RENDICONTI
*del*
SEMINARIO MATEMATICO
*della*
UNIVERSITÀ DI PADOVA

KHALID BENABDALLAH
ROBERT WILSON

**Endomorphismes maigres de groupes abéliens primaires**

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*, tome 56 (1976), p. 205-213
<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1976__56__205_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 56 (1977)

# Endomorphismes maigres de groupes abéliens primaires.

KHALID BENABDALLAH - ROBERT WILSON (*)

Après les travaux de W. Liebert sur l'anneau d'endomorphismes des $p$-groupes séparables, L. Fuchs propose l'étude des anneaux d'endomorphismes des $p$-groupes en général ([3], problème 85). Ce travail est une contribution à ce problème.

Tous les groupes considérés ici sont abéliens primaires. Un sous-groupe $H$ d'un groupe $A$ est semi-essentiel dans $A$ si tout sous-groupe $H$-haut est borné. Les sous-groupes semi-essentiels ont été caractérisés dans [2]. Un endomorphisme $\varphi$ d'un groupe $A$ est appelé maigre si son noyau est semi-essentiel dans $A$.

A l'aide de ces concepts, nous obtenons de nouvelles conditions nécessaires pour qu'un anneau $E$ dont la partie torsione $T(E)$ est non bornée (le cas complémentaire étant bien connu) soit isomorphe à l'anneau d'endomorphismes d'un $p$-groupe; ce sont les suivantes:

($a$) $W = \{x \in E \mid (\mathrm{Ann}^d(xy) = \mathrm{Ann}^d y) \Rightarrow (y \in T(E))\}$ est un idéal bilatère de $E$,

($b$) $W$ est un sous-groupe essentiel de $E$,

($c$) $\mathrm{Ann}^g W = 0$,

($d$) Le radical de Jacobson de $W$ est

$$J(W) = X \cap W \quad \text{où} \quad X/(\mathrm{Ann}^g(E[p])) = \sum_{F \in \mathcal{G}} F$$

où $\mathcal{G} = \{\text{idéaux bilatères nils de } E/\mathrm{Ann}^g(E[p]))\}$.

---

(*) Département de Mathématiques, Université de Montréal, Montréal, P.Q. Travail subventioné par le Fond C.N.R. n. A 5591

## 1. Sous-groupes semi-essentiels et endomorphismes maigres.

Pour débuter, nos allons considérer quelques résultats sur les sous-groupes semi-essentiels, qui nous seront utiles par la suite.

LEMME 1.1 [2, théorème 1.1]. Un sous-groupe $H$ d'un groupe $A$ est semi-essentiel dans $A$ si et seulement si $H$ contient le socle de la partie divisible de $A$ et $(p^n A[p] + H)/H$ est fini pour un $n \in \boldsymbol{Z}^+$.

LEMME 1.2. Si $H$ et $H'$ sont deux sous-groupes semi-essentiels d'un groupe $A$ alors $H \cap H'$ est semi-essentiel dans $A$.

PREUVE. Par le lemme 1.1, $H \cap H'$ contient le socle de la partie divisible de $A$. D'autre part, il existe $n$, $m \in \boldsymbol{Z}^+$ ($n \geqslant m$ sans perte de généralité) tels que $(p^n A[p] + H)/H$ et $(p^m A[p] + H')/H'$ sont finis. Mais il existe une injection de $(p^n A[p] + (H \cap H'))/(H \cap H')$ dans $((p^n A[p] + H)/H) \oplus ((p^m A[p] + H')/H')$ et par le lemme 1.1, $H \cap H'$ est semi-essentiel dans $A$. $\square$

LEMME 1.3. Soient $A, B$ deux groupes et $f \in \operatorname{Hom}(A, B)$. Si $H$ est un sous-groupe semi-essentiel de $B$, $f^{-1}(H)$ est semi-essentiel dans $A$.

