RENDICONTI
*del*
SEMINARIO MATEMATICO
*della*
UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIULIANO BRATTI

# Un'applicazione del teorema del grafico chiuso alla risolubilità di sistemi differenziali del tipo : $Pu = f$, $Qu = 0$

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*, tome 61 (1979), p. 125-132

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1979__61__125_0>

Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, Vol. 61 (1979)

# Un'applicazione del teorema del grafico chiuso alla risolubilità di sistemi differenziali del tipo: $Pu = f$, $Qu = 0$.

Giuliano Bratti (*)

**0.** In ciò che segue è contenuto un criterio per la risolubilità, « in grande » del sistema differenziale:

$$Pu = f\,, \qquad Qu = 0\,,$$

$f$ e $u$ di classe $C^\infty(A)$, $A$ un aperto di $R^n$; $P$ e $Q$ operatori differenziali lineari, a coefficienti costanti, primi tra di loro, con $Q$ ellittico, (il caso in cui $P$ e $Q$ non sono primi tra di loro, ovviamente con $P$ non multiplo di $Q$, è trattabile in modo analogo).

In [1] è presente un criterio algebrico-topologico per la risolubilità del sistema di sopra; il criterio qui esposto, (Teorema 7), è, (probabilmente), più facile di quello ed ha il pregio di essere la naturale estensione del Teorema 4, Cap. I, di [4].

**1.** Al fine di questo articolo sono interessanti i seguenti teoremi:

Teorema 1. Sia $E$ uno spazio vettoriale topologico localmente convesso; sia $F$ un suo sottospazio lineare e sia $A$ un aperto convesso in $E$ tale che: $A \wedge F = \emptyset$. Allora: esiste un iperpiano chiuso, $H$, in $E$ tale che:

$$A \wedge H = \emptyset \qquad \text{e} \qquad F \subseteq H\,.$$

(*) Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico dell'Università - Via Belzoni 7 - I-35100 Padova.

(Il teorema di sopra è conosciuto come «la forma geometrica» del teorema di Hahn-Banach.)

TEOREMA 2. Siano $E$ ed $F$ spazi di Fréchet e sia $f$ un'applicazione lineare e continua di $E$ in $F$. Siano $E'$ ed $F'$ i duali di $E$ ed $F$ rispettivamente; ${}^t f$ sia la trasposta di $f$.

Le seguenti proposizioni, *a*) e *b*), sono equivalenti:

*a*) $f$ è suriettiva;

*b*) ${}^t f$ è iniettiva e ${}^t f(F')$ è debolmente chiuso in $E'$.

TEOREMA 3. Siano $E$ ed $F$ spazi di Fréchet o duali forti di spazi di Fréchet riflessivi.

Se $f$ è un'applicazione lineare di $E$ in $F$, $f$ è continua se e solo se il grafico di $f$ è chiuso in $E \times F$.

(Il teorema di sopra, e altro, va sotto il nome di teorema del grafico chiuso.)

**2.** Sia $A$ un aperto di $R^n$ e sia $Z_A$ la riunione delle componenti connesse e compatte del complementare di $A$: $R^n/A$.

Sia $L = A \cup Z_A$; $L$ è un aperto, [5]; sia $K$ un compatto di $L$.

DEFINIZIONE 1. Se $Z_A \neq \emptyset$, $K$ separa $Z_A$ se e solo se: esiste una partizione di $Z_A$ del tipo $Z_A = Z_{1,A} \cup Z_{2,A}$, con $Z_{1,A} \neq \emptyset$, ed esiste un aperto $B \subseteq L$, tale che:

$$Z_{1,A} \subseteq K \subset B \qquad \text{e} \qquad Z_{2,A} \wedge B = \emptyset \, .$$

DEFINIZIONE 2. $A$ soddisfa la $b$-proprietà se e solo se: o $Z_A = \emptyset$, oppure: non esiste alcun compatto $K$ in $L$ che separi $Z_A$.

L'ultima definizione nasce da un teorema «di densità» per sistemi del tipo:

$$Pu = f \, , \qquad Qu = 0 \, ,$$

$f$ ed $u$ di classe $C^\infty(A)$.

