RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

GINO TIRONI

Sul prodotto cartesiano di spazi topologici aventi proprietà del tipo della paracompattezza

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 56 (1976), p. 91-100

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1976__56__91_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 56 (1977)

Sul prodotto cartesiano di spazi topologici aventi proprietà del tipo della paracompattezza.

GINO TIRONI (*)

SUNTO - In questo lavoro si studia il comportamento rispetto al prodotto di alcune proprietà d'uno spazio topologico di Hausdorff, proprietà che, complessivamente, vengono dette del tipo della paracompattezza. Un primo gruppo di risultati è relativo al prodotto di spazi α-Lindelöf; in particolare, si dimostra che il prodotto di un'infinità numerabile di spazi localmente compatti di Lindelöf, è uno spazio di Lindelöf. Viene quindi introdotta la nozione di spazio fortemente ereditariamente paracompatto e si dimostra che il prodotto di un tale spazio per uno spazio metrizzabile, gode della stessa proprietà. Da ultimo si dimostra che il prodotto di uno spazio fortemente (debolmente) paracompatto per un compatto, è ancora fortemente (debolmente) paracompatto.

SUMMARY - In this paper, some properties of topological Hausdorff spaces, which are denoted as paracompactness-like properties, are tested with respect to the product of topological spaces. First, there are results concerning the product of α-Lindelöf space; in particular, it is shown that the product of countably many Lindelöf locally compact spaces is Lindelöf. The notion of strongly hereditarily paracompact spaces is then introduced, and this property is shown to be productive with respect to metrizable spaces.

(*) Indirizzo dell'A.: Istituto di Matematica dell'Università - Piazzale Europa - 34100 Trieste.

Lavoro eseguito nell'ambito dei gruppi di Ricerca Matematica del C.N.R.

0. Introduzione.

La proprietà d'uno spazio topologico d'essere di Lindelöf, fortemente paracompatto, debolmente paracompatto possono essere considerate come generalizzazioni della compattezza dello spazio e anche, in un certo senso, come rafforzamenti della proprietà di normalità d'uno spazio topologico di Hausdorff [1], [4].

In questo lavoro intendo studiare il comportamento di tali proprietà, che complessivamente dirò del tipo della paracompattezza, rispetto al prodotto, completando ed estendendo certi risultati o classicamente noti o esposti in [7]. Il paragrafo 1 contiene un completamento dei risultati esposti in [7] sul prodotto di spazi ereditariamente α-Lindelöf, dando qualche risultato relativo al prodotto di spazi α-Lindelöf (non ereditariamente). Il paragrafo 2 contiene un'estensione dei risultati esposti in [7] al prodotto di spazi, che vengono detti *fortemente ereditariamente paracompatti*, per spazi metrici e fornisce una generalizzazione d'un noto teorema di Michael [2]. Il paragrafo 3 contiene teoremi relativi al prodotto di spazi debolmente e fortemente paracompatti per spazi compatti, teoremi che estendono alcuni risultati classici.

Nel seguito τ, α, β designeranno numeri cardinali. La cardinalità d'un insieme A verrà indicata con $|A|$. Tutti gli spazi topologici considerati s'intenderanno di Hausdorff e infiniti.

1. È conveniente ricordare le seguenti definizioni [5], [7].

DEFINIZIONE 1. Dicesi numero di Lindelöf $l(X)$ d'uno spazio topologico X, il minimo numero cardinale τ tale che da ogni ricoprimento aperto di X possa estrarsi un sottoricoprimento di cardinalità $\leqslant \tau$.

DEFINIZIONE 2. Dicesi numero di Lindelöf ereditario di uno spazio X, $ll(X)$, l'estremo superiore dei numeri di Lindelöf dei sottospazi di X.

DEFINIZIONE 3. Un sottinsieme A d'uno spazio topologico X si dice di tipo K_α; se è riunione di una famiglia $\mathcal{K}$ d'insiemi compatti di X, tale che $|\mathcal{K}| \leqslant \alpha$. Se $\alpha = \aleph_0$, l'insieme si dirà di tipo K_σ.