PREUVE. Si $K \subseteq A$ est disjoint de $f^{-1}(H)$, $K \cap \ker f = 0$ et $f(K) \simeq K$. De plus, $(K \cap f^{-1}(H) = 0) \Rightarrow (f(K) \cap H = 0)$. Puisque $H$ est semi-essentiel, $f(K) \simeq K$ est borné. $\square$

Fixons maintenant une notation que nous conserverons par la suite: pour un groupe $A$, notons

$$\begin{aligned}
E(A) &= \{\text{endomorphismes de } A\} \\
W(A) &= \{\text{endomorphismes maigres de } A\} \\
I_n(A) &= \{\varphi \in E(A) | \ker \varphi \supseteq p^n A[p]\}\,, \qquad n \in \boldsymbol{Z}^+ \\
T(E(A)) &= \text{partie torsion de } E(A) \\
J(E(A)) &= \text{radical de Jacobson de } E(A).
\end{aligned}$$

Tous ces ensembles sont des idéaux bilatères de $E(A)$, y compris l'ensemble des endomorphismes maigres, comme nous allons le voir maintenant.

THÉORÈME 1.4. L'ensemble $W(A)$ des endomorphismes maigres d'un groupe $A$ est un idéal bilatère de $E(A)$.

PREUVE. Soient $f$, $g \in W(A)$ et $h \in E(A)$. Par le lemme 1.2, $\ker f \cap \ker g$ est semi-essentiel dans $A$ et puisque $\ker f \cap \ker g \subseteq \subseteq \ker(f-g)$, $f-g \in W(A)$. D'autre part, $\ker(f \circ h) = h^{-1}(\ker f)$ est semi-essentiel par le lemme 1.3 et puisque $\ker f \subseteq \ker(h \circ f)$, $\ker(h \circ f)$ est semi-essentiel dans $A$. Donc $f \circ h$ et $h \circ f \in W(A)$ et $W(A)$ est un idéal bilatère de $E(A)$. $\square$

En remarquant que pour tout $n \in \boldsymbol{Z}^+$, $p^n A[p]$ est un sous-groupe sem-essentiel de $A$, on vérifie facilement que

$$T(E(A)) \subseteq \bigcup_n I_n(A) \subseteq W(A) \subseteq E(A) .$$

De plus, suivant [4], on a que

$$pE(A) \subseteq I_0(A) \subseteq J(E(A)) .$$

Nous allons maintenant étudier comment les rapports entre ces idéaux déterminent la structure du groupe $A$.

THÉORÈME 1.5. Soit $A$ un groupe. Les énoncés suivant sont équivalents.

(*a*) $A$ est borné,

(*b*) $W(A) = E(A)$,

(*c*) $W(A) = T(E(A))$.

PREUVE $(c) \to (a)$. Si $A$ est non borné, $\varphi\colon A \to A$ défini par $\varphi(a) = pa$ est tel que $\varphi \in I_0(A) \subseteq W(A)$ mais $\varphi \notin T(E(A))$.

$(b) \to (a)$. Si $W(A) = E(A)$ alors $1 \in W(A)$ et $0$ est semi-essentiel dans $A$. Donc $A$ est borné.

Les implications $(a) \to (b)$ et $(a) \to (c)$ sont évidentes. $\square$

THÉORÈME 1.6. Soit $A$ un groupe. Les énoncés suivants sont équivalents.

(*a*) $A$ est divisible,

(*b*) $W(A) = pE(A)$,

(*c*) $W(A) = I_0(A)$,

(*d*) $W(A) = J(E(A))$ .

Preuve $(a)\to(b)$, $(d)$. Si $A$ est divisible, $W(A)=I_0(A)$ par le lemme 1.1. De plus, on peut vérifier que $pE(A)=I_0(A)=J(E(A))$.

$(b)\to(c)$. Évident car $pE(A)\subseteq I_0(A)\subseteq W(A)$.

$(d)\to(a)$ $[(c)\to(a)]$. Supposons que $J(E(A))=W(A)$ $[I_0(A)=$ $=W(A)]$. Si $A$ n'est pas divisible, $A$ possède un facteur direct cyclique $\langle x\rangle$. Si $\pi$ est la projection sur $\langle x\rangle$, $\pi\in W(A)$. Toutefois, puisque $\pi(x)=x$, $x\in\ker(1-\pi)$ et $\pi\notin J(E(A))$. $[\pi\notin I_0(A)]$. □

Théorème 1.7. Soit $A$ un groupe et $n\in \boldsymbol{Z}^+$. Les énoncés suivants sont équivalents.

(a) $A=D\oplus B$ où $D$ est divisble et $p^nB=0$,

(b) $W(A)=I_n(A)$,

(c) $I_n(A)=I_{n+k}(A)$, $\forall k\in \boldsymbol{Z}^+$.