Si ha, infatti, [1]:

TEOREMA 4. Le seguenti proposizioni, *a*) e *b*), sono equivalenti:

*a*) $A$ soddisfa la $b$-proprietà;

*b*) per ogni coppia, $(P, Q)$, di operatori differenziali lineari, a coefficienti costanti, primi tra di loro, con $Q$ ellittico, si ha:

se $\operatorname{Ker} Q/_A = (f \in C^\infty(A)\colon Qf = 0)$,

$$P(\operatorname{Ker} Q/_A) \text{ è } C^\infty(A) \text{ denso in } \operatorname{Ker} Q/_A .$$

Dal punto di vista topologico la *b*-proprietà enunciata nella Definizione 2 è piuttosto complicata; eccone una caratterizzazione, in termini di operatori differenziali, che la pone in miglior luce.

TEOREMA 5. Le seguenti proposizioni, *a*) e *b*), sono equivalenti:

*a*) $A$ soddisfa la *b*-proprietà;

*b*) per ogni operatore ellittico $Q$ si ha: se $m \in E'(R^n)$ e $Qm \in E'(A)$ allora: $m \in E'(A)$.

Il Teorema 5 ha essenzialmente la stessa dimostrazione del Teorema 4.

Si osservi come la proposizione in *b*) dell'ultimo teorema dimostri facilmente che $\operatorname{Ker} Q/_{R^n}$ è $C^\infty(A)$ denso in $\operatorname{Ker} Q/_A$. Infatti: se $m \in E'(A)$ ed $m$ è ortogonale a $\operatorname{Ker} Q/_{R^n}$, in base ai Lemmi 3.4.1 e 3.4.2 di [3], pagg. 77-78, si ha: $m = {}^tQn$, con $n$ in $E'(R^n)$ e dunque $n$ in $E'(A)$.

In base alla Prop. 8, Cap. III di [4], si ricava allora che: $A$ soddisfa la *b*-proprietà se e solo se: $Z_A = \emptyset$.

**3.** Si consideri il sistema:

$$Pu = f , \qquad Qu = 0 ,$$

$f$ in $C^\infty(A)$.

Ovvio che la condizione di compatibilità del sistema è che: $Qf$ sia zero. Se si vuol studiare la risolubilità, in $C^\infty(A)$, del sistema di sopra, per ogni $f$ in $\operatorname{Ker} Q/_A$, è, in base al Teorema 4, in generale necessario che: $Z_A$ sia vuoto, (l'A. ignora se tale condizione sia necessaria in ogni caso per avere: $P(\operatorname{Ker} Q/_A) = \operatorname{Ker} Q/_A$).

Sia ${}^tP$ il trasposto dell'operatore $P$; $E'(A)$ lo spazio delle distribuzioni a supporto compatto in $A$.

TEOREMA 6. Sia $A$ un aperto di $R^n$ con $Z_A = \emptyset$.
Le seguenti proposizioni, *a* e *b*), sono equivalenti:

*a*) $P(\operatorname{Ker} Q/_A) = \operatorname{Ker} Q/_A$;

*b*) ${}^tP(E'(A)) + {}^tQ(E'(A))$ è chiuso in $E'(A)$

DIMOSTRAZIONE. ${}^tP\colon (\mathrm{Ker}\, Q/A)' \to (\mathrm{Ker}\, Q/A)'$ è evidentemente iniettiva, visto che: se $m \in (\mathrm{Ker}\, Q/A)'$, ($m$ è la restrizione a $\mathrm{Ker}\, Q/A$ di una distribuzione a supporto compatto in $A$), e se ${}^tPm = 0$ su $\mathrm{Ker}\, Q/A$, allora deve essere: ${}^tPm = {}^tQn$, con $n$ in $E'(R^n)$. Poichè $P$ e $Q$ sono primi tra di loro di ha: $m = {}^tQn_1$ e deve essere $n_1$ in $E'(A)$.

Sia $m_j$ una rete di distribuzioni in $E'(A)$ tale che: ${}^tPm_j$ converge, per ogni $f$ in $\mathrm{Ker}\, Q/_A$, verso $m_0 \in E'(A)$. Ovvio che $m_0$ risulta ortogonale a $\mathrm{Ker}\, P/_A \wedge \mathrm{Ker}\, Q/_A$. Dimostriamo che $m_0$ è in ${}^tP(E'(A)) + {}^tQ(E'(A))$.