Osservo, innanzi tutto, che, tranne l'ovvia relazione $l(X) \leqslant ll(X)$, nessun'altra relazione corre tra $l(X)$ e (una funzione del numero cardinale) $ll(X)$. È da notare che il valore minimo di $l(X)$ è, per spazi infiniti, $\aleph_0$, e che tale valore si ha se X gode della proprietà di Lindelöf (o se, in particolare, è compatto). Non è difficile, per ogni numero cardinale $\alpha > \aleph_0$, trovare uno spazio compatto X in cui sia $ll(X) = \alpha$. A tale scopo può servire un qualsiasi spazio compatto che contenga un sottinsieme discreto di cardinalità α, e tale che $|X| = \alpha$. Un esempio interessante, anche se non il più semplice, è il seguente.

Sia E uno spazio compatto di Hausdorff tale che $|E| = \alpha$.

Sia $X = E \times \{0, 1\}$, dotato della seguente topologia. Il sottospazio $E \times \{0\}$ sia discreto; se $x = (a, 1)$, $a \in E$ e U è un intorno di a in E, è intorno di x l'insieme

$$(U - \{a\}) \times \{0\} \cup U \times \{1\} .$$

Facilmente si riconosce che in tale modo si definisce su X una topologia che lo rende compatto e di Hausdorff; inoltre $|X| = |E| = \alpha$.

Il sottospazio $X' = E \times \{0\}$ è aperto e denso in X. La famiglia di aperti $\{U_a\}_{a \in E}$, con $U_a = \{a\} \times \{0\}$, ha cardinalità α, ricopre X' e nessuna sua sottofamiglia propria può ricoprirlo. Dunque $ll(x) \geqslant \alpha$.

D'altra parte, essendo $ll(X) \leqslant |X|$, si ha proprio $ll(X) = \alpha$, mentre $l(X) = \aleph_0$.

Anzi, dati due numeri cardinali α e β, con $\aleph_0 \leqslant \beta < \alpha$, non è difficile trovare uno spazio topologico X tale che $l(X) = \beta$ e $ll(X) = \alpha$.

Sia E' un insieme di cardinalità α e sia $X = E' \cup \{p\}$, $p \notin E'$, con la seguente topologia; E' è discreto e una base d'intorni di p è data dagli insiemi $U \subset X$, tali che $p \in U$ e $|X - U| = \beta$. Lo spazio X così ottenuto è di Hausdorff, è tale che $l(X) = \beta$ mentre $ll(X) = \alpha$, come si vede facilmente.

Voglio ora esporre alcune semplici condizioni atte ad assicurare che il numero di Lindelöf si conservi nel prodotto di due o più spazi topologici.

Dopo le osservazioni fatte su $l(X)$ e $ll(X)$, non c'è da stupirsi che tali condizioni siano di tipo diverso da quelle trovate in [7] per la produttività di $ll(X)$.

È noto [1], [4] che il prodotto di uno spazio X avente la proprietà di Lindelöf per uno spazio Y compatto, ha la proprietà di Lindelöf. Il seguente teorema 1 generalizza tale risultato.

TEOREMA 1. Sia X uno spazio topologico avente $l(X) \leqslant \alpha$ e sia Y uno spazio compatto. Allora $l(X \times Y) \leqslant \alpha$.

DIMOSTRAZIONE. Sarà sufficiente considerare ricoprimenti formati con insiemi di una base di $X \times Y$ (vedi, p. es. [7]).

Sia $\mathcal{U} = \{U_i \times V_j\colon i \in I, j \in J(i)\}$ un ricoprimento aperto di $X \times Y$, in cui U_i e V_j siano, rispettivamente, elementi d'una base di aperti di X e di Y. Per ogni $x \in X$, $\{x\} \times Y$ è compatto in $X \times Y$. Esistono perciò insiemi finiti $I_x \subset I$ e $J_x(i) \subset J(i)$, $i \in I_x$, tali che