Preuve $(a)\to(b)$. Soit $A=D\oplus B$ où $D$ est divisible et $p^nB=0$. Soit $\varphi\in W(A)$ alors $p^nA[p]=p^nD[p]\subseteq\ker\varphi$ par le lemme 1.1 et $\varphi\in I_n(A)$.

$(b)\to(c)$. Clair car $I_n(A)\subseteq I_{n+k}(A)\subseteq W(A)$, $\forall k\in\boldsymbol{Z}^+$.

$(c)\to(a)$. Il est facile de vérifier que $I_m(A)=I_{m+1}(A)$ si et seulement si $p^mA[p]=p^{m+1}A[p]$. Mais alors, si $I_n(A)=I_{n+k}(A)$, $\forall k\in\boldsymbol{Z}^+$, $p^nA$ est divisible et $A=p^nA\oplus B$ où $p^nB=0$. □

Théorème 1.8. Soit $A$ un groupe séparable. Alors $W(A)=\bigcup_n I_n(A)$.

Preuve. Soit $\varphi\in W(A)$. Puisque $\ker\varphi$ est semi-essentiel dans $A$, $\exists n\in\boldsymbol{Z}^+$ tel que $((p^nA[p]+\ker\varphi)/\ker\varphi)\simeq\varphi(p^nA[p]))$ est fini.
Alors la suite

$$\varphi(p^nA[p])\supseteq\varphi(p^{n+1}A[p])\supseteq\dots$$

est stationnaire et il existe $l\in\boldsymbol{Z}^+$ tel que

$$(p^lA[p])=\varphi(^{l+1}A[p])\;\dots\,.$$

Donc $\varphi(p^lA[p])\subseteq A^1[p]=0$ et $\varphi\in I_l(A)\subseteq\bigcup_n I_n(A)$. □

## 2. L'idéal des endomorphismes maigres.

Dans cette section, nous allons répondre à la question suivante: sachant que $E(A)$ est l'anneau d'endomorphismes d'un groupe $A$, comment peut-on reconnaître de l'intérieur de $E(A)$, c'est-à-dire sans considérer les proprétés du groupe $A$ lui-même, l'idéal $W(A)$ des endomorphismes maigres?

D'abord, nous allons citer un lemme dont la preuve est directe.

Lemme 2.1. Soit $A$ un groupe qui n'est pas la somme d'un divisible et d'un borné et soient $\theta, \theta' \in E(A)$. Alors $\mathrm{Ann}^d(\theta\circ\theta') = \mathrm{Ann}^d(\theta')$ si et seulement si $(\ker\theta) \cap \theta'(A) = 0$.

THÉORÈME 2.2. Soit $A$ un groupe.

(*a*) Si $T(E(A))$ est borné, $W(A) = pE(A) + T(E(A))$.

(*b*) Si $T(E(A))$ est non borné,

$$W(A) = \{\varphi \in E(A) | (\mathrm{Ann}^d(\varphi\circ\theta) = \mathrm{Ann}^d\theta) \Rightarrow (\theta \in T(E(A))\} .$$

PREUVE. (*a*) Si $T(E(A))$ est borné, $A = D \oplus R$ où $D$ est divisible et $R$ est borné. Par le lemme 1.1, $\varphi \in W(A) \Leftrightarrow (D[p]) = 0$. Si $\pi_1, \pi_2$ sont les projections sur $D$ et $R$ alors $\varphi = \varphi\circ\pi_1 + \varphi\circ\pi_2$ où $\varphi\circ\pi_1 \in I_0(D) = pE(D) \subseteq pE(A)$ par le théorème 1.6 et $\varphi\circ\pi_2 \in T(E(A))$ car $\pi_2 \in T(E(A))$.

(*b*) Si $T(E(A))$ est non borné, $A$ n'est pas la somme d'un divisible et d'un borné. Si $\varphi \in W(A)$ et $\mathrm{Ann}^d(\varphi\circ\theta) = \mathrm{Ann}^d\theta$ pour un $\theta \in E(A)$, alors $\theta(A) \cap \ker\varphi = 0$ par le lemme 2.1. Puisque $\ker\varphi$ est semi-essentiel dans $A$, $\theta \in T(E(A))$.