Infatti: in base al citato teorema di Hahn-Banach, se $m_0 \notin {}^tP(E'(A)) + {}^tQ(E'(A))$ esiste $f$ in $C^\infty(A)$ tale che:

$$\langle m_0 \cdot f \rangle \neq 0 \qquad \text{e} \qquad \langle {}^tPm + {}^tQn \cdot f \rangle = 0 \,,$$

per ogni $m$ e $n$ in $E'(A)$. Assurdo.

Allora: è

$$m_0 = {}^tPm_1 + {}^tQn_1$$

e, quindi, $m_0 = {}^tPm$ su $\mathrm{Ker}\ Q/A$.

Il Teorema 2 dimostra allora che è:

$$P(\mathrm{Ker}\, Q/_A) = \mathrm{Ker}\, Q/_A \,.$$

L'implicazione: $b$) verso $a$) è conclusa.

$a$) implica $b$).

Sia: ${}^tPm_j + {}^tQn_j$ una rete in $E'(A)$ convergente verso $m_0$ in $E'(A)$. Allora: se $f \in \mathrm{Ker}\, Q/_A$, $\langle {}^tPm_j \cdot f \rangle$ converge verso $\langle m_0 \cdot f \rangle$. Il solito Teorema dà: $m_0 = {}^tPm_1$, con $m_1$ in $E'(A)$, per ogni $f$ in $\mathrm{Ker}\, Q/_A$.

Poichè: $m_0 - {}^tPm_1$ è ortogonale a $\mathrm{Ker}\, Q/_A$, per il fatto che $Q$ è ellittico e $Z_A$ è vuoto, risulta: $m_0 - {}^tPm_1 = {}^tQn_1$, con $n_1$ in $E'(A)$.

Il Teorema 6 è completamente dimostrato.

OSSERVAZIONE 1. Per avere: $P(C^\infty(A)) = C^\infty(A)$, è necessario e sufficiente che: ${}^tP(E'(A))$ sia chiuso in $E'(A)$, (Teor. 4, Cap. I, [4]).

La proposizione in $b$) del Teorema 6 è essenzialmente dello stesso tipo.

Sia $B$ un sottoinsieme aperto di $A$.

DEFINIZIONE 3. La quaterna: $(A, B, P, Q)$ si dice $C^\infty$-compatibile se e solo se: per ogni $f$ in $C^\infty(A)$ tale che il sistema:

$$Pu = f\,, \qquad Qu = 0$$

è $C^\infty$-localmente risolubile in $A$, (i.e.: per ogni punto $p$ in $A$ esiste un suo intorno, $V_p$, ed esiste $u_p$ in $C^\infty(V_p)$ tale che in $V_p$: $Pu_p = f$ e $Qu_p = 0$), per quelle stesse $f$ il sistema di sopra è $C^\infty$-risolubile in $B$, (i.e.: esiste $u$ in $C^\infty(B)$ che soddisfa il sistema).

OSSERVAZIONE 2. In base ad un teorema di Lojasiewicz-Malgrange, [6], per il fatto che $P$ e $Q$ sono primi tra di loro, le $f$ in $C^\infty(A)$ per cui il sistema $Pu = f$, $Qu = 0$ è $C^\infty$-localmente risolubile, sono tutte e solo quelle di $\operatorname{Ker} Q/_A$; in breve: la quaterna: $(A, B, P, Q)$ è $C^\infty$-compatibile se e solo se: $P(\operatorname{Ker} Q/_B) \supseteq \operatorname{Ker} Q/_A$.

Si ponga: $G(B) = {}^tP(E'(B)) + {}^tQ(E'(B))$; analogamente per $G(A)$. $G(B)^-$ indica la chiusura, in $E'(B)$, di $G(B)$; $(G(B)^-)^0$ indica l'ortogonale, in $C^\infty(B)$, di $G(B)^-$.

È noto, (n. 3, Préliminaires di [4]), che $G(B)^-$ è il duale forte dello spazio: $C^\infty(B)/(G(B)^-)^0$, e che quest'ultimo spazio è uno spazio di Fréchet riflessivo.

Il seguente teorema è una generalizzazione del Teorema 6.

TEOREMA 7. Sia $A$ un aperto di $R^n$ con $Z_A = \emptyset$; $B$ sia un sottoinsieme aperto di $A$.