$$\mathcal{U}_x = \{U_i \times V_j\colon i \in I_x, j \in J_x(i)\}$$

sia un ricoprimento finito di $\{x\} \times Y$. Consideriamo per ogni x l'insieme $O_x = \cap \{U_i\colon i \in I_x\}$ che è un intorno aperto di x. La famiglia $\mathcal{O} = \{O_x\colon x \in X\}$ è un ricoprimento aperto di X ed esiste perciò una sottofamiglia $\tilde{\mathcal{O}}$, di cardinalità $\leqslant \alpha$, che ricopre X. Sia $\bar{O} \in \tilde{\mathcal{O}}$; allora $\bar{O} = \bigcap_{i \in I_{\bar{x}}} U_i$ per qualche $\bar{x} \in X$, essendo $I_{\bar{x}} \subset I$ e finito. Si consideri inoltre la famiglia finita

$$\mathcal{U}_{\bar{O}} = \{U_i \times V_j\colon j \in J_{\bar{x}}(i), i \in I_{\bar{x}}\} .$$

La famiglia $\tilde{\mathcal{V}} = \cup \{\mathcal{U}_{\bar{O}}\colon \bar{O} \in \tilde{\mathcal{O}}\}$ è una sottofamiglia di $\mathcal{U}$ avente cardinalità $\leqslant \alpha$ che, come è facile riconoscere, ricopre $X \times Y$. Infatti, se $(x, y) \in X \times Y$, esiste $\bar{O}$ tale che $x \in \bar{O}$. Ora $\mathcal{U}_{\bar{O}}$ non solo ricopre $\{x\} \times Y$ ma ricopre $\bar{O} \times Y$. Cioè $x \in U_i$ per ogni $i \in I_{\bar{O}}$ ed esiste V_j, $j \in J_x(i)$, per qualche $i \in I_{\bar{x}}$, tale che $y \in V_j$. Per tali i e $j (x, y) \in \in U_i \times V_j$. ∎

Nel caso $\alpha = \aleph_0$ la dimostrazione qui esposta costituisce una prova più diretta di quella riportata in [4].

Evidentemente uno spazio topologico di tipo K_α ha numero di Lindelöf $\leqslant \alpha$. È utile dare anche una generalizzazione del teorema 1, già nota nel caso $\alpha = \aleph_0$. (1).

TEOREMA 2. Sia X uno spazio topologico con $l(X) \leqslant \alpha$. Se Y è di tipo K_α, si ha $l(X \times Y) \leqslant \alpha$.

DIMOSTRAZIONE. Sia $Y = \bigcup_{a \in A} C_a$, con C_a sottospazi compatti di Y e $|A| \leqslant \alpha$. Si ha, evidentemente,

$$X \times Y = X \times \bigcup_{a \in A} C_a = \bigcup_{a \in A} (X \times C_a) .$$

---

(1) Dimostrata da Michael [2] sotto l'ulteriore ipotesi della regolarità (e quindi della completa regolarità) degli spazi considerati, ricorrendo a una compattizzazione di Y (p. es. βY).

Ora, ciascuno dei sottospazi $X \times C_a$ è tale che $l(X \times C_a) \leqslant \alpha$ per il teorema 1.

Sia $\mathfrak{U}$ un ricoprimento aperto di $X \times Y$; esso ricopre anche $X \times C_a$. Esiste un sottoricoprimento $\tilde{\mathfrak{U}}_a$, tale che $|\tilde{\mathfrak{U}}_a| \leqslant \alpha$.

Ma allora $\tilde{\mathfrak{U}} = \cup \{\tilde{\mathfrak{U}}_a \colon a \in A\}$ è una sottofamiglia di U che ricopre $X \times Y$ e tale che $|\tilde{\mathfrak{U}}| \leqslant \alpha \cdot \alpha = \alpha$. ■

In particolare, si ha il risultato noto [2] che il prodotto d'uno spazio di Lindelöf per uno spazio di tipo K_σ è uno spazio di Lindelöf.

Poichè la classe degli spazi localmente compatti aventi numero di Lindelöf α, coincide con quella degli spazi localmente compatti di tipo K_α [5], [7], si ha immediatamente il seguente

Corollario 1. Il prodotto di uno spazio α-Lindelöf X per uno spazio Y localmente compatto e α-Lindelöf, è uno spazio α-Lindelöf.