Il reste à montrer l'inclusion inverse. Supposons que $\varphi \notin W(A)$. Alors il existe un sous-groupe $K$ non borné de $A$ tel que $K \cap \ker\varphi = 0$. Nous allons construire un endomorphisme $\theta$ d'ordre infini tel que $\mathrm{Ann}^d(\varphi\circ\theta) = \mathrm{Ann}^d(\theta)$. Pour cela, choissons une suite $k_1, \dots, k_n, \dots \in K$ telle que pour chaque $n \in \mathbf{Z}^+$, $O(k_n) = p^n$. Alors il existe une suite $b_1, \dots, b_n, \dots \in A$ telle que

(1) $O(b_i) > p^{2i}$, $\forall_i \in \mathbf{Z}^+$,

(2) $A_{i-1} = \langle b_i\rangle \oplus A_i$, $\forall i \in \mathbf{Z}^+$ $(A_0 = A)$.

Pour chaque $n$, $A = \langle b_1\rangle \oplus \dots \oplus \langle b_n\rangle \oplus A_n$: Posons $\pi_i$: $A \to \langle b_i\rangle$.

les projections canoniques. Alors

$$\psi = \sum_{1}^{\infty} p^i \pi_i \in E(A) \qquad \text{et} \qquad \psi(b_i) = p^i b_i \,.$$

Posant $\beta\colon \oplus \langle p^i b_i\rangle \to K$,

$$p^i b_i \mapsto k_i \qquad \text{et } \theta = \beta\circ\psi$$

on obtient que $\theta(b_i) = k_i$ et donc que $\theta \notin T(E(A))$. D'autre part, $\theta(A) \subseteq K$ et puisque $K \cap \ker\varphi = 0$, $\theta(A) \cap \ker\varphi = 0$ et par le lemme 2.1, $\mathrm{Ann}^d(\varphi\circ\theta) = \mathrm{Ann}^d(\theta)$. □

COROLLAIRE 2.3. Soit $A$ un groupe. Alors $\mathrm{Ann}^g(W(A)) = 0$.

PREUVE. Si $A = D \oplus B$ où $D$ est divisible et $B$ est borné, $W(A) = pE(A) + T(E(A))$. Si $\psi \in \mathrm{Ann}^g(W(A))$, $p\psi = 0$ et donc $\psi(D) = 0$ De plus la projection $\pi\colon A \to B$ est maigre et $\psi\circ\pi = 0$. Donc $\psi = 0$.

Si $A$ n'est pas la somme d'un divisible et d'un borné, si $\psi \in \mathrm{Ann}^g(W(A))$ et si $x \in A$ alors $\exists\varphi \in W(A)$ tel que $\varphi(A) = \langle x\rangle$. Mais alors $\psi\circ\varphi(A) = \varphi(\langle x\rangle) = 0$ et $\psi = 0$. □

Nous allons maintenant donner une caractérisation de l'idéal des endomorphismes maigres dans le cas où $A$ est séparable.

THÉORÈME 2.4. Soit $A$ un groupe séparable. Les énoncés suivants sont équivalents.

(a) $\varphi \in W(A)$,

(b) $\exists\pi \in E(A)$ tel que $\pi^2 = \pi$, $1 - \pi \in T(E(A))$, $\varphi\circ\pi \in \mathrm{Ann}^g(E(A)[p])$

(c) $\varphi \in \mathrm{Ann}^g(E(A)[p]) + T(E(A))$

PREUVE $(a) \to (b)$. Si $\varphi \in W(A)$, $\exists n \in \boldsymbol{Z}^+$ tel que $p^n A[p] \subseteq \ker\varphi$ par le théorème 1.8. Par le corollaire 2 au théorème 3.7 de [1], on peut écrire $A = K \oplus B$ où $K[p] = (\ker\varphi)[p]$ et $p^n B = 0$. En posant $\pi$ la projection de $A$ sur $K$, on a l'idempotent cherché.

$(b) \to (c)$. Évident.

$(c) \to (a)$. Puisque $T(E(A)) \subseteq W(A)$, il suffit de montrer que $\mathrm{Ann}^g(E(A)[p]) \subseteq W(A)$. Il est facile de vérifier que $\mathrm{Ann}^g(E(A)[p]) = I_0(A) \subseteq W(A)$ car $A$ est séparable. □

## 3. L'anneau des endomorphismes maigres.

Dans cette section, nous allons étudier l'anneau $W(A)$ des endomorphismes maigres d'un groupe et nous allons en caractériser le radical de Jacobson.