Le seguenti proposizioni, $a$) e $b$), sono equivalenti:

$a$) la quaterna: $(A, B, P, Q)$ è $C^\infty$-compatibile;

$b$) $G(B)^-$ è contenuta in $G(A)$.

DIMOSTRAZIONE.

$a$) implica $b$).

Sia: $G(B)'_s$ il duale debole di $G(B)$; su $\operatorname{Ker} Q/_A$ vi sia la topo logia indotta da $C^\infty(A)$.

Si indichi con $L$ la mappa: $L\colon \operatorname{Ker} Q/_A \to G(B)'_s$ così definita: se $f \in \operatorname{Ker} Q/_A$,

$$L(f)\colon\ G(B) \to \mathbf{C}\,, \qquad \langle L(f) \cdot {}^tPm + {}^tQn\rangle = \langle m \cdot f\rangle\,.$$

$L$ è ben definita; infatti: se: ${}^tPm_1 + {}^tQn_1 = {}^tPm_2 + {}^tQn_2$, per il fatto che $P$ e $Q$ sono primi tra di loro, risulta: $m_2 = m_1 + {}^tQn_3$, sempre con $n_3$ in $E'(A)$.

Ovvio che $L$ è lineare e che: $L(f) \in G(B)'$. Infatti: se la rete ${}^tPm_j + {}^tQn_j$ converge a zero in $G(B)$, tenuto conto dell'ipotesi, i.e.: esiste $g$ in Ker $Q/B$ tale che: $Pg = f$ in $B$, si ha:

$$\lim_j \langle L(f) \cdot {}^tPm_j + {}^tQn_j \rangle = \langle \lim_j m_j \cdot f \rangle = \\ = \lim_j \langle {}^tPm_j \cdot g \rangle = \lim_j \langle {}^tFm_j + {}^tQn_j \cdot g \rangle = 0 \, .$$

$L$ è continua.

Infatti: se $f_n$ converge a zero in $\operatorname{Ker} Q/A$,

$$\lim_n \langle L(f_n) \cdot {}^tPm + {}^tQn \rangle = \lim_n \langle m \cdot f_n \rangle = 0 \, .$$

Si indichi con $M$ la mappa: $M\colon \operatorname{Ker} Q/A \to (G(B)^-)'$, così definita: $M(f)$ è l'estensione per continuità a $G(B)^-$ di $L(f)$.

Su $(G(B)^-)'$ si ponga la topologia del duale forte di $G(B)^-$. Per quanto osservato prima del teorema: $(G(B)^-)'$ è $C^\infty(B)/(G(B)^-)^0$. Allora: se si prova che il grafico di $M$ è chiuso, per il Teorema 3 $M$ risulta continua.

Infatti: se $(f_n, M(f_n))$ converge, in $\operatorname{Ker} Q/A \times (G(B)^-)$, verso $(f_0, m_0)$ $L(f_n)$ che è la restrizione a $G(B)$ di $M(f_n)$ converge, su $G(B)$ ovviamente, verso $L(f_0)$ che risulta così la restrizione a $G(B)$ di $m_0$. Allora:

$$M(f_0) = m_0; \qquad \text{ovvero:} \qquad M \text{ è continua} \, .$$

Sia: ${}^tM\colon G(B)^- \to (\operatorname{Ker} Q/A)'_f$, la trasposta di $M$ tra i duali forti. ${}^tM$ è continua; allora: se ${}^tPm_j + {}^tQn_j$ converge a $m_0$ in $G(B)^-$,

$$\lim_j {}^tM({}^tPm_j + {}^tQn_j) = \lim_j m_j = {}^tM(m_0)$$

che è la restrizione a $\operatorname{Ker} Q/_A$ di una distribuzione a supporto compatto in $A$.

Ciò dimostra: ${}^tPm_j$ converge su $\operatorname{Ker} Q/A$ verso $m_0$ e verso ${}^tP({}^tM(m_0))$. Con il solito ragionamento: $m_0 = {}^tP({}^tM(m_0) + {}^tQn_0$ e $n_0$ è in $E'(A)$. L'implicazione da $a)$ verso $b)$ è provata.

$b)$ implica $a)$.