Ricordando il teorema di Tychonoff sul prodotto di spazi compatti, è semplice riconoscere che il prodotto di una famiglia di cardinalità al più α di spazi di tipo K_α è ancora uno spazio di tipo K_α. Da ciò segue

Proposizione 1. Il prodotto d'una famiglia di cardinalità $\leqslant \alpha$ di spazi localmente compatti e α-Lindelöf, è uno spazio α-Lindelöf ($\alpha \geqslant \aleph_0$).

Si osservi che tale proposizione 1 non è una banale conseguenza della caratterizzazione (sopra menzionata) degli spazi localmente compatti e α-Lindelöf perchè la compattezza locale non è infinitamente produttiva e l'essere α-Lindelöf non è una proprietà produttiva. Benchè il corollario 1 e la proposizione 1 siano molto semplici, mi sembra che non siano stati messi finora in evidenza nella letteratura sugli spazi di Lindelöf.

2. In [7] è stato dimostrato che $ll(X \times Y) \leqslant ll(X) \cdot w(Y)$.

In particolare, il prodotto di uno spazio che ha ereditariamente la proprietà di Lindelöf per uno spazio a base numerabile, ha ereditariamente la proprietà di Lindelöf. Ora, in generale, il prodotto di uno spazio ereditariamente paracompatto per uno spazio regolare a base numerabile (e quindi metrizzabile) non è ereditariamente paracompatto, come dimostra un noto esempio di Michael [3] (2).

---

(2) Soltanto nella più particolare ipotesi del prodotto di uno spazio ereditariamente paracompatto e perfettamente normale (cioè uno spazio normale nel quale ogni aperto è un F_σ) per uno spazio metrizzabile, si ottiene ancora uno spazio ereditariamente paracompatto e perfettamente normale [2].

Per analizzare le ragioni del fallimento, in generale, dell'analogo teorema per gli spazi ereditariamente paracompatti, ho ritenuto opportuno introdurre la seguente

DEFINIZIONE 4. Uno spazio *paracompatto* X si dice *fortemente ereditariamente paracompatto* se per ogni suo sottinsieme A e ogni ricoprimento aperto di A si può trovare un raffinamento aperto che copre A ed è σ-localmente finito *in* X.

Per comprendere tale definizione converrà ricordare la seguente caratterizzazione della paracompattezza per spazi regolari [2], [4].

TEOREMA (Michael). Uno spazio regolare X è paracompatto se e solo se ogni suo ricoprimento aperto ammette un raffinamento aperto σ-localmente finito.

Ora, se A è un sottinsieme di uno spazio X paracompatto (e quindi normale e, a maggior ragione, regolare) A è certamente regolare. Se ogni ricoprimento aperto $\mathfrak{U}$ di A ha un raffinato aperto σ-localmente finito *in* X, esso è certamente aperto e σ-localmente finito *in* A. Dunque il sottospazio A è, a norma del citato teorema di Michael, paracompatto. Uno spazio X che goda della proprietà della definizione 4 è dunque ereditariamente paracompatto, e ciò giustifica la definizione stessa.

Si riconosce poi facilmente che affinchè X sia fortemente ereditariamente paracompatto basta che la proprietà della definizione 4 sia verificata da tutti i sottinsiemi *aperti* di X.

Osserviamo, infine, che gli spazi regolari ereditariamente di Lindelöf e gli spazi paracompatti e perfettamente normali sono fortemente ereditariamente paracompatti [2]. Invece gli esempi di spazi ereditariamente paracompatti portati da Michael in [3], non lo sono.

Si ha allora il seguente

TEOREMA 3. Il prodotto d'uno spazio X fortemente ereditariamente paracompatto per uno spazio Y metrizzabile è uno spazio fortemente ereditariamente paracompatto.

