivo pari, la soluzione $w(z)$ del problema (1) si prolunga in una soluzione su tutto l'asse reale.

Analogamente, la $v(z)$ soluzione del problema (5) su $[0, T]$ riesce soluzione di tale problema anche sull'intervallo $[-T, T]$.

Nel caso in cui m è dispari, invece, si presenta il problema del raccordo tra la parte iperbolica e la parte ellittica quando A^2 e $-B$ sono due diverse «realizzazioni» di un medesimo operatore; nei casi concreti, quest'ultimo è un operatore differenziale.

Definizione 2. *Sia m un numero naturale dispari e sia U un operatore lineare in X di dominio $D_U = D_1 \cup D_2$. Diciamo che $u = u(z)$ è una soluzione stretta del problema*

$$\text{(6)} \qquad \begin{cases} u''(z) = z^m U u(z)\,, & z \in [-T, T]\,, \\ u(0) = u_0\,, \\ u'(0) = u_1\,, \end{cases}$$

se u ha derivate prima e seconda continue su $[-T, T]$, $u(z) \in D_1$, $z \geqslant 0$, $u(z) \in D_2$, $z \leqslant 0$, e vale (6).

Supponiamo che riesca, da una parte, $U = A^2$, $D_{A^2} = \{u \in D_A, Au \in D_A\}$, A essendo il generatore infinitesimale di un gruppo di operatori lineari di classe C_0 (e allora, se $u_0, u_1 \in D_{A^2}$, il Teorema 1 consente di affermare la esistenza di una soluzione stretta $w(z)$ di (1) su $[0, T]$); inoltre, sia $-U = B$, con dominio D_B, in generale diverso da D_{A^2}, un operatore di tipo (ω, M).

Dal Teorema 2 segue allora che esiste una soluzione stretta di

$$\begin{cases} v''(t) = t^m(-U)\,v(t) = t^m Bv(t)\,, & t \in [0, T]\,, \\ v(0) = u_0\,, \quad v'(0) = -u_1\,, \end{cases}$$

purchè risulti $u_i \in \bigcup\limits_{k>2/(m+2)} \exp[-kB^{\frac{1}{2}}](D_B)$, $(i = 0, 1)$.

Allora $w_1(z) = v(-z)$, $z \in [-T, 0]$, risulve il problema di Cauchy ellittico

$$\begin{cases} w_1''(z) = -z^m Bw_1(z)\,, & z \in [-T, 0]\,, \\ w_1(0) = u_0\,, \quad w_1'(0) = u_1\,. \end{cases}$$

Notiamo che riesce $w''(0) = w_1''(0) = 0$. Posto

$$u(z) = \begin{cases} w(z)\,, & z \in [0, T]\,, \\ w_1(z)\,, & z \in [-T, 0]\,, \end{cases}$$

$u(z)$ è una funzione continua, con derivate prima e seconda continue su $[-T, T]$. Se poi poniamo $D_U = D_{A^2} \cup D_B$, possiamo affermare, in in virtù delle proprietà di $w(z)$ e di $w_1(z)$, che se

$$u_0 = \exp[-T_0 B^{\frac{1}{2}})v_0\,, \qquad u_1 = \exp(-T_1 B^{\frac{1}{2}})v_1\,,$$

$$v_0, v_1 \in D_B\,, \qquad T_0, T_1 > 2/(m+2) \quad \text{e} \quad u_0, u_1 \in D_{A^2}\,,$$

allora (6) ha la soluzione stretta $u(z)$.

Facciamo notare che nei casi concreti, il fatto che $v_i \in D_B$ comporta il soddisfacimento di certe condizioni ai limiti che, in genere, non sono implicate dalla appartenenza a D_{A^2}.

Applicazione. Sia m un numero reale positivo e sia X uno qualunque degli spazi $L^p(R)$, $1 \leqslant p < +\infty$.

Sia U l'operatore differenziale d^2/dx^2: $(Uf)(x) = f''(x)$.

Posto

$$D_A = \{f \in X;\ f \text{ localmente assolutamente continua su } R(f \in AC_{\text{loc}}(R)),\quad f' \in X\}\,, \qquad Af = f'\,,$$

segue che

$$D_{A^2} = \{f \in X;\, f, f' \in AC_{\mathrm{loc}}(R) \cap X,\, f'' \in X\}\ , \qquad A^2 f = f''\ .$$

Siano allora u_0, u_1 elementi di D_{A^2}, per cui possiamo dire, grosso modo, che esse sono funzioni (di x) in L^p, dotate di derivate prima e seconda in L^p anch'esse. Allora il problema iperbolico (1), essendo A generatore infinitesimale di un gruppo di classe C_0 in X, ha la soluzione stretta

$$u(z, x) = C_0 \int_{-1}^{1} (1 - t^2)^{-(m+4)/(2(m+2))} \left(\exp\left(-2\,\frac{z^{m/2+1}}{m+2}\,At\right) u_0\right)(x)\,dt + \\ + C_1 z \int_{-1}^{1} (1 - t^2)^{-m/(2(m+2))} \left(\exp\left(-2\,\frac{z^{m/2+1}}{m+2}\,At\right) u_1\right)(x)\,dt\ .$$