LEMME 3.1. Soit $A$ un groupe et

$$H(A) = \{\varphi \in E(A) | \forall x \in A[p] \setminus A^1, h(\varphi(x)) > h(x)\} .$$

Alors $J(E(A)) \subseteq H(A)$.

PREUVE. On peut remarquer que $H(A)$ est un idéal bilatère de $E(A)$. Soit $\varphi \in E(A)$ et supposons que $h(\varphi(x)) = h(x) = n < \infty$ pour un $x \in A[p]$. Alors $A = \langle z \rangle \oplus C = \langle z' \rangle \oplus C'$ où $p^n z = x$ et $p^n z' = \varphi(x)$. En définissant $\pi \colon A \to A$ par $\pi(z') = z$ et $\pi(C') = 0$, on obtient que $(1 - \pi\varphi)(x) = 0$ et donc $\varphi \notin J(E(A))$. $\square$

LEMME 3.2. Soit $A$ un groupe et $\mathcal{G} = \{$idéaux bilatères nils de $E(A)/I_0(A)\}$. Soit $X(A)$ l'idéal de $E(A)$ défini par $X(A)/I_0(A) = \sum_{F \in \mathcal{G}} F$.

Alors $X(A) \subseteq J(E(A))$.

PREUVE. Si $\varphi \in X(A)$, $\exists n \in \boldsymbol{Z}^+$ tel que $\varphi^n \in I_0(A)$. Si $x \in A[p]$ est tel que $(1 - \varphi)(x) = 0$, alors $x = \varphi(x) = \varphi^n(x) = 0$. Donc $1 - \varphi$ est injectif. D'autre part, si $x \in p^k A[p]$, $k \in Z^+$, $(1 - \varphi)(x + \varphi(x) + \ldots + \varphi^{n-1}(x)) = x$ et $(1 - \varphi)(p^k A[p]) = p^k A[p]$. Donc $1 - \varphi$ est surjectif. Puisque $X(A)$ est un idéal de $E(A)$, $X(A) \subseteq J(E(A))$. $\square$

LEMME 3.3. Soit $A$ un groupe et $\varphi \in W(A)$. Un des deux énoncés est vrai:

(*a*) $\exists l$, $k \in \boldsymbol{Z}^+$ tel que $\varphi^l \in I_k(A)$,

(*b*) $\exists l$, $k, t \in \boldsymbol{Z}^+$ tel que $\varphi^{l+t} - \varphi^l \in I_k(A)$.

PREUVE. Puisque $\varphi \in W(A)$, $\exists k \in \boldsymbol{Z}^+$ tel que $\varphi(p^k A[p])$ est fini et la chaîne

$$\varphi(p^k A[p]) \supseteq \varphi^2(p^k A[p]) \supseteq \ldots \text{ est stationnaire}.$$

Si la chaîne va à 0, $\exists l \in \boldsymbol{Z}^+$ tel que $\varphi^l(p^k A[p]) = 0$ et $\varphi^l \in I_k(A)$. Sinon, $\exists l \in \boldsymbol{Z}^+$ tel que

$$\varphi^l(p^kA[p]) = \varphi^{l+1}(p^kA[p]) = \dots$$

et $\varphi$ est une bijection sur $\varphi^l(p^kA[p])$. Mais alors, $\exists t \in \boldsymbol{Z}^+$ tel que

$$(\varphi^{l+t} - \varphi^l)(p^kA[p]) = 0 \quad \text{et} \quad \varphi^{l+t} - \varphi^l \in I_k(A)\,. \quad \square$$

Lemme 3.4. Soit $A$ un groupe et $\varphi \in J(W(A))$. Alors $\exists l,\, k \in \boldsymbol{Z}^+$ tels que $\varphi^l \in I_k(A)$.

Preuve. Soit $\varphi \in W(A)$; si $\varphi^l \notin I_k(A)$, $\forall l,\ k \in \boldsymbol{Z}^+$, il existe par le lemme 3.3 $l, t, k \in \boldsymbol{Z}^+$ tels que $\varphi^{l+t} - \varphi^l \in I_k(A)$. Soit $0 \neq x \in \varphi^l(p^kA[p])$; alors $(1-\varphi^t)(x) = 0$. Puisque $1-\varphi^t$ n'est pas inversible, $\varphi \notin J(W(A))$. $\square$

Théorème 3.5. Soit $A$ un groupe. Alors $J(W(A)) = X(A) \cap W(A)$.