DIMOSTRAZIONE. Poichè Y è metrizzabile esso ha una base σ-localmente finita. Poichè il prodotto di spazi regolari è uno spazio regolare basterà dimostrare che ogni aperto A in $X \times Y$ è tale che ogni suo ricoprimento aperto $\mathcal{A}$ ammette un raffinamento $\mathfrak{R}$ σ-localmente finito e aperto in $X \times Y$. Esiste un base di Y $\mathfrak{V} = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} \mathfrak{V}_n$, con $\mathfrak{V}_n$ famiglia localmente finita. Si indichino poi con $\mathfrak{V} = \{V_j\}_{j \in J}$ e $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$

la detta base di Y e una base di X, indiciate con gli insiemi d'indici J e I rispettivamente. Dato un ricoprimento aperto $\mathcal{A}$ di A, sia

$$\mathcal{S} = \{U_i \times V_j\colon i \in I, j \in J \text{ e } U_i \times V_j \subset A_\alpha, \text{ per qualche } A_\alpha \in \mathcal{A}\} .$$

$\mathcal{S}$ è evidentemente un raffinamento di $\mathcal{A}$ che ricopre A. Si considerino poi, per ogni $j \in J$,

$$\mathcal{U}^{(j)} = \{U_i\colon U_i \times V_j \subset A\} \qquad \text{e} \qquad A_j = \cup \{U_i\colon U_i \in \mathcal{U}^{(j)}\} .$$

A_j è un insieme aperto di X di cui $\mathcal{U}^{(j)}$ è un ricoprimento. Esiste, poichè X è fortemente ereditariamente paracompatto, un raffinamento aperto $\mathcal{W}^{(j)} = \{W_k^j\}_{k \in K(j)}$ di $\mathcal{U}^{(j)}$ che ricopre A_j ed è σ-localmente finito *in* X. Allora

$$\mathcal{R} = \{W_k^j \times V_j\colon k \in K(j), j \in J\}$$

è un ricoprimento di A: per ogni $(x, y) \in A$ esistono i e j tali che $(x, y) \in \in U_i \times V_j \subset A_j \times V_j$. Poichè $\mathcal{W}^{(j)}$ ricopre A_j, per qualche $k \in K(j)$, $(x, y) \in W_k^j \times V_j$. $\mathcal{R}$ è un raffinamento di $\mathcal{A}$, poichè lo è di $\mathcal{S}$, ed è σ-localmente finito in $X \times Y$ poichè $\mathcal{V}$ lo è e $\mathcal{W}^{(j)}$ lo è per ogni j. ■

È chiaro poi che, per qualche $j \in J$, $\mathcal{U}^{(j)}$ può essere vuota e quindi essere un insieme vuoto sia $K(j)$ che la famiglia $\mathcal{W}^{(j)}$ di aperti.

Si noti che la dimostrazione del teorema 3 ha successo grazie al fatto che si possono produrre raffinamenti aperti σ-localmente finiti *in* X.

Consideriamo invece uno degli esempi proposti da Michael. Sia X l'intervallo unitario ritopologizzato in modo da rendere gli irrazionali discreti. Detto P l'insieme degli irrazionali, aperto in X, ogni suo ricoprimento ha, banalmente, un raffinamento aperto σ-localmente finito (anzi discreto) *in* P; ma il ricoprimento $\mathcal{T} = \{\{p\}\colon p \in P\}$ *non* è σ-localmente finito in X. Infatti ogni intorno di un punto razionale incontra un'infinità più che numerabile di elementi di $\mathcal{T}$. Per un siffatto spazio che, non è fortemente ereditariamente paracompatto, il teorema 3 non vale.

3. Dimostriamo infine che certe proprietà delle quali godono gli spazi di Lindelöf e i paracompatti, si estendono anche agli spazi debolmente e fortemente paracompatti. Tali proprietà sono presumibilmente conosciute anche se, per quanto mi consta, nella letteratura non se ne trova esplicita dimostrazione. Le dimostrazioni sono qui riportate per ragioni di completezza.

Definizione 5. Uno spazio topologico si dice debolmente paracompatto se esso è T_2 e ogni suo ricoprimento aperto ammette un raffinamento aperto puntualmente finito [4].

Definizione 6. Uno spazio topologico si dice fortemente paracompatto se è T_2 e se ogni suo ricoprimento aperto ha un raffinamento aperto a stella finita. Con ciò intendiamo dire che se $\mathcal{U} = \{U_s\}_{s\in S}$ è il raffinamento in questione, per ogni $s_0 \in S$, l'insieme $S_0 = \{s\colon U_s \cap U_{s_0} \neq \emptyset\}$ è finito. Osserviamo che ogni spazio fortemente paracompatto è paracompatto e ogni paracompatto è debolmente paracompatto. Gli spazi debolmente paracompatti non sono necessariamente normali (anzi, neppure regolari). Se sono normali essi si riducono a spazi numerabilmente paracompatti [4].