Ora, $[(\exp tA)f](x) = f(x + t)$ e quindi

$$\left[\exp\left(-2\,\frac{z^{m/2+1}}{m+2}\,At\right) u_i\right](x) = u_i\left(x - \frac{2}{m+2}\,z^{m/2+1}\,t\right), \qquad i = 0, 1\ .$$

Segue

$$u(z, x) = C_0 \int_{-1}^{1} (1 - t^2)^{-(m+4)/(2(m+2))}\, u_0\left(x - \frac{2}{m+2}\,z^{m/2+1}\,t\right) dt + \\ + C_1 z \int_{-1}^{1} (1 - t^2)^{-m/(2(m+2))}\, u_1\left(x - \frac{2}{m+2}\,z^{m/2+1}\,t\right) dt\ .$$

Posto $t = 2s - 1$, otteniamo

$$u(z, x) = C_0' \int_{-1}^{1} [s(1 - s)]^{-(m+4)/(2(m+2))}\, u_0\left(x + (1 - 2s)\,\frac{2}{m+2}\,z^{m/2+1}\right) ds + \\ + C_1' z \int_{0}^{1} [s(1 - s)]^{-m/(2(m+2))}\, u_1\left(x + (1 - 2s)\,\frac{2}{m+2}\,z^{m/2+1}\right) ds\ ,$$

(cfr. [1], p. 36).

Sia $D_B = H_0^{2,p}(R) = H^{2,p}(R)$, $(Bu)(x) = -u''(x)$, $u \in D_B$.

Allora $-B$ è il generatore infinitesimale di un semigruppo in $X = L^p(R)$ e, in più, anche $-B^{\frac{1}{2}}$ genera un semigruppo $\exp(-tB^{\frac{1}{2}})$; precisamente,

$$(\exp(-tB^{\frac{1}{2}})u)(x) = \frac{\pi}{t}\int_{-\infty}^{\infty}[t^2 + (x-y)^2]^{-1}u(y)\,dy\,.$$

Se $u_i = \exp[-T_iB^{\frac{1}{2}}]v_i$ $(i = 0, 1)$, dove $v_i \in H^{2,p}(R)$, e quindi $u_i(x)$ è il valore in (x, T_i) di una funzione armonica la cui traccia sull'asse reale è una funzione $v_i(x) \in H^{2,p}(R)$, possiamo asserire che il problema di Cauchy per l'equazione ellittica

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u(z,x)}{\partial z^2} = z^m \dfrac{\partial^2 u(z,x)}{\partial x^2}\,, & z \in [-T, 0],\ x \in R\,, \\ u(0,x) = u_0(x)\,, \quad \dfrac{\partial u(0,x)}{\partial z} = u_1(x)\,, & x \in R\,, \end{cases}$$

ha una soluzione stretta, m essendo un intero positivo dispari.

Si noti che dalle assunzioni segue che $u_0, u_1 \in D_B = H^{2,p}(R)$.

In forza di un Teorema di Sobolev, se $v_i \in H^{k,p}(R)$, k sufficientemente grande, allora u_i appartiene anche a D_{A^2}.

In queste ipotesi di regolarità sui dati iniziali $u_0(x)$, $u_1(x)$, si è quindi ottenuto una soluzione stretta, nel senso della Definizione 2, del problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u(z,x)}{\partial z^2} = z^m \dfrac{\partial^2 u(z,x)}{\partial x^2}\,, & (z,x) \in [-T, T] \times R,\ m \text{ dispari} \\ u(0,x) = u_0(x)\,, & \\ \dfrac{\partial u(0,x)}{\partial z} = u_1(x)\,. & \end{cases}$$

BIBLIOGRAFIA

[1] A. V. Bitsadze, *Equations of the mixed type*, ed. Pergamon Press (1964).

[2] J. A. Donaldson, *An operational calculus for a class of abstract operator equations*, J. of Math. Anal. and Appl., **37** (1972), pp. 167-184.

[3] A. Favini, *Su un'equazione astratta di tipo Tricomi*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **53** (1975), pp. 257-267.
[4] P. Henrici, Zeitsch. Angew. Math. Phys., **8** (1957), pp. 169-203.
[5] T. Kato, *Perturbation theory for linear operators*, ed. Springer (1966).
[6] S. G. Krein, *Linear Differential Equations in Banach Space*, ed. AMS (1972).
[7] K. Yosida, *Functional Analysis*, ed. Springer (1966).

Manoscritto pervenuto in redazione il 9 dicembre 1975.