Per l'ipotesi, la mappa $M\colon (G(B)^-) \to (\operatorname{Ker} Q/_A)'$ così definita: se $m_0 = {}^tPm_1 + {}^tQn_1 \in G(B)^-$, $\langle M(m_0) \cdot f \rangle = \langle m_1 \cdot f \rangle$, per ogni $f$ in $\operatorname{Ker} Q/_A$, è ben definita ed è continua non appena gli spazi hanno la topologia dei duali forti.

Infatti: se: $\big(({}^tPm_j + {}^tQn_j), m_j\big)$ converge a $(m, h)$ in $G(B)^- \times \times (\operatorname{Ker} Q/A)'$ risulta: ${}^tPm_j$ converge a ${}^tPh$ su ogni $f$ di $\operatorname{Ker} Q/_A$ e converge a ${}^tPm_0$ in $C^\infty(B)$ se è: $m = {}^tPm_0 + {}^tQn_0$.

Allora: ${}^tPm_0 + {}^tQn_0 = {}^tPh + {}^tQ(n_0 + n_1)$, con il solito ragionamento, mostra che il grafico di $M$ è chiuso.

Sia:

$$
\begin{aligned}
{}^tM\colon \operatorname{Ker} Q/_A \to \big(G(B)^-\big)'_f &= \\
&= C^\infty(B)/\big(G(B)^-\big)^0 = C^\infty(B)/(\operatorname{Ker} P/_B \wedge \operatorname{Ker} Q/_B)
\end{aligned}
$$

la trasposta di $M$.

Se $f \in \operatorname{Ker} Q/_A$, ${}^tM(f)$ è soluzione del problema: $Pu = f$, $Qu = 0$ in $C^\infty(B)$. Il teorema è concluso.

OSSERVAZIONE 3. Si consideri la mappa: $(P, Q)\colon C^\infty(A) \to C^\infty(A) \times \times C^\infty(A)$, $(P, Q)(u) = (Pu, Qu)$; ovvio che tale mappa è continua e che: se ${}^tP\big(E'(A)\big) + {}^tQ\big(E'(A)\big)$ è debolmente chiuso in $E'(A)$, l'immagine di quella mappa è chiusa in $C^\infty(A) \times C^\infty(A)$.

Infatti: la mappa $(P, Q)$ è aperta sull'immagine così che l'immagine della $(P, Q)$ è topologicamente ed algebricamente isomorfa a $C^\infty(A)/(\operatorname{Ker} P/_A \wedge \operatorname{Ker} Q/_A)$.

Nelle ipotesi del Teorema 6 è facile dimostrare che: $(P, Q)\, C^\infty(A)$ è denso in $H = \big((f, g) \in C^\infty(A) \times C\in(A)\colon Qf = Pg\big)$. Infatti: se $(m, n) \in \in E'(A) \times E'(A)$ è ortogonale a $(P, Q)\, C^\infty(A)$, risulta che: ${}^tPm + {}^tQn = 0$; per il fatto che $P$ e $Q$ sono primi tra di loro, risulta: $m = {}^tQn_1$, e al solito: $n_1 \in E'(A)$. Allora: $n = -{}^tPn_1$; così che:

$$
(m, n)(f, g) = (n_1 \cdot Qf) - (n_1 \cdot Pg) = 0\,, \qquad \text{se } (f, g) \in H\,.
$$

Quanto sopra viene a dire che: il sistema: $Pu = f$, $Qu = g$, con $Pg = Qf$, è risolubile in $A$ se e solo se lo è il sistema: $Pu = f$, $Qu = 0$, con $Qf = 0$.

## BIBLIOGRAFIA

[1] G. BRATTI, *A density theorem about some system*, in pubblicazione in Rendiconti del Seminario Matematico di Padova.

[2] A. GROTHENDIECK, *Sur les espaces (F) et (DF)*, Summa Brasiliensis Math., **3**, 6 (1954), pp. 57-121.

[3] L. HÖRMANDER, *Linear Partial Differential Operators*, Springer-Verlag (1969).

[4] B. MALGRANGE, *Existence et approximation des solutions des équations aux dérivées partielle et des équations de convolution*, Annales de l'Institut Fourier, tome VI (1955 et 1956).

[5] R. NARASIMHAN, *Analysis on real and complex manifolds*, Masson e Cie, Paris, North-Holland, Amsterdam.

[6] A. ANDREOTTI - M. NACINOVICH, *Complexes of partial differential operators*, Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa (1976).

Manoscritto pervenuto in redazione il 27 maggio 1978.