Valgono i seguenti

Teorema 4. *Il prodotto d'uno spazio X debolmente paracompatto per uno spazio Y compatto, è debolmente paracompatto.*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ un ricoprimento aperto di $X\times Y$ (che è necessariamente di Hausdorff). Sia poi $\mathcal{S}$ un raffinamento di $\mathcal{U}$ del tipo $\mathcal{S} = \{A_i\times B_j\colon i\in I(j),\, j\in J\}$ essendo gli A_i aperti di una base di X e i B_j aperti di una base di Y.

Per ogni $x\in X$, $\{x\}\times Y$ è un compatto ed è perciò coperto da una famiglia finita $\mathcal{S}_x = \{A_i\times B_j\colon i\in I_x(j),\, j\in J_x\}$, con J_x finito e gli $I_x(j)$ finiti per ogni j. Sia $I_x = \bigcup_{j\in J_x} I_x(j)$, e sia $O_x = \bigcap_{i\in I_x} A_i$.

$\mathcal{O} = \{O_x\}_{x\in X}$ è un ricoprimento aperto di X che ammette un raffinamento $\mathcal{R} = \{R_\delta\}_{\delta\in\Delta}$ aperto puntualmente finito che ricopre X. Per ogni δ esiste qualche x tale che $R_\delta \subset O_x = \bigcap_{i\in I_x} A_i$; si scelga dunque un solo $x = x(\delta)$ con la proprietà che $R_\delta\subset O_{x(\delta)}$. Si ponga

$$\mathcal{T}_\delta = \{R_\delta\times B_j\colon j\in J_{x(\delta)}\}\,.$$

$\mathcal{T} = \cup\{\mathcal{T}_\delta\colon \delta\in\Delta\}$ è un raffinamento aperto di $\mathcal{U}$ puntualmente finito che ricopre $X\times Y$.

Sia (x, y) un punto di $X\times Y$: esiste δ tale che $x\in R_\delta$. Sia $x(\delta)$ tale che $R_\delta\subset O_{x(\delta)}$. Ora

$$R_\delta\times Y\subset O_{x(\delta)}\times Y\subset \cup\{A_i\times B_j\colon i\in I_{x(\delta)}(j),\, j\in J_{x(\delta)}\}\,.$$

Esiste perciò j tale che $y\in B_j$. Dunque $(x, y)\in R_\delta\times B_j\subset A_i\times B_j$ per qualche $i \in I_{x(\delta)}(j)$. Ma $\{A_i \times B_j \colon i \in I(j), j \in J\}$ è un raffinamento di $\mathcal{U}$. Dunque $\mathcal{T}$ è un raffinamento di $\mathcal{U}$ che copre $X \times Y$.

Esso è puntualmente finito: se $(x, y) \in X \times Y$, x incontra solo un numero finito di R_δ. Ma a ciascun R_δ sono associati solo un numero finito di B_j tali che $R_\delta \times B_j \in \mathcal{T}$. Perciò al più un numero finito di aperti di $\mathcal{T}$ ha come elemento (x, y). ■

Si ha poi

TEOREMA 5. Il prodotto d'uno spazio X fortemente paracompatto per uno spazio Y compatto è fortemente paracompatto.

DIMOSTRAZIONE. Il prodotto dei due spazi è di Hausdorff. Sia $\mathcal{U}$ un ricoprimento aperto di $X \times Y$ e, come nel teorema precedente, sia $\mathcal{S} = \{A_i \times B_j \colon i \in I(j), j \in J\}$ un raffinamento di $\mathcal{U}$ in cui A_i e B_j sono aperti di una base di X e di Y, rispettivamente.

$\{x\} \times Y$ è compatto; perciò è coperto da una famiglia finita $\mathcal{S}_x$ costruita come nel teorema 4.

Se $O_x = \bigcap_{i \in I_x} A_i$ sia $\mathcal{O} = \{O_x\}_{x \in X}$.