Preuve. Par le lemme 3.2, $X(A) \cap W(A) \subseteq J(E(A)) \cap W(A) = J(W(A))$. Soit $\varphi \in J(W(A))$; par le lemme 3.4, $\exists l,\ k \in \boldsymbol{Z}^+$ tels que $\varphi^l \in I_k(A)$ et par le lemme 3.1, $\varphi \in H(A)$. Soit $x \in A[p]$; alors $h(x) < h(\varphi(x)) < h(\varphi^2(x)) < \dots$ ou bien $\exists i \in \boldsymbol{Z}^+$ tel que $h(\varphi^i(x)) = \infty$. Dans les deux cas, $h(\varphi^n(x)) \geqslant n$ pour tout $n$. En particulier, $h(\varphi^k(x)) \geqslant k$ et $\varphi^{l+k}(x) = 0$. Donc $\varphi^{l+k} \in I_0(A)$, $J(W(A))/I_0(A)$ est un idéal bilatère nil de $E(A)/I_0(A)$ et $J(W(A)) \subseteq X(A) \cap W(A)$. $\square$

Pour terminer, nous allons caractériser $J(W(A))$ dans le cas où $A$ est un groupe séparable.

Lemme 3.6. Soit $A$ un groupe séparable. Alors $H(A) \cap W(A) \subseteq J(W(A))$.

Preuve. Soit $\varphi \in H(A) \cap W(A)$. Si $x \in A[p] \cap \ker(1-\varphi)$, $x = \varphi(x)$ et $h(x) = \infty$ car $\varphi \in H(A)$. Donc $x = 0$ et $1-\varphi$ est injectif. D'autre part, soit $x \in p^tA[p]$, $t \in \boldsymbol{Z}^+$. Par le théorème 1.8, $\varphi \in I_k(A)$ pour un $k \in \boldsymbol{Z}^+$ et puisque $A$ est séparable,

$$h(x) < h(\varphi(x)) < h(\varphi^2(x)) < \dots$$

et en particulier, $h(\varphi^k(x)) \geqslant k$. Puisque $\varphi \in I_k(A)$, $\varphi^{k+1}(x) = 0$ et

$$(1-\varphi)(x + \varphi(x) + \dots + \varphi^k(x)) = x\,.$$

Donc $(1-\varphi)(p^tA[p]) = p^tA[p]$ et $1-\varphi$ est surjectif. Puisque $1-\varphi$ est inversible pour tout $\varphi \in H(A) \cap W(A)$, $H(A) \cap W(A) \subseteq J(W(A))$. $\square$

THÉORÈME 3.7. Soit $A$ un groupe séparable. Les idéaux suivants de $W(A)$ sont égaux.

(a) $J(W(A))$,

(b) $I_0(A) + T(J(E(A)))$,

(c) $H(A) \cap W(A)$.

PREUVE $(a) \subseteq (b)$. Pa le théorème 2.4, $W(A) = I_0(A) + T(E(A))$. Puisque $I_0(A) \subseteq J(W(A))$, $J(W(A)) \subseteq I_0(A) + T(J(E(A)))$.

$(b) \subseteq (c)$. Puisque $I_0(A) \subseteq H(A) \cap W(A)$ et que $T(E(A)) \subseteq W(A)$, en appliquant le lemme 3.1, on obtient que $I_0(A) + T(J(E(A))) \subseteq$ $\subseteq H(A) \cap W(A)$.

$(c) \subseteq (a)$. Lemme 3.6. □

## BIBLIOGRAPHIE

[1] K. BENABDALLAH - J. M. IRWIN, *On quasi-essential subgroups of primary abelian groups*, Can. J. Math., **22** (1970), pp. 1176-1184.

[2] K. BENABDALLAH - J. M. IRWIN, *N-high subgroups and p-adic topology*, Comment, Math. Univ. St-Pauli, **21** (1972), pp. 43-45.

[3] L. FUCHS, *Infinite abelian groups* (I et II), Academic Press, New York, 1970.

[4] A. MADER, *On the normal structure of the automorphism group and the ideal structure of the endomorphism ring of abelian p-groups*, Publ. Math. Debrecen, **13** (1966), pp. 123-137.

Manoscritto pervenuto in Redazione l'1 Luglio 1976.