Sia infine $\mathcal{R} = \{R_\delta\}_{\delta \in \Delta}$ un raffinamento aperto di $\mathcal{O}$ a stella finita, dunque tale che per ogni δ_0, $\Delta_0 = \{\delta \colon R_\delta \cap R_{\delta_0} \neq \emptyset\}$ è finito. Per ogni $\delta \in \Delta$ si scelga un insieme $O_{x(\delta)}$ tale che $R_\delta \subset O_{x(\delta)}$. Sia poi

$$\mathcal{T}_\delta = \{R_\delta \times B_j \colon j \in J_{x(\delta)}\};$$

ricordiamo che $J_{x(\delta)}$ è finito per ogni δ. Sia infine $\mathcal{T} = \cup \{\mathcal{T}_\delta \colon \delta \in \Delta\}$. $\mathcal{T}$ è, come si è verificato nella dimostrazione del teorema 4, un ricoprimento di $X \times Y$ che raffina $\mathcal{U}$. Dimostriamo che $\mathcal{T}$ è a stella finita. Sia $R_{\delta_0} \times B_{j_0}$ un elemento di $\mathcal{T}$; ora è

$$R_\delta \times B_j \cap R_{\delta_0} \times B_{j_0} = (R_\delta \cap R_{\delta_0}) \times (B_j \cap B_{j_0}) .$$

Solamente per un numero finito di coppie d'indici (δ, j) tale intersezione è non vuota: infatti $R_\delta \cap R_{\delta_0}$ è non vuoto solo per un numero finito di indici e, per ogni δ, solo per un numero finito d'indici j: $R_\delta \times B_j \in \mathcal{T}$. ■

4. Ricordando alcuni risultati ben noti, e quelli esposti nel presente lavoro, possiamo osservare che il prodotto $X \times Y$ d'uno spazio X, rispettivamente, regolare e di Lindelöf, o fortemente paracompatto o debolmente paracompatto, per uno spazio Y compatto, gode della stessa proprietà dello spazio X. In generale, lo stesso fatto non vale per spazi collettivamente normali, che costituiscono un rafforzamento della normalità più debole della paracompattezza [4]. Interessanti sono i risultati relativi al prodotto di spazi collettivamente normali o α-paracompatti e normali, per spazi compatti esposti in [6] (In particolare si vedano i risultati citati nella « Discussion »). È poi noto classicamente che il prodotto di uno spazio normale per un compatto non è, in generale, normale.

Intendendo le classi di spazi sopra ricordate come rafforzamenti della normalità, può essere interessante investigare se e sotto quali ulteriori condizioni per uno spazio topologico compatto Y il prodotto per esso d'uno spazio X collettivamente normale, ... è uno spazio che gode ancora delle stesse proprietà. Ciò mi sembra interessante anche in considerazione del fatto che M. E. Rudin [6] ha recentemente dimostrato la congettura di Morita sulla normalità del prodotto di uno spazio normale per uno spazio compatto. I risultati esposti nel paragrafo 3 voglio essere un approccio a tale indirizzo di studio.

BIBLIOGRAFIA

[1] J. Dieudonné, *Une généralisation des espaces compact*, J. Math. Pures Appl., **23** (1944), pp. 65-76.

[2] E. Michael, *A note on paracompact spaces*, Proc. Amer. Math. Soc., **4** (1953), pp. 831-838.

[3] E. Michael, *The product of a normal space and a metric space need not be normal*, Bull. Amer. Math. Soc., **69** (1963), pp. 375-376.

[4] R. Engelking, *Outline of general topology*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1968.

[5] I. Juhász, *Cardinal functions in topology*, Mathematical Centre Tracts, Amsterdam, 1971.

[6] M. E. Rudin, *The normality of products with one compact factor*, General Topology and its Applications, **5** (1975), pp. 45-59.

[7] G. Tironi, *Alcune osservazioni sul prodotto di due spazi topologici aventi una proprietà di Lindelöf*, Rend. Ist. di Mat. Univ. Trieste, **5**, fasc. II (1973), pp. 174-179

Manoscritto pervenuto in Redazione il 16 dicembre 1975.